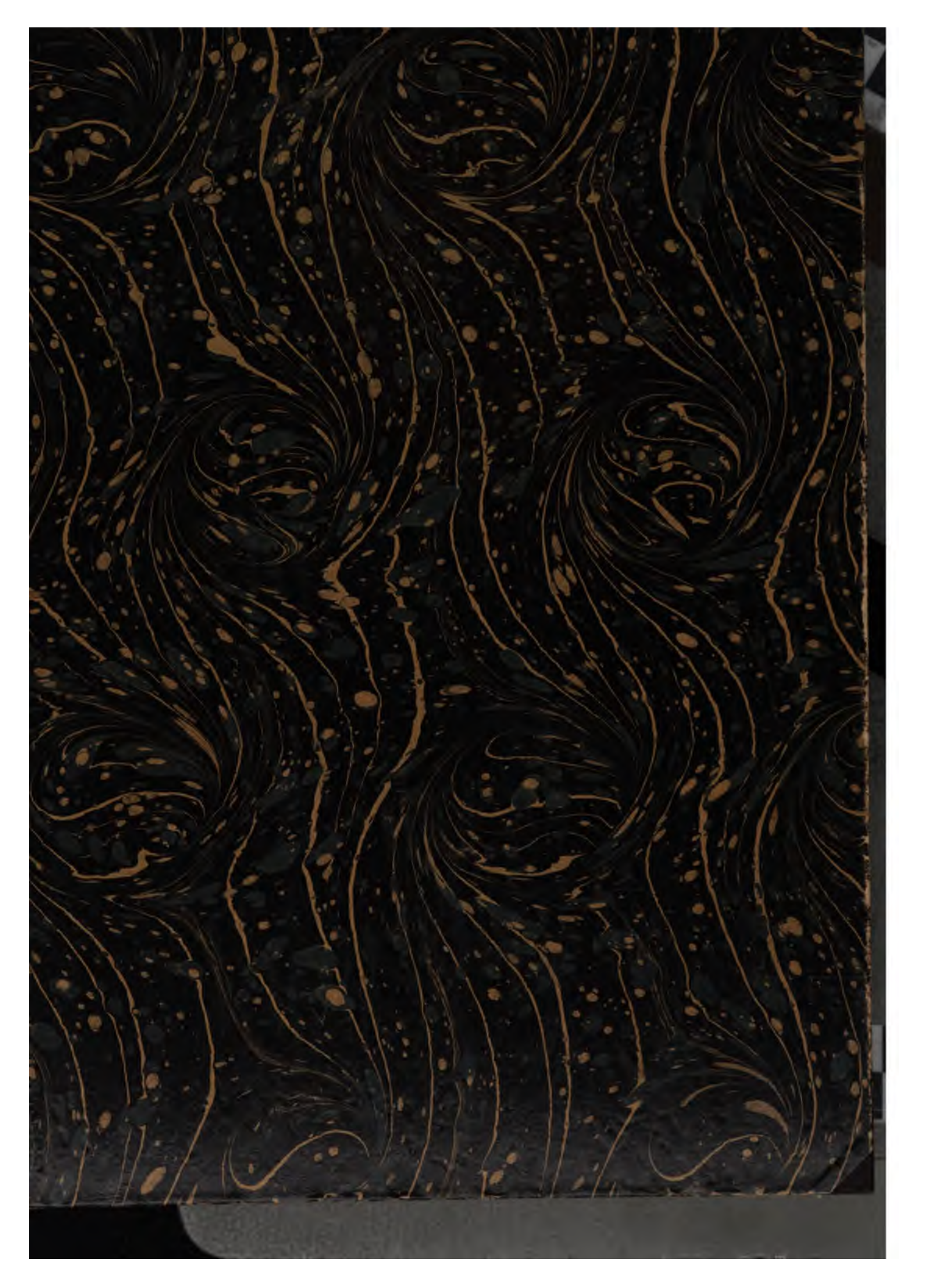




Journal

für die

reine und angewandte Mathematik.

In zwanglosen Heften.

Als Fortsetzung des von

A. L. Crelle

gegründeten Journals

herausgegeben

unter Mitwirkung der Herren

Schellbach, Kummer, Kronecker, Weierstrass

von

C. W. Borchardt.

Mit thätiger Beförderung hoher Königlich-Preussischer Behörden.

Zweiundsiebzigster Band.

In vier Heften.

Berlin, 1870.

Druck und Verlag von Georg Reimer.

Inhaltsverzeichniss des zweiundsiebzigsten Bandes.

Fortgesetzte Untersuchungen in Betreff der ganzen homogenen Functionen von n Differentialen.

(Von Herrn *R. Lipschitz* in Bonn.)

Mit einer jeden ganzen homogenen Function oder Form von n Differentiale correspondirt ein bestimmtes isoperimetrisches Problem, bei dem die in der Form vorkommenden Variabelen als abhängig von einer independenten Variabele t aufgefasst werden. Daher correspondirt mit der Form auch das entsprechende System von isoperimetrischen Differentialgleichungen. Die vollständige Integration desselben lehrt ein System von Functionen der in Rede stehenden abhängigen Variabelen kennen, welche, an die Stelle der ursprünglichen Variabelen als neue Variabele in die gegebene Form substituirt, eine Form von bemerkenswerther Beschaffenheit hervorbringen. Wegen der Aufstellung dieses Systems von neuen Variabelen und wegen der Begründung verschiedener Thatsachen, die bei der Entwickelung des Folgenden vorausgesetzt werden, erlaube ich mir auf einen früheren Aufsatz zu verweisen *). Da für zwei Formen, die durch eine beliebige Substitution in einander transformirt werden können, die bezeichneten, sich gegenseitig entsprechenden Systeme von neuen Variabelen durch homogene lineare Gleichungen mit constanten Coefficienten verbunden sind, so darf man bei jeder der beiden Formen diese neuen Variabelen als Normalvariabelen, und die durch Einführung derselben entstehende Form als Normaltypus der betreffenden Klasse von Formen ansehen. Das Studium des Normaltypus bildet dann einen sachgemässen Ausgangspunkt für das Studium der Klasse von Formen.

Zur Erforschung der Eigenschaften des Normaltypus liefern diejenigen Betrachtungen geeignete Hülfsmittel, welche *Hamilton* und *Jacobi* über die isoperimetrischen Probleme angestellt haben. Denselben kann man nämlich

---

*) Bd. LXX pag. 71.

unter den obwaltenden Umständen eine solche Wendung geben, dass ihr Resultat die Darstellung des vollständigen Differentials einer ganzen homogenen Function der Normalvariabelen wird, welche mit dem Normaltypus der betreffenden Form nahe zusammenhängt. Die Anwendung dieses Resultats führt zu der Auffindung allgemeiner Eigenschaften des Normaltypus, und demnächst zu einer sehr einfachen Umformung der zweiten Variation für das zugehörige isoperimetrische Problem.

Bei jeder Form des zweiten Grades von n Differentialen giebt es eine zu derselben covariante quadrilineare Form, welche darüber entscheidet, ob die gegebene Form in eine Form mit constanten Coefficienten transformirt werden kann oder nicht; die quadrilineare Form verschwindet im ersteren Falle identisch, im zweiten Falle nicht. Ausser dieser quadrilinearen Form kann man eine zweite quadrilineare Form aufstellen, die ebenfalls die Beschaffenheit einer Covariante hat, und dann den Quotienten der ersten quadrilinearen Fon durch die zweite quadrilineare Form bilden. Die bezeichneten allgemeinen Eenschaften des Normaltypus gestatten nun, denjenigen Begriff, den *Riemann* als die Erweiterung des Begriffs des *Gauss*ischen Krümmungsmasses in die Theorie der quadratischen Formen eingeführt hat, durch den Quotienten der bden quadrilinearen Formen explicite analytisch darzustellen. Bei einer gewissen, von *Riemann* angegebenen, speciellen Form von n Differentialen wird ner Quotient gleich einer Constante. Indem ich nun für diese specielle Form den Normaltypus wirklich bildete, und denselben mit dem allgemeinen Normaltypus einer quadratischen Form von zwei Differentialen verglich, bemerkte ich die Uebereinstimmung von gewissen Merkmalen, und dies bewog mich, alle Klassen von quadratischen Formen, welchen diese Merkmale gemeinsam sind, als ein eschlecht von Formen zusammen zu fassen. Unter den Eigenschaften dieses Geschlechtes erwähne ich die eine, dass, wenn man den Quotienten der beiden quadrilinearen Formen durch eine gewisse Substitution so umwandelt, dass der Zähler und der Nenner Formen von nur zwei Systemen independenter Differentiale werden, der Quotient eine von der Wahl dieser Differentiale unabhängige Grösse werden muss. Und es gilt auch der umgekehrte Satz, dass, wenn der für eine gegebene Form gebildete Quotient der beiden quadrilinearen Formen durch die betreffende Substitution in eine von den Differentialen unabhängige Grösse übergeht, die gegebene Form nothwendig dem definirten Geschlecht von Formen angehört. Hieraus ergiebt sich die Folgerung, dass eine beliebig gegebene Form in die erwähnte *Riemann*sche Form transformirt werden kann oder nicht, je nachdem

der Quotient der beiden quadrilinearen Formen ohne eine besondere Voraussetzung über die eingehenden Variabelen und Differentiale gleich einer Constante wird, oder nicht.

Einer jeden gegebenen Form des zweiten Grades von n Differentialen ist immer eine lineare partielle Differentialgleichung der zweiten Ordnung zugehörig, die bei einer gewissen Form in die *Laplace*sche partielle Differentialgleichung übergeht. Aus den angedeuteten allgemeinen Gesichtspunkten ergiebt sich eine Eigenschaft dieser Differentialgleichung, und diese Eigenschaft liefert für gewisse Formen, zu denen auch die erwähnte *Riemann*sche Form gehört, ein Integral der partiellen Differentialgleichung, das als eine Verallgemeinerung des Potentials betrachtet werden kann.

Erste Abtheilung.

1.

Es bezeichne, wie in der früheren Arbeit, $f(dx)$ eine Form des p^{ten} Grades von den n Differentialen dx_a, deren Coefficienten von den Variabelen x_a beliebig abhängen, und bei der die Determinante $\left|\frac{\partial^2 f(dx)}{\partial dx_a \partial dx_b}\right| = \Delta$ nicht identisch verschwindet. Die Zeiger $a, b, c, \ldots$ durchlaufen stets die Reihe der Zahlen von 1 bis n. Zu der Form $f(dx)$ gehört das isoperimetrische Problem, die Variabelen x_a in der Weise als Functionen einer independenten Variabele t zu bestimmen, dass die erste Variation des zwischen festen Grenzen genommenen Integrals

$$(1.) \quad S = \int_{t_0}^{t_1} f\left(\frac{dx}{dt}\right) dt$$

verschwindet. Setzt man $\frac{dx_a}{dt} = x'_a$, und bildet die vollständige Variation

$$(2.) \quad \begin{cases} \delta f(x') = \sum_a \left(\frac{\partial f(x')}{\partial x_a} \delta x_a + \frac{\partial f(x')}{\partial x'_a} \delta x'_a \right) \\ \qquad = \sum_a \left(\frac{\partial f(x')}{\partial x_a} - \frac{d \frac{\partial f(x')}{\partial x'_a}}{dt} \right) \delta x_a + \frac{d \sum_a \frac{\partial f(x')}{\partial x'_a} \delta x_a}{dt}, \end{cases}$$

so entsteht das System der isoperimetrischen Differentialgleichungen

$$(3.) \quad \frac{d \frac{\partial f(x')}{\partial x'_a}}{dt} - \frac{\partial f(x')}{\partial x_a} = 0.$$

Dasselbe sei in der Weise vollständig integrirt, dass die Variabelen x_a für den Werth $t=t_0$ die Bedingungen $x_a = x_a(0)$, $x'_a = x'_a(0)$ erfüllen. Alsdann haben die Grössen x_a die Eigenschaft, reine Functionen der n Elemente $x_b(0)$ und der n Elemente $(t-t_0)x'_b(0) = u_b$ zu sein *). Indem man jetzt die n Elemente $x_b(0)$ als constant, die n Elemente u_b als veränderlich betrachtet, werde die Form $f(dx)$ durch die Einführung der neuen Variabelen u_b transformirt, so dass die Gleichung

$$(4.)\qquad f(dx) = \varphi(du)$$

hervorgeht.

Die Variabelen u_b fasse ich als Normalvariabelen, die Form $\varphi(du)$ als Normaltypus der Form $f(dx)$ auf. Sobald die Form $f(dx)$ durch die Substitution von beliebigen neuen Variabelen y_t in eine Form $g(dy)$ transformirt, und aus dieser, der Form $\varphi(du)$ genau entsprechend, die Form $\chi(dz)$ abgeleitet wird, so stehen die Formen $\varphi(du)$ und $\chi(dz)$ durch eine Substitution in Verbindung, bei der die Variabelen u_b lineare Functionen mit constanten Coefficienten der Variabelen z_t sind **). Die Art dieses Zusammenhanges steht aber auf einer andern Stufe, als die Art des Zusammenhanges zwischen den Formen $f(dx)$ und $g(dy)$.

Wenn man die Coefficienten der Form $\varphi(du)$ nach den positiven Potenzen und Producten der positiven Potenzen der Grössen u_a entwickelt, und das Aggregat der Glieder von der Ordnung q in $\varphi(du)$ mit $[\varphi(du)]_q$ bezeichnet, so verwandelt sich bei dem Uebergange von der Form $\varphi(du)$ zu der so eben erwähnten Form $\chi(dz)$ wegen des linearen Charakters der Substitution der Ausdruck $[\varphi(du)]_q$ in den entsprechenden Ausdruck $[\chi(dz)]_q$. Der Ausdruck $[\varphi(du)]_0$, welcher aus $\varphi(du)$ entsteht, indem die Grössen u_a in sämmtlichen Coefficienten gleich Null gesetzt werden, kann auf folgende Art näher bestimmt werden. Die Form $\varphi(du)$ geht aus der Form $f(dx)$ hervor, wenn die Differentiale dx_a durch die Ausdrücke

$$(5.)\qquad dx_a = \frac{\partial x_a}{\partial u_1}du_1 + \frac{\partial x_a}{\partial u_2}du_2 + \cdots + \frac{\partial x_a}{\partial u_n}du_n$$

ersetzt werden. Betrachtet man die Grössen x_a und $\frac{\partial x_a}{\partial u_b}$ als abhängig von der Variabele t, so wird bei der Voraussetzung, dass $t=t_0$ sei, $x_a = x_a(0)$ und $\frac{\partial x_a}{\partial u_b} = \delta_{a,b}$, das ist, gleich 1 oder gleich Null, je nachdem a, b einander

*) Bd. LXX, pag. 89.

**) Bd. LXX, pag. 88.

gleich sind oder nicht*). Werden nun x_a und $\frac{\partial x_a}{\partial u_b}$ als abhängig von den Elementen $x_c(0)$ und u_c angesehn, so trifft die Voraussetzung $t = t_0$ mit der Voraussetzung zusammen, dass die n Grössen u_c gleichzeitig verschwinden. Bei dieser Voraussetzung wird also $x_a = x_a(0)$ und $dx_a = du_a$. Bezeichnet man daher diejenige Form, in die sich $f(dx)$ durch die Gleichungen $x_a = x_a(0)$ verwandelt, mit $f_0(dx)$, so kommt für den Ausdruck $[\varphi(du)]_0$ die Darstellung

$$(6.) \qquad [\varphi(du)]_0 = f_0(du).$$

Es ist zweckmässig, schon jetzt die Ausdrücke $\frac{dx_a}{dt}$ unter der Annahme zu bilden, dass die Grössen x_a durch die Elemente $x_b(0)$ und u_b dargestellt sind. Vermöge der Definition der Grössen u_b ist

$$\frac{du_b}{dt} = \frac{u_b}{t-t_0},$$

und daher folgt aus (5.) die Gleichung

$$\frac{dx_a}{dt} = \frac{\partial x_a}{\partial u_1}\frac{u_1}{t-t_0} + \frac{\partial x_a}{\partial u_2}\frac{u_2}{t-t_0} + \cdots + \frac{\partial x_a}{\partial u_n}\frac{u_n}{t-t_0}.$$

Setzt man

$$(t-t_0)\frac{dx_a}{dt} = v_a,$$

so kommt

$$(7.) \qquad v_a = \frac{\partial x_a}{\partial u_1}u_1 + \frac{\partial x_a}{\partial u_2}u_2 + \cdots + \frac{\partial x_a}{\partial u_n}u_n.$$

Diese Grössen v_a sind also reine Functionen der Elemente $x_b(0)$ und u_b. Sieht man die Grössen $u_a = (t-t_0)x'_a(0)$ als abhängig an von den Elementen $x_c(0)$ und x_c, so tritt der beachtenswerthe Umstand hervor, dass bei der Vertauschung jedes Elements $x_c(0)$ mit dem entsprechenden Elemente x_c eine jede Grösse u_a in die entsprechende Grösse $-v_a = -(t-t_0)x'_a$ verwandelt wird.

2.

Nachdem das System Differentialgleichungen (3.) in der vorgeschriebenen Weise integrirt ist, kann man die Werthe x_a, in den Constanten $x_b(0)$ und $x'_b(0)$ und der Grösse t ausgedrückt, in das Integral S substituiren, so dass dieses eine Function der Grössen $x_b(0)$, $x'_b(0)$, t wird. Die Methode von *Hamilton* und *Jacobi* gründet sich dann auf die Darstellung der ersten Variation

*) Bd. LXX, pag. 93.

von S. Wenn man zunächst die Elemente $x_b(0)$ und $x'_b(0)$, jedoch nicht das Element t, variirt, und die entsprechenden Variationen mit (δS), (δx_a) bezeichnet, so folgt aus den Gleichungen (2.) und (3.) die Relation

$$(8.)\qquad (\delta S) = \sum_a \frac{\partial f(x')}{\partial x'_a}(\delta x_a) - \sum_a \frac{\partial f_0(x'(0))}{\partial x'_a(0)}\delta x_a(0).$$

Variirt man auch das Element t, und nennt die bezüglichen vollständigen Variationen δS, δx_a, so gelten die Gleichungen

$$\delta S = (\delta S) + f(x')\delta t, \qquad \delta x_a = (\delta x_a) + x'_a\delta t,$$

und diese, in (8.) substituirt, liefern das Resultat

$$(9.)\qquad \delta S = \Big(f(x') - \sum_a \frac{\partial f(x')}{\partial x'_a}x'_a\Big)\delta t + \sum_a \frac{\partial f(x')}{\partial x'_a}\delta x_a - \sum_a \frac{\partial f_0(x'(0))}{\partial x'_a(0)}\delta x_a(0).$$

Weil nun $f(x')$ eine homogene Function p^{ten} Grades von den Grössen x'_a ist, so hat man

$$\sum_a \frac{\partial f(x')}{\partial x'_a}x'_a = pf(x').$$

Ferner gilt für die Gleichungen (3.) das Integral

$$(10.)\qquad f(x') = f_0(x'(0)) = h,$$

und die Function S lässt sich ohne Integralzeichen, wie folgt, darstellen

$$S = \int_{t_0}^{t} h\,dt = h(t-t_0).$$

Unter diesen Verhältnissen nimmt daher die Gleichung (9.) die folgende Gestalt an

$$\delta((t-t_0)h) + (p-1)h\delta t = \sum_a \frac{\partial f(x')}{\partial x'_a}\delta x_a - \sum_a \frac{\partial f_0(x'(0))}{\partial x'_a(0)}\delta x_a(0).$$

Man kann nun die Frage aufwerfen, durch welchen Factor die linke Seite dieser Gleichung, welche nur die Bestandtheile $(t-t_0)$ und h enthält, ein vollständiges Differential werde. Es ergiebt sich, dass durch Hinzufügung des Factors $(t-t_0)^{p-1}$ das Differential $\delta((t-t_0)^p h)$ entsteht. So gelangt man zu der Relation

$$(11.)\qquad \delta((t-t_0)^p h) = (t-t_0)^{p-1}\sum_a \frac{\partial f(x')}{\partial x'_a}\delta x_a - (t-t_0)^{p-1}\sum_a \frac{\partial f_0(x'(0))}{\partial x'_a(0)}\delta x_a(0).$$

Dieselbe erhält ihre eigenthümliche Bedeutung abermals durch die Homogeneität der Function $f(x')$. Denn weil $(t-t_0)x'_a = v_a$, $(t-t_0)x'_a(0) = u_a$ ist, so hat man

$$(t-t_0)^p f(x') = f(v), \qquad (t-t_0)^{p-1} \frac{\partial f(x')}{\partial x'_a} = \frac{\partial f(v)}{\partial v_a},$$

$$(t-t_0)^p f_0(x') = f_0(u), \qquad (t-t_0)^{p-1} \frac{\partial f_0(x'(0))}{\partial x'_a(0)} = \frac{\partial f_0(u)}{\partial u_a}.$$

In Folge der Gleichung (10.) ist also

$$(10^a.) \qquad (t-t_0)^p h = f(v) = f_0(u),$$

und die Gleichung (11.) verwandelt sich in die Gestalt

$$(12.) \quad \delta f(v) = \delta f_0(u) = \sum_a \frac{\partial f(v)}{\partial v_a} \delta x_a - \sum_a \frac{\partial f_0(u)}{\partial u_a} \delta x_a(0).$$

Diese Gleichung, in welcher die Grössen u_c und v_c als abhängig von den Elementen x_a und $x_a(0)$ aufgefasst werden, ist das Werkzeug, welches zum Studium des Normaltypus $\varphi(du)$ gebraucht werden wird.

3.

Da die Gleichung (7.) aus der Gleichung (5.) entsteht, indem jedes du_b durch u_b und gleichzeitig jedes dx_a durch v_a ersetzt wird, so erhält man aus jeder Relation zwischen den Differentialen dx_a und du_b eine neue Relation, indem man v_a für x_a und u_b für du_b substituirt. Das Ergebniss einer solchen Substitution von u_b statt du_b in einem Ausdruck $F(du)$ möge mit $[F(du)]$ bezeichnet werden. Dann folgt aus der Definitionsgleichung des Normaltypus (4.), und der Gleichung (10^a.) die Gleichung

$$(13.) \qquad f(v) = f_0(u) = [\varphi(du)].$$

Dieselbe liefert einen Ausdruck für die Ableitung $\frac{\partial f_0(u)}{\partial u_a}$, wenn man $\varphi(du)$ als abhängig von den $2n$ Elementen u_a und du_b betrachtet, und die letztern durch die Gleichungen $du_b = u_b$ bestimmt denkt,

$$(14.) \qquad \frac{\partial f_0(u)}{\partial u_a} = \left[\frac{\partial \varphi(du)}{\partial u_a}\right] + \left[\frac{\partial \varphi(du)}{\partial\, du_a}\right].$$

Zu einem anderen Ausdrucke führt die Gleichung (12.). Nimmt man in derselben die Elemente $x_a(0)$ als constant an, so wird

$$\delta f_0(u) = \sum_b \frac{\partial f(v)}{\partial v_b} \delta x_b,$$

und deshalb

$$(15.) \qquad \frac{\partial f_0(u)}{\partial u_a} = \sum_b \frac{\partial f(v)}{\partial v_b} \frac{\partial x_b}{\partial u_a}.$$

Nun folgt aus (4.) unmittelbar

$$\frac{\partial \varphi(du)}{\partial du_a} = \sum_b \frac{\partial f(dx)}{\partial dx_b} \frac{\partial x_b}{\partial u_a},$$

und vermöge der vorhin gemachten Bemerkung

$$\left[\frac{\partial \varphi(du)}{\partial du_a}\right] = \sum_b \frac{\partial f(v)}{\partial v_b} \frac{\partial x_b}{\partial u_a}.$$

Es ist daher

$$(16.) \quad \frac{\partial f_0(u)}{\partial u_a} = \left[\frac{\partial \varphi(du)}{\partial du_a}\right]$$

und wegen (14.) ergiebt sich

$$(17.) \quad \left[\frac{\partial \varphi(du)}{\partial u_a}\right] = 0.$$

Indem man die so eben erhaltenen Gleichungen nach u_b partiell differentiirt, und beachtet, dass die Indices a und b mit gleichen Rechten auftreten, so bekommt man die neuen Relationen

$$(18.) \quad \begin{cases} \left[\frac{\partial^2 \varphi(du)}{\partial u_a \partial u_b}\right] + \left[\frac{\partial^2 \varphi(du)}{\partial u_a \partial du_b}\right] = 0, \\ \left[\frac{\partial^2 \varphi(du)}{\partial u_a \partial u_b}\right] + \left[\frac{\partial^2 \varphi(du)}{\partial du_a \partial u_b}\right] = 0, \end{cases}$$

und

$$(19.) \quad \begin{cases} \frac{\partial^2 f_0(u)}{\partial u_a \partial u_b} = +\left[\frac{\partial^2 \varphi(du)}{\partial du_a \partial u_b}\right] + \left[\frac{\partial^2 \varphi(du)}{\partial du_a \partial du_b}\right], \\ \frac{\partial^2 f_0(u)}{\partial u_a \partial u_b} = -\left[\frac{\partial^2 \varphi(du)}{\partial u_a \partial u_b}\right] + \left[\frac{\partial^2 \varphi(du)}{\partial du_a \partial du_b}\right]. \end{cases}$$

Wenn man in der Gleichung (12.) sowohl die Elemente x_a als die Elemente $x_a(0)$ als variabel ansieht, so kommen für die ersten Ableitungen der Function $f_0(u) = f(v)$ nach x_a und $x_b(0)$ beziehungsweise die Ausdrücke $\frac{\partial f(v)}{\partial v_a}$ und $-\frac{\partial f_0(u)}{\partial u_b}$. Denselben entsprechen zwei Darstellungen der zweiten nach x_a und $x_b(0)$ genommenen Ableitungen von $f_0(u) = f(v)$. Bei diesen Darstellungen kommt in Betracht, dass die Coefficienten der Form $f(dx)$ von den Elementen $x_b(0)$, die Coefficienten der Form $f_0(dx)$ von den Elementen x_a unabhängig sind; die Gleichsetzung der beiden Ausdrücke giebt das Resultat

$$(20.) \; \frac{\partial^2 f(v)}{\partial v_a \partial v_1} \frac{\partial v_1}{\partial x_b(0)} + \cdots + \frac{\partial^2 f(v)}{\partial v_a \partial v_n} \frac{\partial v_n}{\partial x_b(0)} = -\left(\frac{\partial^2 f_0(u)}{\partial u_b \partial u_1} \frac{\partial u_1}{\partial x_a} + \cdots + \frac{\partial^2 f_0(u)}{\partial u_b \partial u_n} \frac{\partial u_n}{\partial x_a}\right).$$

Aus den n^2 Gleichungen, welche in dieser Formel enthalten sind, weil a und b alle Zahlen von 1 bis n bedeuten, folgt die Determinantengleichung

$$\left|\frac{\partial^2 f(v)}{\partial v_a \partial v_c}\right| \cdot \left|\frac{\partial v_c}{\partial x_b(0)}\right| = (-1)^n \left|\frac{\partial^2 f_0(u)}{\partial u_b \partial u_b}\right| \cdot \left|\frac{\partial u_b}{\partial x_a}\right|.$$

Wenn man sich die x_a als abhängig von den u_b und $x_b(0)$, die $x_b(0)$ als abhängig von den v_c und x_c denkt, so hat man ferner die bekannten Gleichungen

$$\left|\frac{\partial v_c}{\partial x_b(0)}\right| \cdot \left|\frac{\partial x_b(0)}{\partial v_c}\right| = 1, \qquad \left|\frac{\partial u_b}{\partial x_a}\right| \cdot \left|\frac{\partial x_a}{\partial u_b}\right| = 1.$$

Durch die Anwendung derselben kommt

$$\left|\frac{\partial^2 f(v)}{\partial v_a \partial v_c}\right| \cdot \left|\frac{\partial x_a}{\partial u_b}\right| = (-1)^n \left|\frac{\partial^2 f_0(u)}{\partial u_b \partial u_b}\right| \cdot \left|\frac{\partial x_b(0)}{\partial v_c}\right|,$$

und durch Quadrirung der beiden Seiten entsteht die Gleichung

$$(21.) \qquad \frac{\left|\frac{\partial^2 f(v)}{\partial v_a \partial v_c}\right| \cdot \left|\frac{\partial x_a}{\partial u_b}\right|^2}{\left|\frac{\partial^2 f_0(u)}{\partial u_b \partial u_b}\right|} = \frac{\left|\frac{\partial^2 f_0(u)}{\partial u_b \partial u_b}\right| \cdot \left|\frac{\partial x_b(0)}{\partial v_c}\right|^2}{\left|\frac{\partial^2 f(v)}{\partial v_a \partial v_c}\right|}.$$

Es ist oben darauf aufmerksam gemacht worden, dass bei der Vertauschung jedes Elements x_c mit dem entsprechenden $x_c(0)$ jede Grösse u_g in die entsprechende $-v_g$ verwandelt wird. Unter dieser Voraussetzung verwandelt sich also $f(v)$ in $(-1)^p f_0(u)$, $f_0(u)$ in $(-1)^p f(v)$, $\frac{\partial x_a}{\partial u_b}$ in $-\frac{\partial x_a(0)}{\partial v_b}$, und die linke Seite der Gleichung (21.) in die rechte Seite derselben. Diese Gleichung drückt daher den Satz aus, dass der Quotient

$$\frac{\left|\frac{\partial^2 f(v)}{\partial v_a \partial v_c}\right| \cdot \left|\frac{\partial x_a}{\partial u_b}\right|^2}{\left|\frac{\partial^2 f_0(u)}{\partial u_b \partial u_b}\right|}$$

bei der Vertauschung der Elemente x_c und $x_c(0)$ in seinem Werthe unverändert bleibt.

Eine neue Beziehung zwischen den v_a und u_b ergiebt sich daraus, dass die $x_b(0)$ als abhängig von den v_a und x_a betrachtet werden. Wenn man nämlich, um $x'_b(0)$ zu bilden, nach der Abhängigkeit der Grösse $x_b(0)$ von der Grösse t_0 fragt, so leuchtet es ein, dass die Elemente x_a ohne Einfluss sind, während die Elemente $v_a = (t-t_0)\frac{dx_a}{dt}$ in Betracht kommen. So entsteht die Gleichung

$$\frac{dx_b(0)}{dt_0} = \frac{\partial x_b(0)}{\partial v_1}\frac{dv_1}{dt_0} + \cdots + \frac{\partial x_b(0)}{\partial v_n}\frac{dv_n}{dt_0}.$$

Nun ist $\frac{dx_b(0)}{dt_0} = x'_b(0) = \frac{u_b}{t-t_0}$, dagegen $\frac{dv_c}{dt_0} = -\frac{dx_c}{dt} = -\frac{v_c}{t-t_0}$, und daher ergiebt sich die Gleichung

$$(22.) \qquad -u_b = \frac{\partial x_b(0)}{\partial v_1}v_1 + \cdots + \frac{\partial x_b(0)}{\partial v_n}v_n.$$

Aus derselben folgt durch Auflösen nach den v_a die Gleichung

$$-v_a = \frac{\partial v_a}{\partial x_1(0)} u_1 + \frac{\partial v_a}{\partial x_2(0)} u_2 + \cdots + \frac{\partial v_a}{\partial x_n(0)} u_n,$$

welche in ihrer Form mit der Gleichung (7.) übereinstimmt. Man ist indessen nicht berechtigt, hieraus den Schluss zu ziehen, dass der Coefficient $\frac{\partial x_a}{\partial u_c}$ dem Coefficienten $-\frac{\partial v_a}{\partial x_c(0)}$ gleich sei. Prüft man diese Voraussetzung durch die Gleichung (20.), so findet man dieselbe nicht bestätigt.

4.

Um die bisher angestellten Beobachtungen für die Ergründung von Eigenschaften des Normaltypus zu verwerthen, spreche ich den Inhalt der Gleichungen (6.) und (13.) so aus, dass die Differenz

$$\varphi(du) - f_0(du)$$

immer verschwindet, sobald die sämmtlichen Variabeln u_a gleich Null gesetzt werden, und auch verschwindet, sobald jedes Differential du_b durch das entsprechende Element u_b ersetzt wird. Auf diese Differenz wird das Augenmerk vornehmlich zu richten sein. Eine Haupteigenschaft derselben besteht darin, dass jede nach einem Differential du_a genommene erste Ableitung derselben ebenfalls verschwindet, wenn man jedes Differential du_b durch das correspondirende u_b ersetzt. Dies lehrt die Gleichung (16.), wofern man derselben die Gestalt giebt

$$(23.)\quad \left[\frac{\partial \varphi(du)}{\partial du_a} - \frac{\partial f_0(du)}{\partial du_a}\right] = 0.$$

Im Fortgange der Untersuchung wird sich herausstellen, dass die Differenz $\varphi(du) - f_0(du)$ in genauer Beziehung steht zu der Differenz

$$f_0(du) - (d\sqrt[p]{f_0(u)})^p.$$

Diese Differenz hat auch die Eigenschaft, dass jede nach einem Differential du_a genommene Ableitung derselben durch die in Rede stehende Substitution gleich Null wird. Denn es ist zunächst

$$(d\sqrt[p]{f_0(u)})^p = p^{-p}(f_0(u))^{1-p}(d f_0(u))^p,$$

$$\frac{\partial (d\sqrt[p]{f_0(u)})^p}{\partial du_a} = p^{-p}(f_0(u))^{1-p} p (d f_0(u))^{p-1} \frac{\partial f_0(u)}{\partial u_a}.$$

Substituirt man du_b für u_b, so wird

$$\frac{\partial f_0(du)}{\partial du_a} = \frac{\partial f_0(u)}{\partial u_a} \quad \text{und} \quad d f_0(u) = p f_0(u),$$

und es resultirt die zu beweisende Gleichung

$$(24.)\qquad \left[\frac{\partial f_0(du)}{\partial du_a} - \frac{\partial (d\sqrt[p]{f_0(u)})^p}{\partial du_a}\right] = 0.$$

Aus der Verbindung von (23.) und (24.) folgt dann die Gleichung

$$(25.)\qquad \left[\frac{\partial \varphi(du)}{\partial du_a} - \frac{\partial (d\sqrt[p]{f_0(u)})^p}{\partial du_a}\right] = 0,$$

welche ausdrückt, dass die erwähnte Eigenschaft der Differenz

$$\varphi(du) - (d\sqrt[p]{f_0(u)})^p$$

gleichfalls zukommt.

5.

Die Einführung der Normalvariabeln wird jetzt zu einer Umformung der zweiten Variation des Integrals $S = \int_{t_0}^{t} f(x')\,dt$ verwendet werden. Eine dem Zwecke der Variationsrechnung entsprechende Umformung ist eine solche, die zu erkennen gestattet, wann die zweite Variation ein unveränderliches Vorzeichen habe und wann nicht. Da die Grenzen des Integrals als fest betrachtet werden, so kommt es darauf an, die zweite Variation der Function, die sich unter dem Integralzeichen befindet, unter Berücksichtigung des integrirten Systems von Differentialgleichungen (3.) als ein Aggregat einer quadratischen Form von n unabhängigen Elementen und eines vollständigen nach t genommenen Differentialquotienten darzustellen. Der zweite Bestandtheil muss nach Ausführung der auf t bezüglichen Integration den Beitrag Null liefern; die quadratische Form, falls sie von unveränderlichem Vorzeichen ist, bestimmt das zu ermittelnde Vorzeichen der zweiten Variation des in Rede stehenden Integrals. Eine genaue Erwägung verdient der Umstand, dass bei der Bildung der in Rede stehenden zweiten Variation die zweiten Variationen der Elemente x_a und x'_a als verschwindend betrachtet werden. Bezeichnet man die in dieser Weise genommene zweite Variation von $f(x')$ mit $(\delta^2 f(x'))$, die vollständige zweite Variation mit $\delta^2 f(x')$, so besteht zwischen diesen Ausdrücken die Gleichung

$$\delta^2 f(x') = (\delta^2 f(x')) + \sum_a \frac{\partial f(x')}{\partial x_a}\delta^2 x_a + \sum_a \frac{\partial f(x')}{\partial x'_a}\delta^2 x'_a.$$

Wenn nun durch die Einführung eines Systems von neuen Variabeln y_t die Form $f(dx)$ in die Form $g(dy)$ übergeht, so wird $\delta^2 f(x') = \delta^2 g(y')$; welche Beziehung besteht aber zwischen den einander entsprechenden Ausdrücken

$(\delta^2 f(x'))$ und $(\delta^2 g(y'))$? Die Antwort auf diese Frage ergiebt sich, wenn man die vorstehende Gleichung in die folgende Gestalt bringt

$$\delta^2 f(x') = (\delta^2 f(x')) + \sum_a \left(\frac{\partial f(x')}{\partial x_a} - \frac{d \frac{\partial f(x')}{\partial x'_a}}{dt} \right) \delta^2 x_a + \frac{d \sum_a \frac{\partial f(x')}{\partial x'_a} \delta^2 x_a}{dt}.$$

Wegen des Systems von Differentialgleichungen (3.) wird der Factor von $\delta^2 x_a$ in dem zweiten Summanden der rechten Seite gleich Null, und es leuchtet ein, dass die Differenz $(\delta^2 f(x')) - (\delta^2 g(y'))$ gleich ist dem vollständigen Differentialquotienten

$$\frac{-d \sum_a \frac{\partial f(x')}{\partial x'_a} \delta^2 x_a}{dt} + \frac{d \sum_t \frac{\partial g(y')}{\partial y'_t} \delta^2 y_t}{dt}.$$

Um dieser Ursache willen schliesst die auszuführende Umformung der zweiten Variation ein Resultat in sich, welches von der Wahl der Variabeln des isoperimetrischen Problems unabhängig ist.

Die Einführung der Normalvariabelen u_b zieht die Gleichung $f(dx) = \varphi(du)$ nach sich; stellt man bei der Integration der isoperimetrischen Differentialgleichungen die Bedingung auf, dass für $t = t_0$ die Variabelen u_b sämmtlich gleich Null werden, die Differentialquotienten $\frac{du_b}{dt}$ gegebenen Constanten $u'_b(0)$ gleich werden sollen, so folgt aus der Definition der Normalvariabelen die Bestimmung

$$u_b = (t - t_0) u'_b(0).$$

Die zweite Variation des Ausdrucks $\varphi(u')$, deren Transformation ausgeführt werden soll, wird alsdann folgendermassen explicite dargestellt

$$(26.) \quad \begin{cases} (\delta^2 \varphi(u')) \\ = \sum_{a,b} \left(\frac{\partial^2 \varphi(u')}{\partial u_a \partial u_b} \delta u_a \delta u_b + \frac{\partial^2 \varphi(u')}{\partial u_a \partial u'_b} \delta u_a \delta u'_b + \frac{\partial^2 \varphi(u')}{\partial u'_a \partial u_b} \delta u'_a \delta u_b + \frac{\partial^2 \varphi(u')}{\partial u'_a \partial u'_b} \delta u'_a \delta u'_b \right). \end{cases}$$

Die zweiten Ableitungen von $\varphi(u')$, die hier auftreten, unterscheiden sich von den entsprechenden Ableitungen in den Formeln (18.) und (19.), bei denen respective du_b statt u'_b steht, nur durch eine leicht angebbare Potenz von $(t - t_0)$ als Factor. Denn dort muss du_b immer durch u_b ersetzt werden, und hier ist $u'_b = (t - t_0)^{-1} u_b$. Eine mit Hülfe der vorhandenen allgemeinen Methoden gebildete Umformung der zweiten Variation (26.) kann nunmehr direct abgeleitet werden, indem man vermöge der erwähnten Formeln (19.) die Ableitungen $\frac{\partial^2 \varphi(u')}{\partial u_a \partial u_b}$ und $\frac{\partial^2 \varphi(u')}{\partial u_a \partial u'_b}$ durch die Ableitungen $\frac{\partial^2 \varphi(u')}{\partial u'_a \partial u'_b}$ und

$\frac{\partial^2 f_0(u)}{\partial u_a \partial u_b}$ ausdrückt. Es findet sich

$$\frac{\partial^2 \varphi(u')}{\partial u_a \partial u_b} = (t-t_0)^{-2} \frac{\partial^2 \varphi(u')}{\partial u'_a \partial u'_b} - (t-t_0)^{-p} \frac{\partial^2 f_0(u)}{\partial u_a \partial u_b},$$

$$\frac{\partial^2 \varphi(u')}{\partial u'_a \partial u_b} = -(t-t_0)^{-1} \frac{\partial^2 \varphi(u')}{\partial u'_a \partial u'_b} + (t-t_0)^{-p+1} \frac{\partial^2 f_0(u)}{\partial u_a \partial u_b},$$

$$\frac{\partial^2 \varphi(u')}{\partial u_a \partial u'_b} = -(t-t_0)^{-1} \frac{\partial^2 \varphi(u')}{\partial u'_a \partial u'_b} + (t-t_0)^{-p+1} \frac{\partial^2 f_0(u)}{\partial u_a \partial u_b},$$

und deshalb ist

$$(\delta^2 \varphi(u')) = \sum_{a,b} \frac{\partial^2 \varphi(u')}{\partial u'_a \partial u'_b} ((t-t_0)^{-2} \delta u_a \delta u_b - (t-t_0)^{-1} (\delta u'_a \delta u_b + \delta u_a \delta u'_b) + \delta u'_a \delta u'_b)$$
$$+ \sum_{a,b} \frac{\partial^2 f_0(u)}{\partial u_a \partial u_b} (-(t-t_0)^{-p} \delta u_a \delta u_b + (t-t_0)^{-p+1} (\delta u'_a \delta u_b + \delta u_a \delta u'_b)).$$

Man erkennt leicht, dass der Ausdruck $(t-t_0)^{-p+2} \frac{\partial^2 f_0(u)}{\partial u_a \partial u_b}$, sobald man die Grössen u_a durch die Variabele t ausdrückt, von der Variabele t unabhängig wird. Daher ergiebt sich die Gleichung

$$\frac{d\left((t-t_0)^{-p+1} \frac{\partial^2 f_0(u)}{\partial u_a \partial u_b} \delta u_a \delta u_b\right)}{dt}$$
$$= (t-t_0)^{-p+2} \frac{\partial^2 f_0(u)}{\partial u_a \partial u_b} (-(t-t_0)^{-2} \delta u_a \delta u_b + (t-t_0)^{-1} (\delta u'_a \delta u_b + \delta u_a \delta u'_b)),$$

und es entsteht die gesuchte Transformation

$$(27.) \begin{cases} (\delta^2 \varphi(u')) = \\ \sum_{a,b} \frac{\partial^2 \varphi(u')}{\partial u'_a \partial u'_b} (\delta u'_a - (t-t_0)^{-1} \delta u_a)(\delta u'_b - (t-t_0)^{-1} \delta u_b) + \frac{d\left((t-t_0)^{-p+1} \sum_{a,b} \frac{\partial^2 f_0(u)}{\partial u_a \partial u_b} \delta u_a \delta u_b\right)}{dt}. \end{cases}$$

Aus der Gleichung

$$\frac{\partial^2 \varphi(du)}{\partial du_a \partial du_b} = \sum_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} \frac{\partial^2 f(dx)}{\partial dx_{\mathfrak{a}} \partial dx_{\mathfrak{b}}} \frac{\partial x_{\mathfrak{a}}}{\partial u_a} \frac{\partial x_{\mathfrak{b}}}{\partial u_b}$$

folgt für die Coefficienten der quadratischen Form $\sum_{a,b} \frac{\partial^2 \varphi(u')}{\partial u'_a \partial u'_b} \eta_a \eta_b$ die Bestimmung

$$(t-t_0)^{p-2} \frac{\partial^2 \varphi(u')}{\partial u'_a \partial u'_b} = \sum_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} \frac{\partial^2 f(v)}{\partial v_{\mathfrak{a}} \partial v_{\mathfrak{b}}} \frac{\partial x_{\mathfrak{a}}}{\partial u_a} \frac{\partial x_{\mathfrak{b}}}{\partial u_b}.$$

Diese liefert aber die Determinantengleichung

$$(28.) \quad \left| (t-t_0)^{p-2} \frac{\partial^2 \varphi(u')}{\partial u'_a \partial u'_b} \right| = \left| \frac{\partial^2 f(v)}{\partial v_{\mathfrak{a}} \partial v_{\mathfrak{b}}} \right| \cdot \left| \frac{\partial x_{\mathfrak{a}}}{\partial u_a} \right|^2,$$

deren rechte Seite identisch ist mit dem Zähler des Quotienten, der sich auf der linken Seite der Gleichung (21.) befindet. Der Nenner dieses Quotienten ist dagegen die Determinante der quadratischen Form $\sum_{a,b} \frac{\partial^2 f_0(u)}{\partial u_a \partial u_b} \delta u_a \delta u_b$.
In der Formel (27.) setzt man voraus, dass die Ausdrücke $(t-t_0)^{-1}\delta u_a$ auch für $t = t_0$ endlich bleiben; dem Festhalten der Grenzen des Integrals S entspricht das Verschwinden der Variationen der Variabeln für die Grenzen des Integrals.

6.

In den bisherigen Untersuchungen war der Grad p der Form $f(dx)$ gleich einer beliebigen die Einheit übertreffenden Zahl; von hier ab soll p den Werth *zwei* erhalten. Für die quadratischen Formen $f(dx)$ und $\varphi(du)$ bediene ich mich der Bezeichnungen

$$(29.)\quad \begin{cases} 2f(dx) = \sum_{a,b} a_{a,b}\, dx_a\, dx_b, & |a_{a,b}| = \Delta, \quad \frac{\partial \Delta}{\partial a_{a,b}} = A_{a,b}, \\ 2\varphi(du) = \sum_{t,\iota} p_{t,\iota}\, du_t\, du_\iota, & |p_{t,\iota}| = \Pi, \quad \frac{\partial \Pi}{\partial p_{t,\iota}} = P_{t,\iota}, \\ 2f_0(dx) = \sum_{a,b} a_{a,b}(0)\, dx_a\, dx_b, & |a_{a,b}(0)| = \Delta(0), \quad \frac{\partial \Delta(0)}{\partial a_{a,b}(0)} = A_{a,b}(0). \end{cases}$$

Die in der Gleichung (23.) ausgesprochene Eigenschaft der Differenz $\varphi(du) - f_0(du)$ ist demnach in der Gleichung

$$(30.)\quad \sum_b (p_{a,b} - a_{a,b}(0))\, u_b = 0$$

enthalten. Unter der Voraussetzung $n=2$ und $n=3$ kann man die Bedeutung dieser Gleichung und der eingeführten Begriffe überhaupt durch eine geometrische Interpretation versinnlichen.

Bei $n=2$ sei das Quadrat des Linearelements einer in den independenten Coordinaten x_1 und x_2 dargestellten Fläche

$$2f(dx) = a_{1,1}\, dx_1^2 + 2a_{1,2}\, dx_1\, dx_2 + a_{2,2}\, dx_2^2.$$

Auf dieser Fläche gehe von dem Punkte $(x_1(0), x_2(0))$ eine kürzeste Linie aus, deren Anfangselement mit dem Element dx_1 den Winkel Φ bildet, und deren Länge bis zu dem Punkte (x_1, x_2) gemessen, gleich r ist. Alsdann bestehen zwischen den Grössen r, Φ und den obigen Grössen u_a die folgenden Beziehungen

$$\sqrt{2f_0(u)} = r, \qquad \frac{\sqrt{\Delta_0}\, u_2}{a_{1,1}(0) u_1 + a_{1,2}(0) u_2} = \operatorname{tg} \Phi,$$

aus denen die Gleichung

$$\frac{\sqrt{\Delta_0}(u_1 du_2 - u_2 du_1)}{2f_0(u)} = \frac{\sqrt{f_0(du) - (d\sqrt{f_0(u)})^2}}{\sqrt{f_0(u)}} = d\Phi$$

abgeleitet wird. Man sieht, dass die Verbindung $f_0(du) - (d\sqrt{f_0(u)})^2$ gleich dem Producte des Quadrates von dem Ausdruck $(u_1 du_2 - u_2 du_1)$ in einen endlichen Factor ist. Diese Eigenschaft muss aber vermöge bekannter Sätze bei jeder quadratischen Form der zwei Differentiale du_a auftreten, deren erste Ableitungen nach du_a durch die Substitution von u_b für du_b verschwinden, also auch bei der Differenz $\varphi(du) - f_0(du)$ und der Differenz $\varphi(du) - (d\sqrt{f_0(u)})^2$. Aus dieser Ursache hat der Quotient

$$\frac{\varphi(du) - (d\sqrt{f_0(u)})^2}{f_0(du) - (d\sqrt{f_0(u)})^2}$$

einen von den Differentialen du_b unabhängigen Werth. Wird derselbe mit $\frac{m^2}{2f_0(u)}$ bezeichnet, so stellen die Gleichungen

$$f(dx) = \varphi(du),$$
$$2\varphi(du) = dr^2 + m^2 d\Phi^2$$

diejenige Transformation von dem Quadrate des Linearelements der gegebenen Fläche dar, welche *Gauss* in den *disquisitiones generales circa superficies curvas* art. 19. gegeben hat.

Bei $n=3$ seien x_1, x_2, x_3 die rechtwinkligen Coordinaten eines Punktes im Raume, und es sei

$$2f(dx) = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2;$$

dann gelten die Gleichungen $u_a = x_a - x_a(0)$. Wird von dem Punkte $(x_1(0), x_2(0), x_3(0))$ nach dem Punkte (x_1, x_2, x_3) eine gerade Linie gezogen, so ist die Länge r derselben gleich $\sqrt{2f_0(u)}$, die Differenz $\varphi(du) - f_0(du)$ hat den Werth Null, und der Ausdruck

$$f_0(u)(f_0(du) - (d\sqrt{f_0(u)})^2)$$

bedeutet das Quadrat von dem Flächenraume desjenigen ebenen Dreiecks, dessen Ecken die drei Punkte $(x_1(0), x_2(0), x_3(0))$, (x_1, x_2, x_3), $(x_1+dx_1, x_2+dx_2, x_3+dx_3)$ sind.

Die Gleichung (30.) eröffnet bei den quadratischen Formen von n Differentialen eine neue Verbindung zwischen dem Normaltypus und der quadrilinearen Form $\Psi(\overset{1}{dx}, \overset{1}{\delta x}, dx, \delta x)$; diese Form ist Bd. LXX, pag. 83 definirt, von Herrn *Christoffel* Bd. LXX, pag. 58 unter der Benennung G_4 eingeführt.

Ehe ich zu dem Nachweise jener Verbindung übergehe, werde ich in Bezug auf die Gestalt der Function Ψ und der mehrfach linearen Ausdrücke, die Herr *Christoffel* aus derselben abgeleitet hat, einige Bemerkungen einschalten. Es sei, wie früher

$$(31.)\quad \begin{cases} f_{\mathfrak{a},\mathfrak{g},\mathfrak{b}} = \dfrac{\partial a_{\mathfrak{a},\mathfrak{g}}}{\partial x_{\mathfrak{b}}} + \dfrac{\partial a_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}}{\partial x_{\mathfrak{g}}} - \dfrac{\partial a_{\mathfrak{g},\mathfrak{b}}}{\partial x_{\mathfrak{a}}}, \\ f_{\mathfrak{a}}(dx) = \frac{1}{2}\sum\limits_{\mathfrak{g},\mathfrak{b}} f_{\mathfrak{a},\mathfrak{g},\mathfrak{b}}\, dx_{\mathfrak{g}}\, dx_{\mathfrak{b}}; \end{cases}$$

man bezeichne die aus $f(dx)$ und $f_{\mathfrak{a}}(dx)$ gebildeten bilinearen Formen folgendermassen

$$(32.)\quad \begin{cases} f(dx, \overset{1}{d}x) = \frac{1}{2}\sum\limits_{\mathfrak{b}} \dfrac{\partial f(dx)}{\partial dx_{\mathfrak{b}}} \overset{1}{d}x_{\mathfrak{b}} = \frac{1}{2}\sum\limits_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} a_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}\, dx_{\mathfrak{a}} \overset{1}{d}x_{\mathfrak{b}}, \\ f_{\mathfrak{a}}(dx, \overset{1}{d}x) = \frac{1}{2}\sum\limits_{\mathfrak{b}} \dfrac{\partial f_{\mathfrak{a}}(dx)}{\partial dx_{\mathfrak{b}}} \overset{1}{d}x_{\mathfrak{b}} = \frac{1}{2}\sum\limits_{\mathfrak{g},\mathfrak{b}} f_{\mathfrak{a},\mathfrak{g},\mathfrak{b}}\, dx_{\mathfrak{g}} \overset{1}{d}x_{\mathfrak{b}}, \end{cases}$$

dann giebt die Variation mittelst der drei Charakteristiken d, $\overset{1}{d}$, δ die Gleichung

$$(33.)\quad -\delta f(dx, \overset{1}{d}x) + df(\delta x, \overset{1}{d}x) + \overset{1}{d}f(\delta x, dx) = \sum_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} a_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}\, d\overset{1}{d}x_{\mathfrak{b}}\, \delta x_{\mathfrak{a}} + \sum_{\mathfrak{a}} f_{\mathfrak{a}}(dx, \overset{1}{d}x)\, \delta x_{\mathfrak{a}}.$$

Setzt man nun

$$(34.)\quad \sum_{\mathfrak{b}} a_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}\, d\overset{1}{d}x_{\mathfrak{b}} + f_{\mathfrak{a}}(dx, \overset{1}{d}x) = \sum_{\mathfrak{b}} a_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} \big(d\overset{1}{d}x_{\mathfrak{b}} + \xi_{\mathfrak{b}}(dx, \overset{1}{d}x)\big) = \Psi_{\mathfrak{a}}(dx, \overset{1}{d}x),$$

so ist

$$(35.)\quad \xi_{\mathfrak{b}}(dx, \overset{1}{d}x) = \sum_{\mathfrak{c}} \frac{A_{\mathfrak{b},\mathfrak{c}}}{\Delta} f_{\mathfrak{c}}(dx, \overset{1}{d}x),$$

und

$$(36.)\quad -\delta f(dx, \overset{1}{d}x) + df(\delta x, \overset{1}{d}x) + \overset{1}{d}f(\delta x, dx) = \sum_{\mathfrak{a}} \Psi_{\mathfrak{a}}(dx, \overset{1}{d}x)\, \delta x_{\mathfrak{a}}.$$

Vermöge dieser Bezeichnungen liefert die Formel (74^a.) Bd. LXX, pag. 99 dieses Journals die folgende Darstellung der quadrilinearen Form

$$(37.)\quad \begin{cases} \frac{1}{2}\Psi(\overset{1}{d}x, \overset{1}{\delta}x, dx, \delta x) = \sum\limits_{\mathfrak{b}} \big(d\,\Psi_{\mathfrak{b}}(\delta x, \overset{1}{d}x)\overset{1}{\delta}x_{\mathfrak{b}} - \Psi_{\mathfrak{b}}(\delta x, \overset{1}{d}x)\xi_{\mathfrak{b}}(dx, \overset{1}{\delta}x)\big) \\ \qquad - \sum\limits_{\mathfrak{b}} \big(\delta\,\Psi_{\mathfrak{b}}(dx, \overset{1}{d}x)\overset{1}{\delta}x_{\mathfrak{b}} - \Psi_{\mathfrak{b}}(dx, \overset{1}{d}x)\xi_{\mathfrak{b}}(\delta x, \overset{1}{\delta}x)\big). \end{cases}$$

Aus dieser Darstellung kann man leicht die Thatsache ableiten, dass bei der Transformation der Form $f(dx)$ in eine beliebige andere Form $g(dy)$ die Form Ψ sich in die entsprechende Form mitändert. Setzt man

$$\frac{1}{2}\sum_{\mathfrak{l}} \frac{\partial g(dy)}{\partial dy_{\mathfrak{l}}} \overset{1}{d}y_{\mathfrak{l}} = g(dy, \overset{1}{d}y),$$

so folgt aus der Gleichung $f(dx) = g(dy)$ die Gleichung

$$f(dx, \overset{1}{dx}) = g(dy, \overset{1}{dy}).$$

Mithin lehrt die Gleichung (36.), dass der Ausdruck $\sum_a \Psi_a(dx, \overset{1}{dx})\delta x_a$ ebenfalls zu $f(dx)$ covariant ist. Vergleicht man ferner den Ausdruck

$$\sum_a \Psi_a(dx, \overset{1}{dx})\,\delta x_a = \sum_{a,b} a_{a,b}\,\delta x_a(d\overset{1}{dx}_b + \xi_b(dx, \overset{1}{dx}))$$

mit dem Ausdruck

$$f(\delta x, Dx) = \sum_{a,b} a_{a,b}\,\delta x_a\,Dx_b,$$

so erkennt man, dass ein zu $f(dx)$ covarianter Ausdruck, in welchem ein System von Differentialen Dx_b vorkommt, zu $f(dx)$ covariant bleibt, sobald man jedes Dx_b durch das entsprechende $d\overset{1}{dx}_b + \xi_b(dx, \overset{1}{dx})$ ersetzt. Weil nun zu $f(dx)$ die Ausdrücke

$$d(\sum_b \Psi_b(\delta x, \overset{1}{dx})\overset{1}{\delta x}_b) = \sum_b d\Psi_b(\delta x, \overset{1}{dx})\,\overset{1}{\delta x}_b + \sum_b \Psi_b(\delta x, \overset{1}{dx})\,d\overset{1}{\delta x}_b,$$

$$-\sum_b \Psi_b(\delta x, \overset{1}{dx})\,\overline{D}x_b = -\sum_b \Psi_b(\delta x, \overset{1}{dx})\,d\overset{1}{\delta x}_b - \sum_b \Psi_b(\delta x, \overset{1}{dx})\,\xi_b(dx, \overset{1}{\delta x})$$

covariant sind, so ist es auch ihr Aggregat, und deshalb auch die rechte Seite der Gleichung (37.).

Auf demselben Grunde ruht die Methode des Herrn *Christoffel,* um aus einer mit $f(dx)$ covarianten mehrfach linearen Form

$$F(\overset{1}{dx}, \overset{2}{dx}, \dots \overset{\mu}{dx})$$

eine neue von gleicher Eigenschaft abzuleiten, bei der die Zahl der Systeme von Differentialen um Eins grösser ist. Wenn nämlich $F(\overset{1}{dx}, \overset{2}{dx}, \dots \overset{\mu}{dx})$ zu $f(dx)$ covariant ist, so sind es gleichfalls die Ausdrücke

$$\delta F = \sum_a \frac{\partial F}{\partial x_a}\delta x_a + \sum_{\alpha,a} \frac{\partial F}{\partial \overset{\alpha}{dx}_a}\,\delta \overset{\alpha}{dx}_a,$$

$$-\sum_{\alpha,a} \frac{\partial F}{\partial \overset{\alpha}{dx}_a}\,\overset{\alpha}{D}x_a = -\sum_{\alpha,a} \frac{\partial F}{\partial \overset{\alpha}{dx}_a}\,\delta \overset{\alpha}{dx}_a - \sum_{\alpha,a} \frac{\partial F}{\partial \overset{\alpha}{dx}_a}\,\xi_a(\delta x, \overset{\alpha}{dx}),$$

und darum ist es auch das Aggregat

$$\sum_a \frac{\partial F}{\partial x_a}\delta x_a - \sum_{\alpha,a} \frac{\partial F}{\partial \overset{\alpha}{dx}_a}\,\xi_a(\delta x, \overset{\alpha}{dx}).$$

Hierin besteht aber der von Herrn *Christoffel* Bd. LXX, pag. 57 aufgestellte Satz.

Aus der Gleichung (34.) folgt vermöge der Gleichung (11*.) Bd. LXX, pag. 80

$$\frac{\partial f_{\mathfrak{a}}(dx)}{\partial dx_{\mathfrak{b}}} + \frac{\partial f_{\mathfrak{b}}(dx)}{\partial dx_{\mathfrak{a}}} = 2da_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}$$

die Relation

$$\Psi_{\mathfrak{a}}(dx, \overset{1}{dx}) = d\cdot\sum_{\mathfrak{b}} a_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}\overset{1}{dx}_{\mathfrak{b}} - \tfrac{1}{2}\sum_{\mathfrak{b}} \frac{\partial f_{\mathfrak{b}}(dx)}{\partial dx_{\mathfrak{a}}}\overset{1}{dx}_{\mathfrak{b}},$$

welcher man auch die Gestalt geben kann

$$(38.)\qquad \Psi_{\mathfrak{a}}(dx, \overset{1}{dx}) = d(\sum_{\mathfrak{b}} a_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}\overset{1}{dx}_{\mathfrak{b}}) - \tfrac{1}{2}\sum_{\mathfrak{c},\mathfrak{r}} \frac{A_{\mathfrak{c},\mathfrak{r}}}{\Delta}\frac{\partial f_{\mathfrak{r}}(dx)}{\partial dx_{\mathfrak{a}}}(\sum_{\mathfrak{b}} a_{\mathfrak{c},\mathfrak{b}}\overset{1}{dx}_{\mathfrak{b}}).$$

Dieselbe wird später zur Anwendung kommen.

7.

Der erwähnte Zusammenhang zwischen dem Normaltypus $\varphi(du)$ und der Form $\Psi(\overset{1}{dx}, \overset{1}{\delta x}, dx, \delta x)$ tritt hervor, sobald in dieselbe statt der Differentiale $\overset{1}{dx}_{\mathfrak{a}}$, $dx_{\mathfrak{g}}$ die Ausdrücke $(t-t_0)\frac{dx_{\mathfrak{a}}}{dt} = v_{\mathfrak{a}}$, $(t-t_0)\frac{dx_{\mathfrak{g}}}{dt} = v_{\mathfrak{g}}$ substituirt und dann die Normalvariabelen eingeführt werden. Durch die angegebene Substitution wird die Form $(t-t_0)^2\Psi(x', \overset{1}{\delta x}, x', \delta x)$ abhängig von der Wahl des Anfangssystems $(x_1(0), x_2(0), \ldots x_n(0))$, des Anfangssystems $(x'_1(0), x'_2(0), \ldots x'_n(0))$, und der sich stetig ändernden Grösse $(t-t_0)$; man kann dies auch so ausdrücken, dass für die in die Form Ψ eingehenden Systeme $x_{\mathfrak{a}}$ und $\frac{dx_{\mathfrak{a}}}{dt}$ durch die Integration des isoperimetrischen Problems der Weg vorgezeichnet ist. Es sei nun

$$\Psi(\overset{1}{dx}, \overset{1}{\delta x}, dx, \delta x) = \Theta(\overset{1}{du}, \overset{1}{\delta u}, du, \delta u),$$

so hat man nach Formel (34.) Bd. LXX, pag. 84, wenn dem Ausdruck $f_{\mathfrak{a},\mathfrak{g},\mathfrak{b}}$ der Ausdruck $\varphi_{\mathfrak{a},\mathfrak{g},\mathfrak{b}}$ entspricht, für $\Theta(\overset{1}{du}, \overset{1}{\delta u}, du, \delta u)$ den Ausdruck

$$\Theta(\overset{1}{du}, \overset{1}{\delta u}, du, \delta u) =$$

$$\sum_{\mathfrak{a},\mathfrak{b},\mathfrak{g},\mathfrak{h}}\left(\frac{\partial^2 p_{\mathfrak{a},\mathfrak{g}}}{\partial u_{\mathfrak{b}}\partial u_{\mathfrak{h}}} + \frac{\partial^2 p_{\mathfrak{b},\mathfrak{h}}}{\partial u_{\mathfrak{a}}\partial u_{\mathfrak{g}}} - \frac{\partial^2 p_{\mathfrak{a},\mathfrak{h}}}{\partial u_{\mathfrak{b}}\partial u_{\mathfrak{g}}} - \frac{\partial^2 p_{\mathfrak{b},\mathfrak{g}}}{\partial u_{\mathfrak{a}}\partial u_{\mathfrak{h}}} + \tfrac{1}{2}\sum_{\mathfrak{c},\mathfrak{d}}\frac{P_{\mathfrak{c},\mathfrak{d}}}{\Pi}(\varphi_{\mathfrak{c},\mathfrak{a},\mathfrak{g}}\varphi_{\mathfrak{d},\mathfrak{b},\mathfrak{h}} - \varphi_{\mathfrak{c},\mathfrak{a},\mathfrak{h}}\varphi_{\mathfrak{d},\mathfrak{b},\mathfrak{g}})\right)\overset{1}{du}_{\mathfrak{a}}\overset{1}{\delta u}_{\mathfrak{b}}\,du_{\mathfrak{g}}\,\delta u_{\mathfrak{h}}.$$

Nun ist

$$\psi(v, \overset{1}{\delta x}, v, \delta x) = \Theta(u, \overset{1}{\delta u}, u, \delta u),$$

und der letztere Ausdruck gestattet eine einfachere Darstellung. Neben der Gleichung

$$(30.)\qquad \sum_{\mathfrak{b}}(p_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} - a_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}(0))u_{\mathfrak{b}} = 0$$

liefern die Relationen (19.) die Gleichungen

$$(39.)\quad \begin{cases} p_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} - a_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}(0) = -\sum\limits_{\mathfrak{g}} \dfrac{\partial p_{\mathfrak{a},\mathfrak{g}}}{\partial u_{\mathfrak{b}}} u_{\mathfrak{g}}, \\ p_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} - a_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}(0) = \frac{1}{2}\sum\limits_{\mathfrak{g},\mathfrak{h}} \dfrac{\partial^2 p_{\mathfrak{g},\mathfrak{h}}}{\partial u_{\mathfrak{a}}\partial u_{\mathfrak{b}}} u_{\mathfrak{a}} u_{\mathfrak{b}}. \end{cases}$$

Durch dieselben wird

$$\sum_{\mathfrak{a},\mathfrak{g}} \frac{\partial^2 p_{\mathfrak{a},\mathfrak{g}}}{\partial u_{\mathfrak{b}}\,\partial u_{\mathfrak{h}}} u_{\mathfrak{a}} u_{\mathfrak{g}} = 2(p_{\mathfrak{b},\mathfrak{h}} - a_{\mathfrak{b},\mathfrak{h}}(0)),$$

ferner, weil $-\sum\limits_{\mathfrak{a}} \frac{\partial p_{\mathfrak{a},\mathfrak{h}}}{\partial u_{\mathfrak{b}}} u_{\mathfrak{a}} = p_{\mathfrak{b},\mathfrak{h}} - a_{\mathfrak{b},\mathfrak{h}}(0)$ ist,

$$-\sum_{\mathfrak{a},\mathfrak{g}} \frac{\partial^2 p_{\mathfrak{a},\mathfrak{h}}}{\partial u_{\mathfrak{b}}\,\partial u_{\mathfrak{g}}} u_{\mathfrak{a}} u_{\mathfrak{g}} = \sum_{\mathfrak{g}} \frac{\partial p_{\mathfrak{b},\mathfrak{h}}}{\partial u_{\mathfrak{g}}} u_{\mathfrak{g}} + \sum_{\mathfrak{g}} \frac{\partial p_{\mathfrak{g},\mathfrak{h}}}{\partial u_{\mathfrak{b}}} u_{\mathfrak{g}},$$

$$-\sum_{\mathfrak{a},\mathfrak{g}} \frac{\partial^2 p_{\mathfrak{b},\mathfrak{g}}}{\partial u_{\mathfrak{a}}\partial u_{\mathfrak{h}}} u_{\mathfrak{a}} u_{\mathfrak{g}} = \sum_{\mathfrak{a}} \frac{\partial p_{\mathfrak{b},\mathfrak{h}}}{\partial u_{\mathfrak{a}}} u_{\mathfrak{a}} + \sum_{\mathfrak{a}} \frac{\partial p_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}}{\partial u_{\mathfrak{h}}} u_{\mathfrak{a}}.$$

Deshalb verwandelt sich derjenige Bestandtheil von $\Theta(u, \overset{1}{\delta} u, u, \delta u)$, der die zweiten Ableitungen enthält, in den Ausdruck

$$\sum_{\mathfrak{b},\mathfrak{h}} \Big(\sum_{\mathfrak{a},\mathfrak{g}} \frac{\partial^2 p_{\mathfrak{b},\mathfrak{h}}}{\partial u_{\mathfrak{a}}\partial u_{\mathfrak{g}}} u_{\mathfrak{a}} u_{\mathfrak{g}} + 2\sum_{\mathfrak{a}} \frac{\partial p_{\mathfrak{b},\mathfrak{h}}}{\partial u_{\mathfrak{a}}} u_{\mathfrak{a}}\Big) \overset{1}{\delta} u_{\mathfrak{b}}\, \delta u_{\mathfrak{h}}.$$

Für den andern Bestandtheil von $\Theta(u, \overset{1}{\delta} u, u, \delta u)$ sind die Ausdrücke $\sum\limits_{\mathfrak{a},\mathfrak{g}} \varphi_{\mathfrak{c},\mathfrak{a},\mathfrak{g}} u_{\mathfrak{a}} u_{\mathfrak{g}}$, $\sum\limits_{\mathfrak{a}} \varphi_{\mathfrak{c},\mathfrak{a},\mathfrak{h}} u_{\mathfrak{a}}$, $\sum\limits_{\mathfrak{g}} \varphi_{\mathfrak{b},\mathfrak{h},\mathfrak{g}} u_{\mathfrak{g}}$ zu bilden.

Nach (31.) ist

$$\sum_{\mathfrak{a}} \varphi_{\mathfrak{c},\mathfrak{a},\mathfrak{g}} u_{\mathfrak{a}} = \sum_{\mathfrak{a}} \Big(\frac{\partial p_{\mathfrak{c},\mathfrak{a}}}{\partial u_{\mathfrak{g}}} + \frac{\partial p_{\mathfrak{c},\mathfrak{g}}}{\partial u_{\mathfrak{a}}} - \frac{\partial p_{\mathfrak{a},\mathfrak{g}}}{\partial u_{\mathfrak{c}}}\Big) u_{\mathfrak{a}},$$

und daher wegen (39.)

$$\sum_{\mathfrak{a}} \varphi_{\mathfrak{c},\mathfrak{a},\mathfrak{g}} u_{\mathfrak{a}} = \sum_{\mathfrak{a}} \frac{\partial p_{\mathfrak{c},\mathfrak{g}}}{\partial u_{\mathfrak{a}}} u_{\mathfrak{a}},$$

$$\sum_{\mathfrak{a}} \varphi_{\mathfrak{c},\mathfrak{a},\mathfrak{h}} u_{\mathfrak{a}} = \sum_{\mathfrak{a}} \frac{\partial p_{\mathfrak{c},\mathfrak{h}}}{\partial u_{\mathfrak{a}}} u_{\mathfrak{a}},$$

$$\sum_{\mathfrak{g}} \varphi_{\mathfrak{b},\mathfrak{h},\mathfrak{g}} u_{\mathfrak{g}} = \sum_{\mathfrak{g}} \frac{\partial p_{\mathfrak{b},\mathfrak{h}}}{\partial u_{\mathfrak{g}}} u_{\mathfrak{g}}.$$

Ferner kommt

$$\sum_{\mathfrak{a},\mathfrak{g}} \varphi_{\mathfrak{c},\mathfrak{a},\mathfrak{g}} u_{\mathfrak{a}} u_{\mathfrak{g}} = \sum_{\mathfrak{a},\mathfrak{g}} \frac{\partial p_{\mathfrak{c},\mathfrak{g}}}{\partial u_{\mathfrak{a}}} u_{\mathfrak{a}} u_{\mathfrak{g}},$$

$$\sum_{\mathfrak{a},\mathfrak{g}} \frac{\partial p_{\mathfrak{c},\mathfrak{g}}}{\partial u_{\mathfrak{a}}} u_{\mathfrak{a}} u_{\mathfrak{g}} = -\sum_{\mathfrak{a}} (p_{\mathfrak{c},\mathfrak{a}} - a_{\mathfrak{c},\mathfrak{a}}(0)) u_{\mathfrak{a}};$$

der letzte Ausdruck ist in Folge von (30.) gleich Null, folglich auch der Ausdruck $\sum\limits_{\mathfrak{a},\mathfrak{g}} \varphi_{\mathfrak{c},\mathfrak{a},\mathfrak{g}} u_{\mathfrak{a}} u_{\mathfrak{g}}$. Mithin bekommt der zweite Bestandtheil von $\Theta(u, \overset{1}{\delta} u, u, \delta u)$

den Werth

$$-\frac{1}{2}\sum_{\mathfrak{a},\mathfrak{b},\mathfrak{c},\mathfrak{b},\mathfrak{g},\mathfrak{h}} \frac{P_{\mathfrak{c},\mathfrak{b}}}{\Pi}\frac{\partial p_{\mathfrak{c},\mathfrak{h}}}{\partial u_{\mathfrak{a}}}\frac{\partial p_{\mathfrak{b},\mathfrak{b}}}{\partial u_{\mathfrak{g}}} u_{\mathfrak{a}} u_{\mathfrak{g}} \overset{1}{\delta} u_{\mathfrak{b}} \delta u_{\mathfrak{h}},$$

und die Form $\Theta(u,\overset{1}{\delta}u,u,\delta u)$ bestimmt sich folgendermassen

$$(40.)\quad \begin{cases} \Theta(u,\overset{1}{\delta}u,u,\delta u) \\ = \sum_{\mathfrak{b},\mathfrak{h}}\Big(\sum_{\mathfrak{a},\mathfrak{g}} \frac{\partial^2 p_{\mathfrak{b},\mathfrak{h}}}{\partial u_{\mathfrak{a}}\partial u_{\mathfrak{g}}} u_{\mathfrak{a}} u_{\mathfrak{g}} + 2\sum_{\mathfrak{a}} \frac{\partial p_{\mathfrak{b},\mathfrak{h}}}{\partial u_{\mathfrak{a}}} u_{\mathfrak{a}} - \frac{1}{2}\sum_{\mathfrak{a},\mathfrak{g},\mathfrak{c},\mathfrak{b}} \frac{P_{\mathfrak{c},\mathfrak{b}}}{\Pi}\frac{\partial p_{\mathfrak{c},\mathfrak{b}}}{\partial u_{\mathfrak{a}}}\frac{\partial p_{\mathfrak{b},\mathfrak{b}}}{\partial u_{\mathfrak{g}}} u_{\mathfrak{a}} u_{\mathfrak{g}}\Big)\overset{1}{\delta} u_{\mathfrak{b}} \delta u_{\mathfrak{h}}. \end{cases}$$

Man kann nun diese Darstellung dadurch zusammenziehen, dass man Differentiationen nach der Grösse t einführt. Aus der Definition der Elemente $u_{\mathfrak{a}}$ folgen die Gleichungen

$$\sum_{\mathfrak{a}} \frac{\partial p_{\mathfrak{b},\mathfrak{h}}}{\partial u_{\mathfrak{a}}} u_{\mathfrak{a}} = (t-t_0)\frac{dp_{\mathfrak{b},\mathfrak{h}}}{dt},$$

$$\sum_{\mathfrak{a},\mathfrak{g}} \frac{\partial^2 p_{\mathfrak{b},\mathfrak{h}}}{\partial u_{\mathfrak{a}}\partial u_{\mathfrak{g}}} u_{\mathfrak{a}} u_{\mathfrak{g}} = (t-t_0)^2\frac{d^2 p_{\mathfrak{b},\mathfrak{h}}}{dt^2}.$$

Hieraus entsteht die Gleichung

$$(41.)\quad \begin{cases} \Theta(u,\overset{1}{\delta}u,u,\delta u) = \sum_{\mathfrak{b},\mathfrak{h}}\Big((t-t_0)^2\frac{d^2 p_{\mathfrak{b},\mathfrak{h}}}{dt^2} + 2(t-t_0)\frac{dp_{\mathfrak{b},\mathfrak{h}}}{dt} \\ \qquad - \frac{(t-t_0)^2}{2}\sum_{\mathfrak{c},\mathfrak{b}} \frac{P_{\mathfrak{c},\mathfrak{b}}}{\Pi}\frac{dp_{\mathfrak{c},\mathfrak{b}}}{dt}\frac{dp_{\mathfrak{b},\mathfrak{b}}}{dt}\Big)\overset{1}{\delta} u_{\mathfrak{b}} \delta u_{\mathfrak{h}}. \end{cases}$$

8.

Man ersetze in dem Ausdrucke $\Theta(u,\overset{1}{\delta}u,u,\delta u)$ die Differentiale $\overset{1}{\delta}u_{\mathfrak{b}}$, $\delta u_{\mathfrak{h}}$ durch die Differentiale $du_{\mathfrak{b}}$, $du_{\mathfrak{h}}$, und entwickele die Coefficienten der betreffenden Form $\Theta(u,du,u,du)$ nach den positiven Potenzen der Grössen $u_{\mathfrak{a}}$, so dass $[\Theta(u,du,u,du)]_q$ das Aggregat der Glieder von der Ordnung q ist. In derselben Weise verfahre man mit der Differenz $\varphi(du)-f_0(du)$. Um nun *Aggregate derselben Ordnung in den beiden Entwickelungen* mit einander zu vergleichen, ist zunächst nachzuweisen, dass das Aggregat erster Ordnung für jede Differenz $p_{\mathfrak{t},\mathfrak{l}}-a_{\mathfrak{t},\mathfrak{l}}(0)$, oder der Ausdruck $[p_{\mathfrak{t},\mathfrak{l}}-a_{\mathfrak{t},\mathfrak{l}}(0)]_1$ den Werth Null hat. Da die Grössen $u_{\mathfrak{a}}=(t-t_0)x'_{\mathfrak{a}}(0)$ sind, so ist eine Entwickelung nach den positiven Potenzen der $u_{\mathfrak{a}}$ nichts anderes, als eine Entwickelung nach den positiven Potenzen der einen Variabele $(t-t_0)$, und deshalb

$$(42.)\quad [p_{\mathfrak{t},\mathfrak{l}}-a_{\mathfrak{t},\mathfrak{l}}(0)]_1 = \Big(\frac{dp_{\mathfrak{t},\mathfrak{l}}}{dt}\Big)_{t=t_0}(t-t_0).$$

Die Coefficienten der Normalform $\varphi(du)$ werden vermöge der Definition

durch die Gleichung

$$p_{\mathfrak{k},\mathfrak{l}} = \sum_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} a_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} \frac{\partial x_{\mathfrak{a}}}{\partial u_{\mathfrak{k}}} \frac{\partial x_{\mathfrak{b}}}{\partial u_{\mathfrak{l}}}$$

bestimmt. Die Bildung der Differentialquotienten $\frac{dp_{\mathfrak{k},\mathfrak{l}}}{dt}$ für $t = t_0$ erfordert also die Kenntniss der Differentialquotienten $\frac{d\left(\frac{\partial x_{\mathfrak{a}}}{\partial u_{\mathfrak{k}}}\right)}{dt}$ für $t = t_0$. Zur Darstellung derselben kann man den folgenden Weg einschlagen.

Für die Grössen $x_{\mathfrak{a}}$ gilt bis zu der Ordnung $(t-t_0)^3$ exclusive die Entwickelung

$$x_{\mathfrak{a}} = x_{\mathfrak{a}}(0) + (t-t_0)x'_{\mathfrak{a}}(0) + \frac{(t-t_0)^2}{2} x''_{\mathfrak{a}}(0),$$

wo der Werth von $x''_{\mathfrak{a}}$ aus den isoperimetrischen Differentialgleichungen (3.) zu entnehmen, und in dem betreffenden Ausdrucke $x_{\mathfrak{b}}$, $x'_{\mathfrak{b}}$ durch $x_{\mathfrak{b}}(0)$, $x'_{\mathfrak{b}}(0)$ zu ersetzen ist. Nun hat man $\frac{\partial x_{\mathfrak{a}}}{\partial u_{\mathfrak{k}}} = \frac{\partial x_{\mathfrak{a}}}{(t-t_0)\partial x'_{\mathfrak{k}}(0)}$, und deshalb, wenn $\delta_{\mathfrak{a},\mathfrak{k}}$ wie in art. 1 für 1,0 gebraucht wird,

$$\frac{\partial x_{\mathfrak{a}}}{\partial u_{\mathfrak{k}}} = \delta_{\mathfrak{a},\mathfrak{k}} + \tfrac{1}{2}(t-t_0)\frac{\partial x''_{\mathfrak{a}}(0)}{\partial x'_{\mathfrak{k}}(0)}.$$

Hieraus folgt der gesuchte Ausdruck

$$\left(\frac{d\left(\frac{\partial x_{\mathfrak{a}}}{\partial u_{\mathfrak{k}}}\right)}{dt}\right)_{t=t_0} = \tfrac{1}{2}\frac{\partial x''_{\mathfrak{a}}(0)}{\partial x'_{\mathfrak{k}}(0)}.$$

Der Differentialquotient $\frac{dp_{\mathfrak{k},\mathfrak{l}}}{dt}$ nimmt jetzt bei der Substitution $t = t_0$, weil $\left(\frac{\partial x_{\mathfrak{a}}}{\partial u_{\mathfrak{k}}}\right)_{t=t_0} = \delta_{\mathfrak{a},\mathfrak{k}}$ ist, die Gestalt an

$$\left(\frac{dp_{\mathfrak{k},\mathfrak{l}}}{dt}\right)_{t=t_0} = \left(\frac{da_{\mathfrak{k},\mathfrak{l}}}{dt}\right)_{t=t_0} + \sum_{\mathfrak{a}} a_{\mathfrak{a},\mathfrak{l}}(0)\left(\frac{d\frac{\partial x_{\mathfrak{a}}}{\partial u_{\mathfrak{k}}}}{dt}\right)_{t=t_0} + \sum_{\mathfrak{b}} a_{\mathfrak{k},\mathfrak{b}}(0)\left(\frac{d\frac{\partial x_{\mathfrak{b}}}{\partial u_{\mathfrak{l}}}}{dt}\right)_{t=t_0},$$

oder

$$\left(\frac{dp_{\mathfrak{k},\mathfrak{l}}}{dt}\right)_{t=t_0} = \left(\frac{da_{\mathfrak{k},\mathfrak{l}}}{dt}\right)_{t=t_0} + \tfrac{1}{2}\sum_{\mathfrak{a}} a_{\mathfrak{a},\mathfrak{l}}(0)\frac{\partial x''_{\mathfrak{a}}(0)}{\partial x'_{\mathfrak{k}}(0)} + \tfrac{1}{2}\sum_{\mathfrak{b}} a_{\mathfrak{k},\mathfrak{b}}(0)\frac{\partial x''_{\mathfrak{b}}(0)}{\partial x'_{\mathfrak{l}}(0)}.$$

Vermöge der Formel (31.) erhalten die isoperimetrischen Differentialgleichungen (3.) die Form

$$(3^a.) \qquad \sum_{\mathfrak{b}} a_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} x''_{\mathfrak{b}} + f_{\mathfrak{a}}(x') = 0.$$

Daher ist

$$\sum_{\mathfrak{a}} a_{\mathfrak{a},\mathfrak{l}}(0)\frac{\partial x''_{\mathfrak{a}}(0)}{\partial x'_{\mathfrak{k}}(0)} = -\frac{\partial f_{\mathfrak{l}}(x'(0))}{\partial x'_{\mathfrak{k}}(0)},$$

$$\sum_{\mathfrak{b}} a_{\mathfrak{k},\mathfrak{b}}(0)\frac{\partial x''_{\mathfrak{b}}(0)}{\partial x'_{\mathfrak{l}}(0)} = -\frac{\partial f_{\mathfrak{k}}(x'(0))}{\partial x'_{\mathfrak{l}}(0)},$$

und mit Hülfe der gegen Ende des art. 6 schon angeführten Formel

$$\frac{\partial f_{\mathfrak{a}}(dx)}{\partial dx_{\mathfrak{b}}}+\frac{\partial f_{\mathfrak{b}}(dx)}{\partial dx_{\mathfrak{a}}} = 2da_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}$$

folgt die Gleichung $\left(\frac{dp_{\mathfrak{k},\mathfrak{l}}}{dt}\right)_{t=t_0} = 0$, mithin auch die zu erweisende Gleichung

$$(43.)\quad \left(\frac{dp_{\mathfrak{k},\mathfrak{l}}}{dt}\right)_{t=t_0}(t-t_0) = 0.$$

Diese Relation zieht unmittelbar die Gleichung

$$(44.)\quad [\varphi(du)-f(du)]_1 = 0,$$

und vermöge des Ausdruckes auf der rechten Seite von (41.) die Gleichung

$$(45.)\quad [\Theta(u, du, u, du)]_1 = 0$$

nach sich. Ferner folgt die Gleichung

$$p_{\mathfrak{k},\mathfrak{l}}-a_{\mathfrak{k},\mathfrak{l}} = \left(\frac{d^2p_{\mathfrak{k},\mathfrak{l}}}{dt^2}\right)_{t=t_0}\frac{(t-t_0)^2}{2},$$

die bis zu der Ordnung $(t-t_0)^3$ exclusive gilt, und die Gleichung

$$\frac{dp_{\mathfrak{k},\mathfrak{l}}}{dt} = \left(\frac{d^2p_{\mathfrak{k},\mathfrak{l}}}{dt^2}\right)_{t=t_0}(t-t_0),$$

die bis zu der Ordnung $(t-t_0)^2$ exclusive gilt. Da in der Formel (41.) derjenige Bestandtheil der rechten Seite, welcher in die nach $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{b}$ auszuführende Summe multiplicirt ist, eine höhere Ordnung hat als $(t-t_0)^2$, so gelangt man jetzt zu der Darstellung

$$[\Theta(u, du, u, du)]_2 = \sum_{\mathfrak{k},\mathfrak{b}} 3(t-t_0)^2\left(\frac{d^2p_{\mathfrak{k},\mathfrak{b}}}{dt^2}\right)_{t=t_0} du_{\mathfrak{k}}du_{\mathfrak{b}},$$

welcher die Darstellung

$$[\varphi(du)-f_0(du)]_2 = \sum_{\mathfrak{k},\mathfrak{l}}\frac{(t-t_0)^2}{4}\left(\frac{d^2p_{\mathfrak{k},\mathfrak{l}}}{dt^2}\right)_{t=t_0} du_{\mathfrak{k}}du_{\mathfrak{l}}$$

gegenübersteht. Die Vergleichung dieser Ausdrücke führt zu der beachtenswerthen Relation

$$(46.)\quad [\varphi(du)-f_0(du)]_2 = \tfrac{1}{12}[\Theta(u, du, u, du)]_2.$$

Es ist schon oben bemerkt worden, dass die Function $\Theta(u, \overset{1}{\delta}u, u, \delta u)$ der Function $\Psi(v, \overset{1}{\delta}x, v, \delta x)$ gleich ist. Wenn man daher, um $\Theta(u, du, u, du)$

zu bilden, in der Function $\Psi(v, dx, v, dx)$ die Grössen v_a vermöge der Formel (7.) durch die Grössen u_b, die Differentiale dx_a mittelst der Formel (5.) durch die Differentiale du_b ausdrückt, so erscheint $\Theta(u, du, u, du)$ selbst als homogene Function zweiten Grades der Elemente u_b, und der Ausdruck $[\Theta(u, du, u, du)]_2$ wird erhalten, indem man in dem Factor eines jeden Products $u_b u_c$ die Voraussetzung $t = t_0$ eintreten lässt. Dies geschieht aber dadurch, dass man erstens in den Coefficienten der Form $\Psi(v, dx, v, dx)$ überall x_a durch $x_a(0)$ ersetzt, was durch die Bezeichnung $\Psi_0(v, dx, v, dx)$ angedeutet werden mag, und dass man zweitens in Folge der Gleichung $\left(\frac{\partial x_a}{\partial u_b}\right)_{t=t_0} = \delta_{a,b}$ jedes v_a durch u_a, jedes dx_c durch du_c ersetzt. So kommt die Gleichung

$$(47.)\qquad [\Theta(u, du, u, du)]_2 = \Psi_0(u, du, u, du).$$

Dieselbe liefert, in (46.) substituirt, die neue Gleichung

$$(48.)\qquad [\varphi(du) - f_0(du)] = \tfrac{1}{12}\Psi(u, du, u, du).$$

Dieses ist die Gleichung, welche den Zusammenhang zwischen dem Normaltypus und der quadrilinearen Form Ψ herstellt. Wenn die Form Ψ als bekannt gilt, so wird durch dieselbe der Ausdruck $[\varphi(du) - f_0(du)]_2$ explicite dargestellt; wenn die Definition des Normaltypus vorausgesetzt wird, so erhält man, vermöge der nach den positiven Potenzen der u_a fortschreitenden Entwickelung der Differenz $\varphi(du) - f_0(du)$, eine Definition der Form Ψ.

Für den Fall $n = 2$ ist den Variabeln x_a in art. 6 eine geometrische Bedeutung beigelegt worden. Hält man dieselbe fest, so ergiebt sich zwischen dem *Gauss*ischen Krümmungsmasse k_0 des Punktes $(x_1(0), x_2(0))$ der in Rede stehenden Fläche und der Form $\Psi_0(u, du, u, du)$ die Bd. LXX, pag. 84 nachgewiesene Relation

$$\Psi_0(u, du, u, du) = -2k_0\Delta_0(u_1 du_2 - u_2 du_1)^2;$$

dagegen ist in art. 6 eine Gleichung für das Differential des Winkels Φ aufgestellt worden, aus der man durch Quadriren die Gleichung

$$4f_0(u)\left(f_0(du) - (d\sqrt{f_0(u)})^2\right) = \Delta_0(u_1 du_2 - u_2 du_1)^2$$

erhält. Die Vereinigung dieser Gleichungen bringt für das *Gauss*ische Krümmungsmass k_0 den Ausdruck hervor

$$k_0 = \frac{-\Psi_0(u, du, u, du)}{8f_0(u)(f_0(du) - (d\sqrt{f_0(u)})^2)}.$$

Man kann jetzt denjenigen Begriff in genauere Betrachtung ziehen, den *Riemann* als Erweiterung des Begriffes des *Gauss*ischen Krümmungsmasses gebildet hat.

Es werde für eine beliebige quadratische Form $f(dx)$ von n Differentialen eine Grösse k_0 durch dieselbe Gleichung definirt, die so eben unter der Voraussetzung $n=2$ aufgestellt ist,

$$(49.)\qquad k_0 = \frac{-\Psi_0(u,du,u,du)}{8f_0(u)(f_0(du)-(d\sqrt{f_0(u)})^2)}.$$

Da die Gleichungen $u_a=0$ Integrale des Systems von isoperimetrischen Differentialgleichungen (3.) sind, so geht die Form $\varphi(du)$, wenn man von den Grössen u_a $(n-2)$ beliebige u_r gleich Null setzt, in eine Form von den Differentialen der beiden zurückbleibenden Grössen u_t über. Gleichzeitig verwandelt sich der Ausdruck auf der rechten Seite von (49.) in das Krümmungsmass der Fläche, deren Linearelement in den beiden Variabeln u_t gleich $\sqrt{2\varphi(du)}$ ist, für den Punkt, in welchem diese beiden Variabeln den Werth Null erhalten. *Es wird daher, wenn man sich der Riemannschen Bezeichnung bedient, das Krümmungsmass einer n-fach ausgedehnten Mannichfaltigkeit, deren Linearelement gleich* $\sqrt{2f(dx)}$ *ist, in dem Punkte* $(x_1(0), x_2(0), \dots x_n(0))$, *durch den in* (49.) *definirten Ausdruck* k_0 *analytisch dargestellt. Durch Hinzunahme der Gleichung* (48.) *entsteht hieraus die zweite Darstellung der Grösse* k_0,

$$(50.)\qquad k_0 = -\tfrac{3}{4}\frac{[2\varphi(du)-2f_0(du)]_2}{f_0(u)(f_0(du)-(d\sqrt{f_0(u)})^2)}.$$

Um einen Zweifel über die Definition des Krümmungsmasses einer n-fach ausgedehnten Mannichfaltigkeit auszuschliessen, erkläre ich, dass bei der vorstehenden Erörterung diejenige Definition vorausgesetzt ist, welche *Riemann* in der angeführten Abhandlung in dem Schlusssatze von II. § 3. gegeben hat. Ich gestehe, dass mir die andere Definition, welche sich in II. § 2. befindet, dunkel erschien, bevor ich die Gleichung (50.) gefunden hatte. Man kann die Definition in II. §. 2, sobald die Form $f(dx)$ wesentlich positiv ist, so auslegen, dass sie mit dem Inhalt der Gleichung (50.) übereinstimmt, und diese Auslegung darf deshalb wohl für die richtige gelten.

9.

Der in der Gleichung (21.) enthaltene Satz, dass der Ausdruck

$$\frac{\left|\frac{\partial^2 f(v)}{\partial v_a\,\partial v_c}\right|\cdot\left|\frac{\partial x_a}{\partial u_b}\right|^2}{\left|\frac{\partial^2 f_0(u)}{\partial u_b\,\partial u_b}\right|},$$

als Function der Elemente x_t und $x_t(0)$ aufgefasst, bei der gegenseitigen Vertauschung der Elemente x_t und $x_t(0)$ seinen Werth nicht ändert, vereinfacht sich erheblich, sobald die Form $f(dx)$ eine quadratische ist. Der Zähler des Quotienten wird zufolge der Gleichung (28.) gleich der Determinante $|p_{t,t}| = \Pi$ des Normaltypus $2\varphi(du)$, der Nenner gleich der Determinante $|a_{t,t}(0)| = \Delta_0$ der Form $2f_0(du)$, mithin der Quotient gleich dem Ausdrucke

$$\frac{\Pi}{\Delta_0}.$$

Die erwähnte Eigenschaft dieses Quotienten ist namentlich von Bedeutung für gewisse Classen von quadratischen Formen, deren Complex man als ein *Geschlecht von Formen* bezeichnen kann. *Dieses Geschlecht von Formen hat das charakteristische Merkmal, dass der Ausdruck* $\varphi(du) - (d\sqrt{f_0(u)})^2$, *durch den Ausdruck* $f_0(du) - (d\sqrt{f_0(u)})^2$ *dividirt, einen von der Wahl der Differentiale* du_a *unabhängigen Quotienten liefert.* Nach einer in art. 6 gemachten Bemerkung trifft dieses Merkmal bei den Formen von zwei Differentialen immer zu; bei den Formen von mehr als zwei Differentialen hat dasselbe eine einschränkende Wirkung. Wenn man den in Rede stehenden Quotienten allgemein, wie oben bei der Annahme $n = 2$, mit $\frac{m^2}{2f_0(u)}$ bezeichnet, so dass die Gleichung entsteht

$$(51.) \quad \varphi(du) - (d\sqrt{f_0(u)})^2 = \frac{m^2}{2f_0(u)}\left(f_0(du) - (d\sqrt{f_0(u)})^2\right),$$

so muss der Quotient $\frac{m^2}{2f_0(u)}$ in Folge der Gleichung (6.), bei dem Abnehmen der Variabelen u_a gegen die Null, gegen die Einheit convergiren, und der Normaltypus $\varphi(du)$ erhält den Ausdruck

$$(51^a.) \quad \varphi(du) = (d\sqrt{f_0(u)})^2 + \frac{m^2}{2f_0(u)}\left(f_0(du) - (d\sqrt{f_0(u)})^2\right).$$

Unter dieser Voraussetzung mögen die Determinante Π und die Partialdeterminanten $P_{t,b}$ gebildet werden. Da $d\sqrt{f_0(u)} = \frac{1}{2}\frac{df_0(u)}{\sqrt{f_0(u)}}$ und

$$(df_0(u))^2 = \sum_{a,b} \frac{\partial f_0(u)}{\partial u_a}\frac{\partial f_0(u)}{\partial u_b} du_a du_b$$

ist, so hat man

$$2\varphi(du) = \sum_{a,b} p_{a,b} du_a du_b = \sum_{a,b}\left(\frac{m^2}{2f_0(u)} a_{a,b}(0) + \left(1 - \frac{m^2}{2f_0(u)}\right)\frac{\frac{\partial f_0(u)}{\partial u_a}\frac{\partial f_0(u)}{\partial u_b}}{2f_0(u)}\right) du_a du_b.$$

Hieraus folgt aber nach bekannten Determinantensätzen

$$\Pi=\left(\frac{m^2}{2f_0(u)}\right)^n\Delta_0+\left(\frac{m^2}{2f_0(u)}\right)^{n-1}\left(1-\frac{m^2}{2f_0(u)}\right)\Delta_0=\left(\frac{m^2}{2f_0(u)}\right)^{n-1}\Delta_0,$$

$$P_{\mathfrak{c},\mathfrak{b}}=\left(\frac{m^2}{2f_0(u)}\right)^{n-1}A_{\mathfrak{c},\mathfrak{b}}(0)+\left(\frac{m^2}{2f_0(u)}\right)^{n-2}\left(1-\frac{m^2}{2f_0(u)}\right)\frac{2f_0(u)A_{\mathfrak{c},\mathfrak{b}}(0)-u_\mathfrak{c}u_\mathfrak{b}\Delta_0}{2f_0(u)}$$

$$=\left(\frac{m^2}{2f_0(u)}\right)^{n-2}A_{\mathfrak{c},\mathfrak{b}}(0)-\left(\frac{m^2}{2f_0(u)}\right)^{n-2}\left(1-\frac{m^2}{2f_0(u)}\right)\frac{u_\mathfrak{c}u_\mathfrak{b}\Delta_0}{2f_0(u)}.$$

Demnach erhält der Quotient $\frac{\Pi}{\Delta_0}$ den Werth

$$(52.)\qquad \frac{\Pi}{\Delta_0}=\left(\frac{m^2}{2f_0(u)}\right)^{n-1}.$$

Ich werde nun für die in Rede stehenden Formen die zugehörige Form $\Theta(u,\overset{1}{\delta u},u,\delta u)$ darstellen, welche in (41.) entwickelt ist. In dem Ausdruck

$$p_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}=\frac{m^2}{2f_0(u)}a_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}(0)+\left(1-\frac{m^2}{2f_0(u)}\right)\frac{\frac{\partial f_0(u)}{\partial u_\mathfrak{a}}\frac{\partial f_0(u)}{\partial u_\mathfrak{b}}}{2f_0(u)}$$

ist der Quotient $\frac{\frac{\partial f_0(u)}{\partial u_\mathfrak{a}}\frac{\partial f_0(u)}{\partial u_\mathfrak{b}}}{2f_0(u)}$ von der Variabele t unabhängig. Es wird daher

$$(t-t_0)^2\frac{d^2p_{\mathfrak{b},\mathfrak{b}}}{dt^2}+2(t-t_0)\frac{dp_{\mathfrak{b},\mathfrak{b}}}{dt}$$

$$=\left((t-t_0)^2\frac{d^2\left(\frac{m^2}{2f_0(u)}\right)}{dt^2}+2(t-t_0)\frac{d\left(\frac{m^2}{2f_0(u)}\right)}{dt}\right)\left(a_{\mathfrak{b},\mathfrak{b}}(0)-\frac{\frac{\partial f_0(u)}{\partial u_\mathfrak{b}}\frac{\partial f_0(u)}{\partial u_\mathfrak{b}}}{2f_0(u)}\right).$$

Ferner kommt

$$\frac{P_{\mathfrak{c},\mathfrak{b}}}{\Pi}=\frac{2f_0(u)}{m^2}\left(\frac{A_{\mathfrak{c},\mathfrak{b}}(0)}{\Delta_0}-\left(1-\frac{m^2}{2f_0(u)}\right)\frac{u_\mathfrak{c}u_\mathfrak{b}}{2f_0(u)}\right),$$

$$\frac{dp_{\mathfrak{c},\mathfrak{b}}}{dt}\frac{dp_{\mathfrak{b},\mathfrak{b}}}{dt}=\left(\frac{d\frac{m^2}{2f_0(u)}}{dt}\right)^2\left(a_{\mathfrak{c},\mathfrak{b}}(0)-\frac{\frac{\partial f_0(u)}{\partial u_\mathfrak{c}}\frac{\partial f_0(u)}{\partial u_\mathfrak{b}}}{2f_0(u)}\right)\left(a_{\mathfrak{b},\mathfrak{b}}(0)-\frac{\frac{\partial f_0(u)}{\partial u_\mathfrak{b}}\frac{\partial f_0(u)}{\partial u_\mathfrak{b}}}{2f_0(u)}\right).$$

In der Summe $\sum_{\mathfrak{c},\mathfrak{b}}\frac{P_{\mathfrak{c},\mathfrak{b}}}{\Pi}\frac{dp_{\mathfrak{c},\mathfrak{b}}}{dt}\frac{dp_{\mathfrak{b},\mathfrak{b}}}{dt}$ liefert der zweite Bestandtheil des Ausdruckes $\frac{P_{\mathfrak{c},\mathfrak{b}}}{\Pi}$ den Beitrag Null, der erste Bestandtheil den Beitrag

$$\frac{2f_0(u)}{m^2}\left(\frac{d\frac{m^2}{2f_0(u)}}{dt}\right)^2\left(a_{\mathfrak{b},\mathfrak{b}}(0)-\frac{\frac{\partial f_0(u)}{\partial u_\mathfrak{b}}\frac{\partial f_0(u)}{\partial u_\mathfrak{b}}}{2f_0(u)}\right).$$

Man findet also $\Theta(u, \overset{1}{\delta} u, u, \delta u)$ gleich dem Producte aus der Summe

$$\sum_{\mathfrak{b},\mathfrak{h}} \left(a_{\mathfrak{b},\mathfrak{h}}(0) - \frac{\frac{\partial f_0(u)}{\partial u_\mathfrak{b}} \frac{\partial f_0(u)}{\partial u_\mathfrak{h}}}{2 f_0(u)} \right) \overset{1}{\delta} u_\mathfrak{b} \delta u_\mathfrak{h} = 2 f_0(\delta u, \overset{1}{\delta} u) - 2 \delta \sqrt{f_0(u)} \overset{1}{\delta} \sqrt{f_0(u)}$$

in den Ausdruck

$$(t-t_0)^2 \frac{d^2 \frac{m^2}{2 f_0(u)}}{dt^2} + 2(t-t_0) \frac{d \frac{m^2}{2 f_0(u)}}{dt} - \frac{(t-t_0)^2}{2} \frac{2 f_0(u)}{m^2} \left(\frac{d \frac{m^2}{2 f_0(u)}}{dt} \right)^2,$$

welcher sich vermöge der Gleichung (10^a.), $f_0(u) = (t-t_0)^2 h$, in den Ausdruck $\frac{m}{h} \frac{d^2 m}{dt^2}$ zusammenzieht. Es ist daher

$$(53.) \qquad \Theta(u, \overset{1}{\delta} u, u, \delta u) = \frac{2m}{h} \frac{d^2 m}{dt^2} (f_0(\delta u, \overset{1}{\delta} u) - \delta \sqrt{f_0(u)} \overset{1}{\delta} \sqrt{f_0(u)}).$$

Die Gestalt dieser Gleichung lässt sich abändern, indem man aus (51.) die Gleichung ableitet

$$\varphi(\delta u, \overset{1}{\delta} u) - \delta \sqrt{f_0(u)} \overset{1}{\delta} \sqrt{f_0(u)} = \frac{m^2}{2 f_0(u)} (f_0(\delta u, \overset{1}{\delta} u) - \delta \sqrt{f_0(u)} \overset{1}{\delta} \sqrt{f_0(u)}),$$

wo $\varphi(\delta u, \overset{1}{\delta} u)$ nach der Analogie von $f(\delta x, \overset{1}{\delta} x)$ gebildet ist, und von dieser Gebrauch macht. Dann entsteht die Darstellung

$$(53^a.) \qquad \Theta(u, \overset{1}{\delta} u, u, \delta u) = \frac{4(t-t_0)^2}{m} \frac{d^2 m}{dt^2} (\varphi(\delta u, \overset{1}{\delta} u) - \delta \sqrt{f_0(u)} \overset{1}{\delta} \sqrt{f_0(u)}).$$

Die Bedeutung, welche diese Gleichung für das in (51.) definirte Geschlecht von Formen hat, giebt sich schärfer zu erkennen, wenn die auf beiden Seiten vorkommenden Ausdrücke in den ursprünglichen Variabelen x_a erscheinen. Wie in art. 7 bemerkt worden, ist

$$\Theta(u, \overset{1}{\delta} u, u, \delta u) = (t-t_0)^2 \Psi(x', \overset{1}{\delta} x, x', \delta x);$$

man hat ferner

$$\varphi(\delta u, \overset{1}{\delta} u) = f(\delta x, \overset{1}{\delta} x),$$

und in Folge der Gleichung (12.)

$$\delta \sqrt{f_0(u)} = \frac{1}{2\sqrt{f_0(u)}} (t-t_0) \sum_a \frac{\partial f(x')}{\partial x'_a} \delta x_a = \frac{t-t_0}{\sqrt{f_0(u)}} f(x', \delta x).$$

Wenn man nun die quadrilineare Form

$$(54.) \qquad F(\overset{1}{d} x, \overset{1}{\delta} x, dx, \delta x) = 4(f(dx, \overset{1}{d} x) f(\delta x, \overset{1}{\delta} x) - f(dx, \overset{1}{\delta} x) f(\delta x, \overset{1}{d} x)),$$

oder

$$F(\overset{1}{d} x, \overset{1}{\delta} x, dx, \delta x) = \sum_{a,b} \frac{\partial f(dx)}{\partial\, dx_a} \frac{\partial f(\delta x)}{\partial\, \delta x_b} (\overset{1}{d} x_a \overset{1}{\delta} x_b - \overset{1}{\delta} x_a \overset{1}{d} x_b)$$

4*

einführt, welche vermöge der ersten der gegebenen Darstellungen die Eigenschaft hat, mit der Form $f(dx)$ covariant zu sein, so kommt für den Ausdruck

$$4(\varphi(\delta u, \overset{1}{\delta}u) - \delta\sqrt{f_0(u)}\,\overset{1}{\delta}\sqrt{f_0(u)}) = \frac{4(f(x')f(\delta x, \overset{1}{\delta}x) - f(x', \delta x)f(x', \overset{1}{\delta}x))}{h},$$

die Bezeichnung

$$4(\varphi(\delta u, \overset{1}{\delta}u) - \delta\sqrt{f_0(u)}\,\overset{1}{\delta}\sqrt{f_0(u)}) = \frac{F(x', \overset{1}{\delta}x, x', \delta x)}{h}.$$

Es verwandelt sich deshalb die Gleichung (53^a.) *in diese*

$$(53^b.)\qquad \Psi(x', \overset{1}{\delta}x, x', \delta x) = \frac{1}{m}\frac{d^2m}{h\,dt^2}F(x', \overset{1}{\delta}x, x', \delta x).$$

Dieselbe spricht den Satz aus, dass bei dem in Rede stehenden Geschlecht von Formen der Quotient der beiden Covarianten

$$\frac{\Psi(dx, \overset{1}{\delta}x, dx, \delta x)}{F(dx, \overset{1}{\delta}x, dx, \delta x)}$$

gleich der von der Wahl der Differentiale $\overset{1}{\delta}x_b$, δx_b *unabhängigen Grösse* $\frac{1}{m}\frac{d^2m}{h\,dt^2}$ *wird, wenn man für die Variabelen* x_a *die durch die Integration des isoperimetrischen Systems gewonnenen Werthe, und für die Systeme von Differentialen* $\overset{1}{dx_a}$, dx_β *die entsprechenden Systeme von Differentialquotienten* $\frac{dx_a}{dt}$, $\frac{dx_\beta}{dt}$ *substituirt.*

Sobald der Werth $t-t_0$ gegen die Null convergirt, so nähert sich der Ausdruck $\Theta(u, \overset{1}{\delta}u, u, \delta u)$, wie oben bemerkt, der Grenze $\Psi_0(u, \overset{1}{\delta}u, u, \delta u)$, der Ausdruck $h(t-t_0)^2(\varphi(\delta u, \overset{1}{\delta}u) - \delta\sqrt{f_0(u)}\,\overset{1}{\delta}\sqrt{f_0(u)})$ der Grenze

$$f_0(u)(f_0(\delta u, \overset{1}{\delta}u) - \delta\sqrt{f_0(u)}\,\overset{1}{\delta}\sqrt{f_0(u)}).$$

Die Gleichung (53^a.) liefert daher durch die Vergleichung mit (49.) für das *Riemann*sche Krümmungsmass k_0 in dem Punkte $(x_1(0), x_2(0), \ldots x_n(0))$ den Ausdruck

$$(49^a.)\qquad k_0 = -\left(\frac{1}{2m}\frac{d^2m}{h\,dt^2}\right)_{t=t_0}.$$

Da $\frac{m^2}{2f_0(u)} = \frac{m^2}{2h(t-t_0)^2}$ bei abnehmendem $(t-t_0)$ die Einheit zur Grenze hat, so ist hier die Bedingung hinzuzufügen, dass der Ausdruck $\frac{1}{m}\frac{d^2m}{h\,dt^2}$ in der That für $t-t_0 = 0$ gegen einen endlichen Werth convergire. Wenn man das Vorzeichen der Grösse m so bestimmt, dass bei abnehmendem $(t-t_0)$ der

Quotient $\frac{m}{\sqrt{2f_0(u)}}$ sich der Einheit nähern soll, so lässt sich diese Bedingung auch dahin formuliren, dass die Differenz $\frac{1}{m} - \frac{1}{\sqrt{2f_0(u)}}$ alsdann die Null zur Grenze habe.

Unter den in Rede stehenden Formen nehmen diejenigen eine besondere Stelle ein, bei denen die Grösse m^2 die Variabelen u_a nicht anders als in der Function $f_0(u)$ enthält. Bei diesen Formen kann der Normaltypus $\varphi(du)$ durch eine Substitution

$$(55.) \qquad u_a = \frac{\sqrt{f_0(u)}}{\sqrt{f_0(\xi)}}\xi_a,$$

bei der $\frac{\sqrt{f_0(u)}}{\sqrt{f_0(\xi)}}$ eine reine Function von $f_0(u)$ ist, in das Product eines endlichen Factors und der Form mit constanten Coefficienten $f_0(d\xi)$ verwandelt werden. Durch die Einführung der neuen Variabelen geht $\varphi(du)$ nach einer einfachen Reduction in den folgenden Ausdruck über

$$(56.) \qquad \varphi(du) = \frac{m^2}{2f_0(\xi)}f_0(d\xi) + (d\sqrt{f_0(u)})^2 - \frac{m^2}{2f_0(\xi)}(d\sqrt{f_0(\xi)})^2,$$

und der angegebene Zweck wird durch die Integration der Differentialgleichung

$$(57.) \qquad (d\sqrt{f_0(u)})^2 - \frac{m^2}{2f_0(\xi)}(d\sqrt{f_0(\xi)})^2 = 0$$

erreicht. Für die Function $\sqrt{f_0(\xi)}$ ergiebt sich hieraus die doppelte Bestimmung

$$(57^a.) \qquad \frac{d\sqrt{f_0(u)}}{d\sqrt{f_0(\xi)}} = \frac{m}{\sqrt{2f_0(\xi)}},$$

und

$$(57^b.) \qquad \frac{d\sqrt{f_0(u)}}{d\sqrt{f_0(\xi)}} = \frac{-m}{\sqrt{2f_0(\xi)}},$$

in beiden Fällen aber kommt, wie behauptet worden,

$$(58.) \qquad \varphi(du) = \frac{m^2}{2f_0(\xi)}f_0(d\xi).$$

Aus den Gleichungen (57^a.) und (57^b.) folgt, wenn man bei der letztern $\xi^{(1)}$ statt ξ setzt, beziehungsweise

$$\frac{\sqrt{f_0(\xi)}}{\sqrt{f_0(u)}} = e^{\int d\sqrt{2f_0(u)}\left(\frac{1}{m} - \frac{1}{\sqrt{2f_0(u)}}\right)},$$

$$\frac{\sqrt{f_0(\xi_1)}}{\sqrt{f_0(u)}} = e^{-\int d\sqrt{2f_0(u)}\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{\sqrt{2f_0(u)}}\right)},$$

und es ist leicht zu erkennen, dass zwei Systeme ξ_a und $\xi_a^{(1)}$, wenn c eine von den Integrationen abhängige Constante bedeutet, durch die Gleichungen

$$\xi_a^{(1)} = \frac{c\xi_a}{f_0(\xi)}$$

verbunden sind. Setzt man $\sqrt{2f_0(u)} = \sqrt{2h}(t-t_0) = r$, so führt die Bedingung, dass $\frac{\sqrt{f_0(\xi)}}{\sqrt{f_0(u)}}$ bei abnehmendem $(t-t_0)$ oder r sich der Einheit nähern soll, zu der Bestimmung

$$(59.)\qquad \frac{\sqrt{f_0(\xi)}}{\sqrt{f_0(u)}} = e^{\int_0^r dr\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{r}\right)},$$

wo der Ausdruck $\frac{1}{m}-\frac{1}{r}$, nach dem oben Bemerkten, für $r=0$ selbst gleich Null ist.

10.

Durch die Voraussetzung, dass $f(dx)$ eine Form von zwei Differentialen sei, vermöge deren die Gleichung (51.) unbeschränkte Gültigkeit erhält, geht die Gleichung (52.) in die Gleichung $\frac{\Pi}{\Delta_0} = \frac{m^2}{2f_0(u)}$ über, und die Thatsache, dass der Ausdruck $\frac{\Pi}{\Delta_0}$ bei der Vertauschung der Elemente x_a und $x_a(0)$ ungeändert bleibt, verbunden mit der Gleichung $f_0(u) = f(v)$ begründet den Satz, welchen Herr *Christoffel* in art. 9 der allgemeinen Theorie der geodätischen Dreiecke (Abh. der Berliner Akademie vom Jahre 1868) in Betreff der reducirten Länge eines geodätischen Bogens aufgestellt hat.

Für die Gleichung (53^b.) gilt, wenn $n=2$ ist, die schon oben angewendete Relation

$$\Psi(x', \overset{1}{\delta x}, x', \delta x) = -2k\Delta(x_1'\overset{1}{\delta x_2} - \overset{1}{\delta x_1}x_2')(x_1'\delta x_2 - \delta x_1 x_2'),$$

wo k das *Gauss*ische Krümmungsmass für den Punkt (x_1, x_2) bedeutet, und die Form $F(x', \overset{1}{\delta x}, x', \delta x)$ erhält vermöge ihrer Definition den Werth

$$F(x', \overset{1}{\delta x}, x', \delta x) = \Delta(x_1'\overset{1}{\delta x_2} - \overset{1}{\delta x_1}x_2')(x_1'\delta x_2 - \delta x_1 x_2').$$

Die Gleichung (53^b.) nimmt daher diese Gestalt an

$$-2k = \frac{1}{m}\frac{d^2m}{hdt^2}.$$

Da nun für die Variabele t die Gleichung $\sqrt{2h}(t-t_0) = \sqrt{2f_0(u)} = r$ besteht, und

da bei einer Differentiation nach t die Grössen $x_a(0)$ und $x'_a(0)$ als constant betrachtet werden, so drückt die abgeleitete Gleichung diejenige Eigenschaft des Krümmungsmasses aus, welche *Gauss* in art. 19 der *disqu. gener. circa superficies curvas* entwickelt hat.

Es liegt in der Gestalt der Formen Ψ und F für $n=2$, dass

$$\frac{\Psi(x', \overset{1}{\delta x}, x', \delta x)}{F(x', \overset{1}{\delta x}, x', \delta x)} = \frac{\Psi(\overset{1}{dx}, \overset{1}{\delta x}, dx, \delta x)}{F(\overset{1}{dx}, \overset{1}{\delta x}, dx, \delta x)}$$

sein muss, dass also der Quotient dieser beiden Formen eine Function der Grössen x_a allein, mithin eine Invariante der Form $f(dx)$ ist. Bei einem Werthe von n, der die *Zwei* übertrifft, kann man den Ausdruck $\frac{1}{m}\frac{d^2m}{h\,dt^2}$ in die Form bringen

$$\frac{1}{m}\frac{d^2m}{h\,dt^2} = \frac{1}{f_0(u)m}\sum_{a,b}\frac{\partial^2 m}{\partial u_a\,\partial u_b}u_a u_b,$$

aus welcher hervorgeht, dass derselbe eine reine Function der Grössen x_a und $x_a(0)$ ist, und dann lehrt die Gleichung (53^b.) nur so viel, dass der Quotient

$$\frac{\Psi(x', \overset{1}{\delta x}, x', \delta x)}{F(x', \overset{1}{\delta x}, x', \delta x)}$$

dieser Function der Variabelen x_a und der Constanten $x_a(0)$ gleich ist. Ich werde nun die Voraussetzung machen, dass der Ausdruck $\frac{1}{m}\frac{d^2m}{h\,dt^2}$ gleich einer Function der Variabelen x_a allein sei, mit welchen Anfangswerthen man auch die Integration der isoperimetrischen Differentialgleichungen, von denen die Bildung der Normalform $\varphi(du)$, folglich auch der Grösse m abhängt, ausgeführt habe. Alsdann ergiebt sich das Resultat, dass, bei der Annäherung der Grösse $(t-t_0)$ an die Null, der in der Gleichung (49^a.) auftretende Quotient

$$\frac{\Psi_0(x'(0), \overset{1}{\delta x}, x'(0), \delta x)}{F_0(x'(0), \overset{1}{\delta x}, x'(0), \delta x)}$$

gleich derjenigen reinen Function der Grössen $x_a(0)$ wird, in die der Ausdruck $\frac{1}{m}\frac{d^2m}{h\,dt^2}$ sich unter dieser Bedingung verwandelt. Denn da die Grösse $\frac{1}{m}\frac{d^2m}{h\,dt^2}$ bei einem beliebigen Werthe von t als eine reine Function der Grössen x_a, das heisst, als von den Grössen $x_a(0)$ unabhängig vorausgesetzt wird, so darf die Grösse $\frac{1}{m}\frac{d^2m}{h\,dt^2}$ bei dem Eintreten des speciellen Werthes $t=t_0$ keine Abhängigkeit von den Grössen $x'_a(0)=\left(\frac{dx_a}{dt}\right)_{t=t_0}$ annehmen. Dieses ist der eigentliche

Sinn unserer Voraussetzung. Weil aber in dem Quotienten $\frac{\Psi_0(x'(0), \overset{1}{\delta x}, x'(0), \delta x)}{F_0(x'(0), \overset{1}{\delta x}, x'(0), \delta x)}$ die Verhältnisse der Differentialquotienten $x'_a(0)$ vollkommen willkürlich angenommen werden dürfen, ohne dass hierdurch das Resultat irgend wie geändert werde, so kann auch der Werth des Quotienten $\frac{\Psi_0(dx, \overset{1}{\delta x}, dx, \delta x)}{F_0(dx, \overset{1}{\delta x}, dx, \delta x)}$, in welchem die dx_a unabhängige Differentiale sind, kein anderer sein, als der Werth $\frac{1}{m}\frac{d^2m}{hdt^2}$ für $t = t_0$. Allein die Wahl der Anfangswerthe $x_a(0)$ sollte keinen Beschränkungen unterworfen sein, die Betrachtung, welche für den Werth $t = t_0$ angestellt wurde, kann für jeden speciellen Werth $t = t^{(1)}$ wiederholt werden, und deshalb besteht unter der erwähnten Bedingung, dass $\frac{1}{m}\frac{d^2m}{hdt^2}$ eine reine Function der Grössen x_a ist, die Gleichung

$$\frac{\Psi(dx, \overset{1}{\delta x}, dx, \delta x)}{F(dx, \overset{1}{\delta x}, dx, \delta x)} = \frac{1}{m}\frac{d^2m}{hdt^2}.$$

Der Werth dieses Quotienten, als eine Function der Grössen x_a aufgefasst, ist also eine Invariante der Form $f(dx)$. Wenn man dieselbe mit $-2k$ bezeichnet, so ist k in Folge der Gleichung (49^a.) das *Riemann*sche Krümmungsmass in dem Punkte $(x_1, x_2, \ldots x_n)$.

Sobald der Quotient $\frac{\Psi(dx, \overset{1}{\delta x}, dx, \delta x)}{F(dx, \overset{1}{\delta x}, dx, \delta x)}$ gleich einer Invariante $-2k$ ist, so kann man beweisen, dass für die entsprechenden vollständigen quadrilinearen Formen die entsprechende Relation gilt

$$(60.)\qquad \Psi(\overset{1}{dx}, \overset{1}{\delta x}, dx, \delta x) + 2kF(\overset{1}{dx}, \overset{1}{\delta x}, dx, \delta x) = 0.$$

Zwischen den Coefficienten der Form Ψ bestehen gewisse einfache Gleichungen, welche Bd. LXX pag. 84 ff. angeführt sind, und die man folgendermassen ausdrücken kann, wenn der Coefficient von $\overset{1}{dx}_\mathfrak{a}\overset{1}{\delta x}_\mathfrak{b}\,dx_\mathfrak{g}\,\delta x_\mathfrak{h}$ mit $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ bezeichnet wird,

$$(61.)\qquad \begin{cases} (\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{g}, \mathfrak{h}) = -(\mathfrak{b}, \mathfrak{a}, \mathfrak{g}, \mathfrak{h}), \\ (\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{g}, \mathfrak{h}) = -(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{h}, \mathfrak{g}), \\ (\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{g}, \mathfrak{h}) = (\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, \mathfrak{a}, \mathfrak{b}), \\ \text{und} \\ (\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{g}, \mathfrak{h}) + (\mathfrak{a}, \mathfrak{g}, \mathfrak{h}, \mathfrak{b}) + (\mathfrak{a}, \mathfrak{h}, \mathfrak{b}, \mathfrak{g}) = 0, \end{cases}$$

sobald $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{h}$ lauter verschiedene Zahlen sind.

Aus bekannten Eigenschaften der Determinanten folgt, dass die entsprechenden Coefficienten der Form $F(\overset{1}{dx}, \overset{1}{\delta x}, dx, \delta x)$ denselben Gleichungen genügen, und daher gilt dies auch von den Coefficienten des Ausdrucks

$$\Psi(\overset{1}{dx}, \overset{1}{\delta x}, dx, \delta x) + 2kF(\overset{1}{dx}, \overset{1}{\delta x}, dx, \delta x).$$

Wendet man nun auf den Coefficienten des Products $\overset{1}{dx}_{\mathfrak{a}} \overset{1}{\delta x}_{\mathfrak{b}} dx_{\mathfrak{g}} \delta x_{\mathfrak{h}}$ die Bezeichnung $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ an, so müssen unter den vier Zahlen $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{h}$ entweder zwei Paare von gleichen sein $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, oder nur ein Paar gleiche $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{c}$, oder vier ungleiche $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{h}$, wofern der betreffende Coefficient $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ nicht gleich Null ist. Die als gültig vorausgesetzte Gleichung

$$(60^a.) \qquad \Psi(dx, \overset{1}{\delta x}, dx, \delta x) + 2kF(dx, \overset{1}{\delta x}, dx, \delta x) = 0$$

hat die Wirkung, dass jeder Factor von $dx_{\mathfrak{a}}\, dx_{\mathfrak{g}}$ gleich Null sein muss, also kommt, wenn $\mathfrak{a} = \mathfrak{g}$,

$$(61^a.) \qquad (\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{a}, \mathfrak{h}) = 0,$$

wenn $\mathfrak{a}$ nicht gleich $\mathfrak{g}$,

$$(61^b.) \qquad (\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{g}, \mathfrak{h}) + (\mathfrak{g}, \mathfrak{b}, \mathfrak{a}, \mathfrak{h}) = 0.$$

Um daher die Behauptung zu beweisen, dass die Gleichung $(60^a.)$ die Gleichung (60.) nach sich zieht, oder dass $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ für *jede* Combination von Werthen gleich Null sei, ist diese Thatsache noch für den Fall zu begründen, dass die vier Zahlen $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{h}$ sämmtlich von einander verschieden sind. Aus $(61^b.)$ ergiebt sich zunächst

$$(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{g}, \mathfrak{h}) = -(\mathfrak{a}, \mathfrak{h}, \mathfrak{g}, \mathfrak{b}) = (\mathfrak{a}, \mathfrak{h}, \mathfrak{b}, \mathfrak{g}),$$

ebenso

$$(\mathfrak{a}, \mathfrak{h}, \mathfrak{b}, \mathfrak{g}) = (\mathfrak{a}, \mathfrak{g}, \mathfrak{h}, \mathfrak{b}),$$

und deshalb ist

$$(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{g}, \mathfrak{h}) + (\mathfrak{a}, \mathfrak{g}, \mathfrak{h}, \mathfrak{b}) + (\mathfrak{a}, \mathfrak{h}, \mathfrak{b}, \mathfrak{g}) = 3(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{g}, \mathfrak{h}) = 0,$$

wie verlangt worden.

Es ist hiermit durch die gegebenen Ausführungen festgestellt, dass, sobald der Ausdruck $\frac{1}{m}\frac{d^2 m}{h\,dt^2}$ gleich der reinen Function der Grössen $x_{\mathfrak{a}}$, $-2k$, ist, die Gleichung (60.) besteht *).

---

*) Aus den Grundsätzen, welche in der „Entwickelung einiger Eigenschaften der quadratischen Formen von n Differentialen“ Bd. 71 pg. 274 dieses Journals aufgestellt sind, ergiebt sich, dass, wenn in einer zu der Form $f(dx)$ covarianten Form

$$\sum_{\mathfrak{a},\mathfrak{b},\mathfrak{g},\mathfrak{h}} (\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{g}, \mathfrak{h})(\overset{1}{dx}_{\mathfrak{a}} \overset{1}{\delta x}_{\mathfrak{b}} - \overset{1}{\delta x}_{\mathfrak{a}} \overset{1}{dx}_{\mathfrak{b}})(dx_{\mathfrak{g}} \delta x_{\mathfrak{h}} - \delta x_{\mathfrak{g}} dx_{\mathfrak{h}})$$

Ich werde von hier ab die Voraussetzung eintreten lassen, dass für ein gewisses reelles Grössengebiet $x_1, x_2, \dots x_n$, dem auch das Anfangssystem $x_1(0), x_2(0), \dots x_n(0)$ angehören soll, die Form $f(dx)$ reell sei, und die Determinante Δ nirgend verschwinde. Der Fall, welcher zuerst in Betracht kommen soll, ist der, dass die Form $f(dx)$ nun auch wesentlich positiv sei. Dann gilt von der Form $f_0(dx)$ und der Determinante Δ_0 das Entsprechende; die Constante $h = f(x') = f_0(x'(0))$ ist wesentlich positiv, und, indem $t - t_0$ positiv angenommen wird, kann auch die reelle Grösse $\sqrt{2f_0(u)} = \sqrt{2h}(t-t_0) = r$ als positiv betrachtet werden. Aus diesen Annahmen sind jetzt die Consequenzen zu ziehen.

Der Normaltypus $\varphi(du)$, der aus der Form $f(dx)$ durch eine Substitution mit reellen und endlichen Coefficienten hervorgeht, bleibt so lange eine wesentlich positive Form von nicht verschwindender Determinante, als die Determinante Π derselben von Null verschieden ist. Ebenso lange bleibt in Folge der Darstellung in (27.) die zweite Variation $(\delta^2\varphi(u'))$ wesentlich positiv, und die Auflösung des isoperimetrischen Problems behält den Charakter eines wahren Minimums. Wenn eine Form $f(dx)$ zu dem in (51.) definirten Geschlecht gehört, so ist nach (52.)

$$\frac{\Pi}{\Delta_0} = \left(\frac{m^2}{2f_0(u)}\right)^{n-1}.$$

Der Quotient $\frac{\Pi}{\Delta_0}$ beginnt bei $t = t_0$ mit dem Werthe der Einheit, und kann nicht anders, als mit der Grösse m^2 zusammen, verschwinden; der Nenner $2f_0(u)$ ist nach den getroffenen Voraussetzungen stets positiv und verschwindet nur, wenn alle u_a simultan verschwinden oder für $t = t_0$. Wenn wir nun annehmen,

---

der Factor $(\overset{1}{d}x_a \overset{1}{\delta}x_b - \overset{1}{\delta}x_a \overset{1}{d}x_b)(dx_g \delta x_h - \delta x_g dx_h)$ durch den Ausdruck $\frac{1}{\Delta}\frac{\partial^2 \Delta}{\partial a_{a,g}\,\partial a_{b,h}}$ ersetzt wird, diese covariante Form in eine Invariante der Form $f(dx)$ übergeht. Vermöge dieses Verfahrens wird aus der Form $\Psi(\overset{1}{d}x, \overset{1}{\delta}x, dx, \delta x)$ die Invariante ψ, aus der Form $F(\overset{1}{d}x, \overset{1}{\delta}x, dx, \delta x)$ die Zahl $\frac{n(n-1)}{2}$. Sobald daher der Quotient $\frac{\Psi(\overset{1}{d}x, \overset{1}{\delta}x, dx, \delta x)}{F(\overset{1}{d}x, \overset{1}{\delta}x, dx, \delta x)}$ von der Wahl der Differentiale unabhängig ist, so muss sein Werth mit der Invariante $\frac{2\psi}{n(n-1)}$ der Form $f(dx)$ zusammenfallen, und es entsteht die Gleichung $\frac{n(n-1)}{2}k = -\frac{1}{2}\psi$. Der Ausdruck $-\frac{1}{2}\psi$ ist jedoch an dem angeführten Orte als eine Verallgemeinerung des *Gauss*ischen Krümmungsmasses bezeichnet worden.

dass in unseren Untersuchungen die Grösse $t-t_0$ niemals einen so grossen positiven Werth erhalten soll, dass der Quotient $\frac{\Pi}{\Delta_0}$ gleich der Null wird, so behält derselbe nothwendig sein positives Vorzeichen. Ebenso bleibt der Quotient $\frac{m^2}{2f_0(u)}$, welcher für $t=t_0$ gleich der Einheit ist, eine positive Grösse, und $\frac{m}{\sqrt{2f_0(u)}}$ kann ebenfalls nur reell und, nach der getroffenen Bestimmung, nur positiv sein. Deshalb ist unter den geltenden Voraussetzungen auch m reell und positiv. Weil aber der Quotient $\frac{\Pi}{\Delta_0}$, als Function der Grössen x_a und $x_a(0)$ betrachtet, sich bei einer Vertauschung von x_a mit $x_a(0)$ in sich selbst verwandelt, und weil von dem positiven Radical $\sqrt{2f_0(u)} = \sqrt{2f(v)}$ das Gleiche gilt, so hat auch die reelle positive Grösse m die Eigenschaft, bei jener Vertauschung sich in sich selbst zu verwandeln.

In dem Falle, dass die Form $f(dx)$ nicht die Eigenschaft hat, wesentlich positiv zu sein, schliesse ich eine solche Wahl der Grössen $x'_a(0)$ oder der Grössen u_a aus, bei welcher $h=f_0(x'(0))$ den Werth Null erhält. Dann ist h entweder positiv oder negativ, und wenn in dem Falle eines negativen h statt der Form $f(dx)$ die Form $-f(dx)$ in Erörterung gezogen wird, so darf man die Grösse h stets als positiv ansehen. Dies soll von nun an immer geschehen. Da das Gebiet der reellen Variabelen $u_1, \ldots u_n$ in einen Theil zerfällt, in welchem $f_0(u) > 0$ ist, und in einen andern Theil, in welchem $f_0(u) < 0$ ist, so hat die Voraussetzung eines positiven h die Bedeutung, dass die Variabelen u_a nur in dem Gebietstheil angenommen und frei bewegt werden sollen, in welchem $f_0(u) > 0$ ist. Hält man diese Anschauung fest, so ist der Quotient $\frac{\Pi}{\Delta_0}$ wieder gleich der Einheit für $t=t_0$, und positiv bei wachsendem $t-t_0$. Unter der Annahme der Gleichung (51.) ist dann auch $\frac{m^2}{2f_0(u)}$ gleich der Einheit für $t=t_0$, und positiv bei wachsendem $t-t_0$. Mithin bleibt die Grösse $\frac{m}{\sqrt{2f_0(u)}}$ reell und positiv, und, wenn $\sqrt{2f_0(u)} = \sqrt{2h}(t-t_0) = r$ als positiv gilt, auch die Grösse m. Wegen der Gleichung $\sqrt{2f_0(u)} = \sqrt{2f(v)}$ geht m in sich selbst über, sobald die Grössen x_a und $x_a(0)$ mit einander vertauscht werden.

Da in einer reellen quadratischen Form nach einem von *Jacobi* bewiesenen Satze die Anzahl der positiven und die Anzahl der negativen Quadrate, deren Aggregat die Form darstellt, für jede lineare Substitution mit

reellen Coefficienten unveränderlich ist, so ist der Ausdruck $f_0(du)-(d\sqrt{f_0(u)})^2$ bei dem positiven Werthe der Grösse $f_0(u)$ gleich einem Aggregat von $(n-1)$ Quadraten, unter denen sich ebenso viele negative befinden, wie in der Form $f_0(du)$ und ein positives Quadrat weniger befindet, als in der Form $f_0(du)$. Weil nun die Grösse $\frac{m^2}{2f_0(u)}$ positiv ist, so enthält die Form

$$(d\sqrt{f_0(u)})^2+\frac{m^2}{2f_0(u)}(f_0(du)-(d\sqrt{f_0(u)})^2) = \varphi(du)$$

ebenso viele positive und ebenso viele negative Quadrate, wie die Form $f_0(du)$. Der Uebergang von der Form $f(dx)$ zu der Form $\varphi(du)$ geschieht durch eine Substitution mit reellen Coefficienten; folglich ist die Anzahl der positiven und der negativen Quadrate in den Formen $f(dx)$ und $f_0(dx)$ bei dem in (51.) definirten Geschlechte von Formen unter den angegebenen Voraussetzungen stets übereinstimmend.

Setzt man für eine Form $f(dx)$ eine Gleichung

$$\Psi(x', \overset{1}{\delta x}, x', \delta x) = -2kF(x', \overset{1}{\delta x}, x', \delta x)$$

voraus, wo k eine endliche Function der Grössen x_a und $x_a(0)$ ist; denkt man sich hierauf die x_a durch die $x_c(0)$ und $(t-t_0)x'_c(0)$ ausgedrückt, und bestimmt eine Grösse m durch die Forderung, der Differentialgleichung

$$-2k = \frac{1}{m}\frac{d^2m}{h\,dt^2},$$

und für $t=t_0$ den Bedingungen

$$m=0, \qquad \frac{dm}{\sqrt{2h}\,dt}=1$$

zu genügen, so ist die Grösse m vollständig gegeben und bleibt für ein gewisses Intervall der Variabele $t-t_0$ reell und positiv. Für diese Grösse m gilt also die Gleichung (53^b.), welche im vorigen Art. aus der Gleichung (51.) abgeleitet worden ist. *Man kann nun unter den ausgesprochenen Voraussetzungen auch das Umgekehrte zeigen, dass nämlich aus der Gleichung* (53^b.) *die Gleichung* (51.) *folgen muss.* Der Nachweis jenes Satzes und seiner Umkehrung ist eines der wesentlichsten Ziele der gegenwärtigen Untersuchungen. Einen Leitfaden für den Beweis der Umkehrung giebt die Betrachtung einer gewissen Classe von Formen, welche dem oben definirten Geschlecht von Formen angehört, und die schon der Gegenstand verschiedener Speculationen gewesen ist. Diese Classe von Formen wird zunächst in Erwägung gezogen werden.

Zweite Abtheilung.

1.

Das System der isoperimetrischen Differentialgleichungen, welches einer Form $f(dx)$ zugeordnet ist, kann vermittelst der bereit stehenden Methoden nur unter sehr beschränkten Voraussetzungen wirklich integrirt werden. Für die Formen eines beliebig hohen Grades ist eine solche Voraussetzung die, dass die Form $f(dx)$ constante Coefficienten habe. Die betreffende Integration ist in diesem Falle ohne jede Schwierigkeit auszuführen, und ergiebt, wie Bd. LXX, pag. 91 entwickelt worden, die Eigenschaft der Normalform $\varphi(du)$, mit der Form $f_0(du)$ identisch gleich zu sein. Bei den quadratischen Formen kann man diese Eigenschaft so aussprechen, dass der Normaltypus $\varphi(du)$ durch die Gleichung (51^a.), I, d. h. der ersten Abtheilung, ausgedrückt wird, sobald man für die Grösse m die Gleichung

$$m = \sqrt{2f_0(u)}$$

voraussetzt. Eine andere quadratische Form, bei der jene Integration ebenfalls bewerkstelligt werden kann, lässt sich in der folgenden Weise genetisch darstellen.

Es sei $\gamma(dy)$ eine quadratische Form der n Differentiale dy_ι, deren Coefficienten constant sind, und deren Determinante nicht gleich Null ist, y_{n+1} eine $(n+1)^{\text{te}}$ Variabele, $\Gamma(dy)$ das Aggregat

$$(1.)\qquad \Gamma(dy) = \gamma(dy)+\tfrac{1}{2}dy_{n+1}^2,$$

und es bestehe zwischen den $(n+1)$ Variabelen $y_{\mathfrak{A}}$, wo $\mathfrak{A} = 1, 2, 3, \ldots (n+1)$ ist, die Gleichung

$$(2.)\qquad 2\Gamma(y) = 2\gamma(y)+y_{n+1}^2 = \frac{1}{\alpha},$$

wo α eine beliebig gegebene Constante bedeutet. Vermöge dieser Gleichung werde die Variabele y_{n+1} aus der Form $\Gamma(dy)$ eliminirt, so dass $\Gamma(dy) = g(dy)$ entsteht; dann ist $g(dy)$ die Form von n Differentialen

$$(3.)\qquad g(dy) = \gamma(dy)+\frac{\alpha(d\gamma(y))^2}{2-4\alpha\gamma(y)},$$

welche näher untersucht werden soll.

Sobald man $n = 2$, $\gamma(dy) = \frac{1}{2}(dy_1^2+dy_2^2)$ nimmt, und unter y_1, y_2, y_3 die rechtwinkligen Coordinaten eines Punktes im Raume versteht, so bedeutet

$2\Gamma(dy)$ das Quadrat des Linearelements im Raume, und $2\Gamma(y) = \frac{1}{\alpha}$ die Gleichung einer Kugelfläche, die mit dem Radius $\frac{1}{\sqrt{\alpha}}$ um den Coordinatenanfangspunkt beschrieben ist. Deshalb ist $2g(dy)$ das Quadrat des Linearelements auf dieser Kugelfläche, in den rechtwinkligen Coordinaten y_1, y_2 der Projection auf die entsprechende Ebene ausgedrückt.

Es folgt aus den Elementen der Variationsrechnung, dass bei einem beliebigen Werthe von n das System von isoperimetrischen Differentialgleichungen, welches der Form $g(dy)$ zugehört, durch das System von $(n+1)$ Differentialgleichungen

$$(4.)\qquad \frac{d\frac{\partial\Gamma(y')}{\partial y'_\varkappa}}{dt} = \lambda\frac{\partial\Gamma(y)}{\partial y_\varkappa}$$

in Verbindung mit der Gleichung (2.) ersetzt werden kann. Hier ist $\frac{dy_\varkappa}{dt} = y'_\varkappa$, und λ ein zu eliminirender Factor. Gegenwärtig ist es leicht, das System (4.) so zu integriren, dass für $t = t_0$ die Bedingungen $y_\varkappa = y_\varkappa(0)$, $y'_\varkappa = y'_\varkappa(0)$ erfüllt sind; man nimmt an, dass von den betreffenden $2(n+1)$ Constanten die $2n$ Constanten $y_\iota(0)$, $y'_\iota(0)$ willkürlich gewählt, die beiden Constanten $y_{n+1}(0)$, $y'_{n+1}(0)$ durch die beiden Gleichungen

$$(5.)\qquad 2\Gamma(y_0) = \frac{1}{\alpha},\qquad \frac{\partial\Gamma(y_0)}{\partial y_\varkappa(0)}\,y'_\varkappa(0) = 0$$

bestimmt sind. Die Gleichung (2.) zieht die Gleichungen

$$\frac{\partial\Gamma(y)}{\partial y_\varkappa}\,y'_\varkappa = \frac{\partial\Gamma(y')}{\partial y'_\varkappa}\,y_\varkappa = 0,$$

$$\frac{\sum_\varkappa d\frac{\partial\Gamma(y')}{\partial y'_\varkappa}}{dt}\,y_\varkappa + 2\Gamma(y') = 0$$

nach sich. Vermöge derselben kommt

$$\Gamma(y') = \Gamma(y'(0)),\quad -\Gamma(y') = \lambda\,\Gamma(y),$$

folglich

$$\lambda = -2\alpha\,\Gamma(y'(0)),$$

und daher werden die Differentialgleichungen (4.) durch das folgende System von Gleichungen integrirt

$$(6.)\qquad y_\varkappa = y_\varkappa(0)\cos\left((t-t_0)\sqrt{2\alpha\Gamma(y'(0))}\right) + y'_\varkappa(0)\frac{\sin\left((t-t_0)\sqrt{2\alpha\Gamma(y'(0))}\right)}{\sqrt{2\alpha\Gamma(y'(0))}}.$$

Wenn man jetzt die Ausdrücke

$$(t-t_0)y'_{\mathfrak{A}}(0) = z_{\mathfrak{A}}$$

bildet, so stellen die n unter diesen, für welche $\mathfrak{A} = 1, 2, \dots n$ ist, für die Form $g(dy)$ ein System von Normalvariabelen dar. Wegen der zweiten Gleichung (5.), welche in die Gleichung

$$\sum_{\mathfrak{A}} \frac{\partial \Gamma(y_0)}{\partial y_{\mathfrak{A}}(0)} z_{\mathfrak{A}} = 0$$

übergeht, ist z_{n+1} eine lineare Function der Variabelen z_t, dz_{n+1} dieselbe lineare Function der Differentiale dz_t. Da ferner $(t-t_0)^2 \Gamma(y'(0)) = \Gamma(z)$ ist, so hat man diese Ausdrücke der Grössen $y_{\mathfrak{A}}$ durch die Variabelen $z_{\mathfrak{A}}$

$$y_{\mathfrak{A}} = y_{\mathfrak{A}}(0) \cos\sqrt{2\alpha\Gamma(z)} + \frac{z_{\mathfrak{A}}}{\sqrt{2\alpha\Gamma(z)}} \sin\sqrt{2\alpha\Gamma(z)}.$$

Wenn man diese Ausdrücke in die Form $\Gamma(dy)$ substituirt, so kommt vermöge bekannter Eigenschaften der quadratischen Formen

$$(7.)\quad \begin{cases} \Gamma(dy) \\ = (d\cos\sqrt{2\alpha\Gamma(z)})^2\Gamma(y_0) + \left(\frac{\sin\sqrt{2\alpha\Gamma(z)}}{\sqrt{2\alpha\Gamma(z)}}\right)^2 \Gamma(dz) + \left(d\frac{\sin\sqrt{2\alpha\Gamma(z)}}{\sqrt{2\alpha\Gamma(z)}}\right)^2\Gamma(z) \\ \quad + \frac{\sin\sqrt{2\alpha\Gamma(z)}}{\sqrt{2\alpha\Gamma(z)}}\, d\frac{\sin\sqrt{2\alpha\Gamma(z)}}{\sqrt{2\alpha\Gamma(z)}}\, d\Gamma(z). \end{cases}$$

Es sei $g_0(dy)$ diejenige Form, die aus $g(dy)$ hervorgeht, indem y_t durch $y_t(0)$ ersetzt wird; dann ist in Folge von (5.) $\Gamma(y'(0)) = g_0(y'(0))$, und deshalb

$$\Gamma(z) = g_0(z), \qquad \Gamma(dz) = g_0(dz).$$

Substituirt man diese Darstellungen in die Gleichung (7.) und schreibt für $\Gamma(y_0)$ seinen Werth $\frac{1}{2\alpha}$, so liefert in Folge der Gleichung $\Gamma(dy) = g(dy)$ eine einfache Reduction den Ausdruck des Normaltypus $\chi(dz)$, in den die Form $g(dy)$ durch die Einführung der Normalvariabelen z_t übergeht,

$$(8.)\quad \chi(dz) = (d\sqrt{g_0(z)})^2 + \frac{\sin^2\sqrt{2\alpha g_0(z)}}{2\alpha g_0(z)}(g_0(dz) - (d\sqrt{g_0(z)})^2).$$

2.

Wenn eine Form $f(dx)$ mit der Form $g(dy)$ des vorigen Artikels zu derselben Classe gehört, und wenn man das System von Normalvariabelen der Form $f(dx)$, welches dem System z_t der Form $g(dy)$ entspricht, mit u_a be-

zeichnet, so bestehen die Gleichungen

$$f_0(u) = g_0(z), \qquad f_0(du) = g_0(dz),$$

wie Bd. LXX, pag. 90ff. bemerkt worden. Aus diesem Grunde giebt die Gleichung (8.) die folgende Darstellung des Normaltypus $\varphi(du)$ für jede Form $f(dx)$, welche mit $g(dy)$ zu derselben Classe gehört,

$$(9.)\qquad \varphi(du) = (d\sqrt{f_0(u)})^2 + \frac{\sin^2\sqrt{2\alpha f_0(u)}}{2\alpha f_0(u)}\left(f_0(du) - (d\sqrt{f_0(u)})^2\right).$$

Diese Darstellung geht aus der Formel (51''.) hervor, wenn der Grösse m der besondere Werth

$$(10.)\qquad m = \frac{\sin\sqrt{2\alpha f_0(u)}}{\sqrt{\alpha}}$$

beigelegt wird. Die in Rede stehende Classe von Formen gehört also zu dem in (51''.) definirten Geschlecht von Formen, und hat noch den speciellen Charakter, dass m eine reine Function der Grösse $f_0(u)$ ist.

Wird in dem Ausdruck von m statt $\sqrt{2f_0(u)}$ die Grösse $\sqrt{2h}(t-t_0)$ eingeführt, so folgt die Gleichung

$$\frac{1}{m}\frac{d^2m}{h\,dt^2} = -2\alpha.$$

Da dieser Werth eine von den Grössen x_a und $x_a(0)$ unabhängige Constante ist, so lehren die in art. 10, I angestellten Betrachtungen, dass für den Quotienten der entsprechenden quadrilinearen Formen Ψ und F die Gleichung gilt

$$(11.)\qquad \frac{\Psi(\overset{1}{dx}, \overset{1}{\delta x}, dx, \delta x)}{F(\overset{1}{dx}, \overset{1}{\delta x}, dx, \delta x)} = -2\alpha.$$

Mithin hat auch das *Riemann*sche Krümmungsmass k für jedes Werthsystem $(x_1, x_2, \ldots x_n)$ den unveränderlichen Werth

$$k = \alpha.$$

Weil m gegenwärtig eine reine Function von $f_0(u)$ ist, so kann $\varphi(du)$ durch die in den Formeln (55.), (58.), (59.), I. enthaltene Substitution transformirt werden. Es ergeben sich die Formeln

$$(12.)\qquad u_a = \frac{\sqrt{f_0(u)}}{\sqrt{f_0(\xi)}}\xi_a, \qquad \sqrt{\frac{\alpha f_0(\xi)}{2}} = \operatorname{tg}\sqrt{\frac{\alpha f_0(u)}{2}},$$

mithin kommt

$$(13.)\qquad \frac{m^2}{2f_0(\xi)} = \frac{1}{\left(1+\frac{\alpha}{2}f_0(\xi)\right)^2},$$

und deshalb

$$(14.)\quad \varphi(du) = \frac{f_0(d\xi)}{\left(1+\frac{\alpha}{2}f_0(\xi)\right)^2}.$$

Ich habe jetzt die mir bekannt gewordenen Arbeiten zu erwähnen, die sich auf die Classe von Formen beziehen, welcher die in (3.) definirte Form $g(dy)$ angehört*). An dem Schlusse des §. 4 der angeführten Abhandlung spricht sich *Riemann* so aus: „Die Massverhältnisse dieser Mannichfaltigkeiten (d. i. der Mannichfaltigkeiten mit constantem Krümmungsmass) hängen nur von dem Werthe des Krümmungsmasses ab, und in Bezug auf die analytische Darstellung mag bemerkt werden, dass, wenn man diesen Werth durch α bezeichnet, dem Ausdruck für das Linienelement die Form

$$\frac{1}{1+\frac{\alpha}{4}\Sigma x^2}\sqrt{\Sigma dx^2}$$

gegeben werden kann.“ Der durch die Gleichung (14.) bestimmte Ausdruck der Grösse $\sqrt{2\varphi(du)}$ geht in den von *Riemann* bezeichneten Ausdruck über, wenn daselbst die Form $f_0(d\xi)$ durch $\frac{1}{2}\sum_a dx_a^2$, die Form $f_0(\xi)$ durch $\frac{1}{2}\sum_a x_a^2$ ersetzt wird. Eine derartige Transformation durch eine lineare Substitution, die von den ξ_t zu den x_a führt, ist immer möglich, weil die Determinante Δ_0 als nicht verschwindend betrachtet wird; die betreffende Substitution hat dann und nur dann reelle Coefficienten, wenn die Form $f_0(d\xi)$ eine wesentlich positive ist. Es sind ferner zwei Arbeiten von Herrn *Beltrami* zu nennen, teoria fondamentale degli spazii di curvatura costante (Annali di matematica, serie II, tom. II, fasc. III), und saggio di interpretazione della geometria non-euclidea (Giornale di matematiche, pubbl. p. *G. Battaglini* Vol. VI). Der Ausdruck

*) Die obige Ableitung der Form $g(dy)$ aus der Form $\Gamma(dy)$ entspricht dem ersten Schritte des Beweises, den *Jacobi* in den Vorlesungen über Dynamik pag. 234 von dem *Abel*schen Theorem gegeben hat, und dessen Beziehung zu der Theorie der Formen von n Differentialen Bd. LXXI, pag. 284 d. J. in einer Anmerkung hervorgehoben ist. Die in jenem Aufsatze mit $D(\omega)=0$ bezeichnete Gleichung geht durch die gegenwärtigen Notationen in die Gleichung $\left(\frac{1}{\sqrt{2\Gamma(y)}}+\omega\right)^n = (\sqrt{\alpha}+\omega)^n = 0$ über; deshalb werden die Coefficienten $\frac{D_2}{D_0}, \frac{D_4}{D_0}, \ldots$ der Potenzen $\omega^n, \omega^{n-2}, \ldots$, deren Bedeutung Bd. LXXI, pag. 293ff. d. J. entwickelt ist, durch die Gleichung

$$\frac{D_{2q}}{D_0} = \frac{n(n-1)\ldots(n-2q+1)}{1.2\ldots(2q)}\alpha^q$$

bestimmt.

(9.) des Normaltypus $\varphi(du)$ verwandelt sich in den Ausdruck von $\frac{1}{2}ds^2$, der in der Formel (20.) der erstgenannten Abhandlung gegeben ist, sobald $f_0(du)$ durch $\frac{1}{2}\sum_a dz_a^2$, $f_0(u)$ durch $\frac{1}{2}\sum_a z_a^2 = \frac{1}{2}\varrho^2$, die Constante α durch den Werth $-\frac{1}{R^2}$ ersetzt wird. Die zweite Abhandlung des Herrn *Beltrami* enthält eine eingehende Entwickelung des Zusammenhanges, welcher zwischen den verschiedenen Theorieen des imaginären Raumes besteht, und erklärt auch die Aussage, welche *Gauss* in einem Briefe an *Schumacher* vom 12. Juli 1831 über die Länge der halben Kreisperipherie in einer solchen Theorie gemacht hat. Ebenfalls gehört hierher die Arbeit des Herrn *Helmholtz*, „über die Thatsachen, die der Geometrie zum Grunde liegen". (Nachrichten der K. G. d. Wiss. zu Göttingen 1868, Jun. 3). Nimmt man $n = 4$, $\gamma(dy) = \frac{1}{2}(dy_1^2 + dy_2^2 + dy_3^2)$, also $\gamma(y) = \frac{1}{2}(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2)$, so wird die Gleichung (2.) durch die Substitution

$$y_1 = X,\ y_2 = Y,\ y_3 = Z,\ y_4 = S + R,$$
$$\frac{1}{\alpha} = R^2,$$

mit der daselbst pag. 220 gegebenen Gleichung identisch.

3.

Von der Betrachtung einer speciellen Classe von Formen wenden wir uns jetzt zu der Begründung des gegen das Ende der ersten Abtheilung ausgesprochenen allgemeinen Satzes, dass bei einer gegebenen Form $f(dx)$ aus der Gleichung (53^b.), I,

$$\Psi(x', \overset{1}{\delta}x, x', \delta x) = \frac{1}{m}\frac{d^2 m}{h\, dt^2} F(x', \overset{1}{\delta}x, x', \delta x)$$

und der Voraussetzung

$$\lim\left(\frac{m}{\sqrt{2h}(t-t_0)}\right)_{t=t_0} = 1$$

die Gleichung (51.)

$$\varphi(du) - (d\sqrt{f_0(u)})^2 = \frac{m^2}{2f_0(u)}(f_0(du) - (d\sqrt{f_0(u)})^2)$$

mit Nothwendigkeit folge. Es ist dort erwähnt worden, dass die Constante h als positiv gilt, mithin $f_0(u)$ positiv ist und nur mit den sämmtlichen u_a zusammen gleich Null wird, dass ferner die Grösse m dieselbe Eigenschaft hat. Diese Voraussetzungen sind nothwendig für die anzustellende Schlussfolgerung, welche sich durchaus auf dem Gebiete der reellen Grössen bewegt.

Der Beweis des in Rede stehenden Satzes ist Bd. LXX, pag. 94ff. für diejenige Classe von Formen gegeben worden, die in eine Form mit constanten Coefficienten transformirt werden kann. Wie schon bemerkt, ist diese

Classe in dem oben definirten Geschlecht von Formen durch die Gleichung

$$m = \sqrt{2f_0(u)} = \sqrt{2h}(t-t_0)$$

charakterisirt. Vermöge der Gleichung $\frac{1}{m}\frac{d^2m}{h\,dt^2} = 0$ wird dann aus (11.) die Gleichung

$$\Psi(\overset{1}{d}x, \overset{1}{\delta}x, dx, \delta x) \;=\; 0,$$

welche eben das directe Criterium der in Rede stehenden Classe von Formen ausmacht. Die für den angegebenen Zweck gebildete Beweismethode lässt sich nun zunächst auf diejenigen Formen übertragen, bei denen $m = \frac{\sin\sqrt{2\alpha f_0(u)}}{\sqrt{\alpha}}$, oder m überhaupt eine Function der Grösse $f_0(u)$ ist. Die Erörterung wird deshalb von diesen Formen ausgehen, und zwar an diejenige Transformation derselben anknüpfen, welche in art. 9, I, durch die Gleichungen

$$u_a = \frac{\sqrt{f_0(u)}}{\sqrt{f_0(\xi)}}\xi_a, \qquad \frac{d\sqrt{f_0(u)}}{d\sqrt{f_0(\xi)}} = \frac{m}{\sqrt{2f_0(\xi)}},$$

$$\frac{\sqrt{f_0(\xi)}}{\sqrt{f_0(u)}} = e^{\int_0^r\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{r}\right)dr}, \qquad \varphi(du) = \frac{m^2}{2f_0(\xi)}f_0(d\xi)$$

dargestellt ist.

Wenn man jetzt die Bezeichnung

$$(15.)\qquad \sigma = \frac{2f_0(\xi)}{m^2} = \frac{r^2}{m^2}e^{2\int_0^r\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{r}\right)dr}$$

einführt, und die Gleichung $\varphi(du) = f(dx)$ anwendet, so giebt die letzte der vorstehenden Gleichungen die Relation

$$(15^a.)\qquad \sigma f(dx) = \overline{f(dx)} = f_0(d\xi).$$

Hier sind die Variabelen x_a zuerst durch die Normalvariabelen u_t, dann die Normalvariabelen u_t in der angegebenen Weise durch die Variabelen ξ_t auszudrücken, und es mögen dadurch für die Differentiale dx_a die folgenden Ausdrücke entstehen

$$(16.)\qquad dx_a \;=\; c_{a,1}d\xi_1 + c_{a,2}d\xi_2 + \cdots + c_{a,n}d\xi_n.$$

Alle von der Form $\sigma f(dx) = \overline{f(dx)}$ herkommenden Grössenverbindungen sollen durch die für $f(dx)$ eingeführten entsprechenden Benennungen mit Hinzufügen eines Striches bezeichnet werden. Sobald die Form $\sigma f(dx) = \overline{f(dx)}$ durch die Einführung der Variabelen ξ_t in eine Form mit constanten Coefficienten übergeht, so müssen nach einer Bd. LXX, pag. 95 gemachten Bemerkung die Grössen

$c_{\iota,\lambda}$ der Gleichung (16.), als Functionen der Variabelen x_ι aufgefasst, dem System von partiellen Differentialgleichungen genügen, welches in der Formel

$$\sum_{\mathfrak{b}} \bar{a}_{\iota,\mathfrak{b}} dc_{\mathfrak{b},\lambda} + \tfrac{1}{2}\sum_{\mathfrak{b}} \frac{\partial \overline{f_\iota(dx)}}{\partial dx_{\mathfrak{b}}} c_{\mathfrak{b},\lambda} = 0$$

enthalten ist. Wenn ferner die hier auftretenden Grössen x_ι durch die Integrationswerthe des Systems der isoperimetrischen Differentialgleichungen (3.), I, ersetzt, und in Functionen der Constanten $x_\iota(0)$, $x'_\iota(0)$ und der Variabele $t-t_0$ verwandelt werden, so genügen die Grössen $c_{\mathfrak{b},\lambda}$, als Functionen von t, dem entsprechenden System von gewöhnlichen Differentialgleichungen

$$(17.)\qquad \sum_{\mathfrak{b}} \bar{a}_{\iota,\mathfrak{b}} \frac{dc_{\mathfrak{b},\lambda}}{dt} + \tfrac{1}{2}\sum_{\mathfrak{b}} \frac{\partial \overline{f_\iota(x')}}{\partial x_{\mathfrak{b}}} c_{\mathfrak{b},\lambda} = 0.$$

Wenn es nun möglich ist, unter der Voraussetzung der Gleichung (53^b.) und der Voraussetzung, dass m eine reine Function von $f_0(u)$ ist, zu zeigen, dass die Grössen $c_{\iota,\lambda}$ der Gleichung (16.), die aus den Relationen

$$u_\iota = \frac{\sqrt{f_0(u)}}{\sqrt{f_0(\xi)}}\xi_\iota,\quad \frac{d\sqrt{f_0(u)}}{d\sqrt{f_0(\xi)}} = \frac{m}{\sqrt{2f_0(\xi)}},\quad \frac{\sqrt{f_0(\xi)}}{\sqrt{f_0(u)}} = e^{\int_0^r\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{r}\right)dr}$$

hervorgehen, das System von Differentialgleichungen (17.) befriedigen, und dass ferner dieses System (17.) die Gleichung

$$\frac{2f_0(\xi)}{m^2} f(dx) = f_0(d\xi)$$

zur Folge hat, so ergiebt sich die Gültigkeit der Gleichung (51.) unmittelbar, und die gemachte Behauptung ist für die in Rede stehenden Formen begründet. Diesem Gedankengange entsprechend soll zunächst das System von Differentialgleichungen (17.) und das System von Grössen $c_{\iota,\lambda}$ explicite dargestellt werden.

4.

Um für die Form $\sigma f(dx) = \overline{f(dx)}$ die Functionen $\overline{f_\iota(dx)}$ zu bilden, hat man in den Formeln (31.), I, die Coefficienten $a_{\iota,\lambda}$ durch die Coefficienten $\bar{a}_{\iota,\lambda} = \sigma a_{\iota,\lambda}$ zu ersetzen; dies giebt die Ausdrücke

$$(18.)\qquad \overline{f_\iota(dx)} = \sigma f_\iota(dx) + d\sigma\frac{\partial f(dx)}{\partial dx_\iota} - \frac{\partial\sigma}{\partial x_\iota} f(dx),$$

und demzufolge die Ableitungen

$$(19.)\qquad \frac{\partial \overline{f_\iota(dx)}}{\partial dx_{\mathfrak{b}}} = \sigma\frac{\partial f_\iota(dx)}{\partial dx_{\mathfrak{b}}} + d\sigma a_{\iota,\mathfrak{b}} + \frac{\partial\sigma}{\partial x_{\mathfrak{b}}}\frac{\partial f(dx)}{\partial dx_\iota} - \frac{\partial\sigma}{\partial x_\iota}\frac{\partial f(dx)}{\partial dx_{\mathfrak{b}}}.$$

Nun ist der Factor σ in dem gegenwärtigen Falle durch die Gleichung (15.)

$$\sigma = \frac{2f_0(\xi)}{m^2} = \frac{r^2}{m^2} e^{2\int_0^r \left(\frac{1}{m} - \frac{1}{r}\right) dr}$$

bestimmt, und daher, weil m eine reine Function von $f_0(u) = \frac{1}{2} r^2$ ist, ebenfalls eine reine Function $f_0(u)$. Man hat daher bei den Ableitungen der Function σ die Gleichung (12.), I, zu benutzen, nach welcher

$$\frac{\partial f_0(u)}{\partial x_\mathfrak{b}} = \frac{\partial f(v)}{\partial v_\mathfrak{b}} = (t - t_0) \frac{\partial f(x')}{\partial x'_\mathfrak{b}}$$

ist. Vermöge derselben wird

$$(20.) \quad \frac{\partial \sigma}{\partial x_\mathfrak{b}} \frac{\partial f(x')}{\partial x'_\mathfrak{a}} - \frac{\partial \sigma}{\partial x_\mathfrak{a}} \frac{\partial f(x')}{\partial x'_\mathfrak{b}} = 0,$$

und deshalb erhält $\frac{\partial f_\mathfrak{a}(x')}{\partial x'_\mathfrak{b}}$ den Werth

$$(21.) \quad \frac{\partial \overline{f_\mathfrak{a}(x')}}{\partial x'_\mathfrak{b}} = \sigma \frac{\partial f_\mathfrak{a}(x')}{\partial x'_\mathfrak{b}} + \frac{d\sigma}{dt} a_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}.$$

Die linke Seite von (17.) verwandelt sich daher in das Aggregat

$$\sum_\mathfrak{b} \sigma a_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} \frac{dc_{\mathfrak{b},\mathfrak{l}}}{dt} + \frac{1}{2} \sum_\mathfrak{b} \left(\sigma \frac{\partial f_\mathfrak{a}(x')}{\partial x'_\mathfrak{b}} + \frac{d\sigma}{dt} a_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} \right) c_{\mathfrak{b},\mathfrak{l}}$$

$$= \sqrt{\sigma} \left(\sum_\mathfrak{b} a_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} \frac{d(c_{\mathfrak{b},\mathfrak{l}} \sqrt{\sigma})}{dt} + \frac{1}{2} \sum_\mathfrak{b} \frac{\partial f_\mathfrak{a}(x')}{\partial x'_\mathfrak{b}} (c_{\mathfrak{b},\mathfrak{l}} \sqrt{\sigma}) \right).$$

Man darf dieses System von Differentialgleichungen dadurch ersetzen, dass man sagt, das System Differentialgleichungen

$$(22.) \quad \sum_\mathfrak{b} a_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} \frac{d\zeta_\mathfrak{b}}{dt} + \frac{1}{2} \sum_\mathfrak{b} \frac{\partial f_\mathfrak{a}(x')}{\partial x'_\mathfrak{b}} \zeta_\mathfrak{b} = 0$$

werde durch das System von Grössen

$$(23.) \quad \zeta_\mathfrak{b} = c_{\mathfrak{b},\mathfrak{l}} \sqrt{\sigma}$$

integrirt. Da der Buchstabe $\mathfrak{l}$ von 1 bis n geht, so involvirt diese Gleichung n Systeme von Werthen $\zeta_\mathfrak{b}$, und das System (22.) wird durch den Complex derselben *vollständig* integrirt. Für die specielle Voraussetzung $m = \sqrt{2f_0(u)}$ ist diese Bemerkung Bd. LXX, pag. 101 ausgesprochen worden.

Es sind jetzt die Ausdrücke $c_{\mathfrak{b},\mathfrak{l}} \sqrt{\sigma}$ darzustellen. Man hat

$$\frac{d\sqrt{f_0(u)}}{d\sqrt{f_0(\xi)}} = \frac{m}{\sqrt{2f_0(\xi)}}, \qquad \sigma = \frac{2f_0(\xi)}{m^2},$$

mithin

$$\sqrt{\sigma} = \frac{d\sqrt{f_0(\xi)}}{d\sqrt{f_0(u)}};$$

ferner ist

$$(24.)\qquad c_{b,1} = \frac{\partial x_b}{\partial u_1}\frac{\partial u_1}{\partial \xi_1}+\cdots+\frac{\partial x_b}{\partial u_n}\frac{\partial u_n}{\partial \xi_1},$$

folglich

$$(25.)\qquad c_{b,1}\sqrt{\sigma} = \sum_b \frac{\partial x_b}{\partial u_b}\,\frac{d\sqrt{f_0(\xi)}}{d\sqrt{f_0(u)}}\,\frac{\partial u_b}{\partial \xi_1}.$$

Aus der Gleichung $u_b = \frac{\sqrt{f_0(u)}}{\sqrt{f_0(\xi)}}\xi_b$ entsteht nun die Relation

$$\frac{d\sqrt{f_0(\xi)}}{d\sqrt{f_0(u)}}du_b = \left(1-\frac{\sqrt{f_0(u)}}{\sqrt{f_0(\xi)}}\,\frac{d\sqrt{f_0(\xi)}}{d\sqrt{f_0(u)}}\right)\frac{d\sqrt{f_0(\xi)}}{\sqrt{f_0(u)}}u_b+\frac{\sqrt{f_0(u)}}{\sqrt{f_0(\xi)}}\,\frac{d\sqrt{f_0(\xi)}}{d\sqrt{f_0(u)}}d\xi_b.$$

Es ist aber

$$\frac{\sqrt{f_0(u)}}{\sqrt{f_0(\xi)}}\,\frac{d\sqrt{f_0(\xi)}}{d\sqrt{f_0(u)}} = \frac{\sqrt{2f_0(u)}}{m},$$

und dadurch kommt die Gleichung

$$(26.)\qquad \frac{d\sqrt{f_0(\xi)}}{d\sqrt{f_0(u)}}du_b = \left(1-\frac{\sqrt{2f_0(u)}}{m}\right)\frac{d\sqrt{f_0(\xi)}}{\sqrt{f_0(u)}}u_b+\frac{\sqrt{2f_0(u)}}{m}d\xi_b.$$

Wenn man jetzt bemerkt, dass

$$\frac{\partial\sqrt{f_0(\xi)}}{\partial \xi_1} = \frac{\partial\sqrt{f_0(u)}}{\partial u_1}$$

ist, und wie früher das Zeichen $\delta_{b,1}$ anwendet, so ergiebt sich

$$(27.)\qquad \frac{d\sqrt{f_0(\xi)}}{d\sqrt{f_0(u)}}\frac{\partial u_b}{\partial \xi_1} = \left(1-\frac{\sqrt{2f_0(u)}}{m}\right)\frac{\partial\sqrt{f_0(u)}}{\partial u_1}\,\frac{u_b}{\sqrt{f_0(u)}}+\frac{\sqrt{2f_0(u)}}{m}\delta_{b,1},$$

und die Substitution in (25.) liefert die folgenden Ausdrücke der Grössen $c_{b,1}\sqrt{\sigma}$,

$$(28.)\qquad c_{b,1}\sqrt{\sigma} = \frac{\sqrt{2f_0(u)}}{m}\,\frac{\partial x_b}{\partial u_1}+\left(1-\frac{\sqrt{2f_0(u)}}{m}\right)\frac{\partial\sqrt{f_0(u)}}{\sqrt{f_0(u)}\partial u_1}\sum_b\frac{\partial x_b}{\partial u_b}u_b.$$

Will man die Abhängigkeit dieser Ausdrücke von der Variabele t deutlich hervortreten lassen, so hat man sich der Gleichungen $\sqrt{2f_0(u)} = \sqrt{2h}\,(t-t_0)$, $u_1 = (t-t_0)x_1'(0)$ zu bedienen. Vermöge derselben ist

$$\frac{\partial x_b}{\partial u_1} = \frac{\partial x_b}{(t-t_0)\partial x_1'(0)},\qquad \sum_b\frac{\partial x_b}{\partial u_b}u_b = (t-t_0)\frac{dx_b}{dt},$$

der Ausdruck $\frac{\partial\sqrt{f_0(u)}}{\partial u_1}$ wird eine Constante, und die Gleichung (28.) verwandelt sich in diese

$$(29.)\qquad c_{b,1}\sqrt{\sigma} = \frac{\sqrt{2h}}{m}\,\frac{\partial x_b}{\partial x_1'(0)}+\frac{\partial\sqrt{f_0(u)}}{\sqrt{h}\,\partial u_1}\left(1-\frac{(t-t_0)\sqrt{2h}}{m}\right)\frac{dx_b}{dt}.$$

5.

Die Ausdrücke auf der rechten Seite der letzten Gleichung, die unter der Annahme gebildet sind, dass die Grösse m eine reine Function von $f_0(u)$

ist, bieten ein Mittel, um das aufgestellte Theorem auch dann zu beweisen, wenn die Grösse m dieser speciellen Beschränkung nicht unterworfen ist. Ich hebe daher diese Beschränkung gegenwärtig auf, und werde zeigen, dass, sobald die Gleichung (53^b.), I, gilt, das System Differentialgleichungen (22.)

$$\sum_{\mathfrak{b}} a_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} \frac{d\zeta_{\mathfrak{b}}}{dt} + \tfrac{1}{2} \sum_{\mathfrak{b}} \frac{\partial f_{\mathfrak{a}}(x')}{\partial x'_{\mathfrak{b}}} \zeta_{\mathfrak{b}} = 0$$

durch die n Systeme von Werthen

$$(30.) \qquad \zeta_{\mathfrak{b}} = \frac{\sqrt{2h}}{m} \frac{\partial x_{\mathfrak{b}}}{\partial x'_{\mathfrak{l}}(0)} + \frac{\partial \sqrt{f_0(u)}}{\sqrt{h}\,\partial u_{\mathfrak{l}}} \left(1 - \frac{(t-t_0)\sqrt{2h}}{m}\right) \frac{dx_{\mathfrak{b}}}{dt}$$

integrirt wird, und dass in Folge dessen die Gleichung (51.), I, besteht.

Bei der Substitution der Werthe $\zeta_{\mathfrak{b}}$ aus (30.) in die linke Seite von (22.) kann man die (34.), I, eingeführte Bezeichnung

$$\Psi_{\mathfrak{a}}(dx, \overset{1}{dx}) = \sum_{\mathfrak{b}} a_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}\, d\overset{1}{dx}_{\mathfrak{b}} + f_{\mathfrak{a}}(dx, \overset{1}{dx})$$

von der Voraussetzung independenter Differentiale auf die Voraussetzung bestimmter Differentialquotienten übertragen, so dass

$$\Psi_{\mathfrak{a}}\left(\frac{dx}{dt}, \frac{\partial x}{\partial x'_{\mathfrak{l}}(0)}\right) = \sum_{\mathfrak{b}} a_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} \frac{\partial^2 x_{\mathfrak{b}}}{\partial t\, \partial x'_{\mathfrak{l}}(0)} + \tfrac{1}{2} \sum_{\mathfrak{b}} \frac{\partial f_{\mathfrak{a}}(x')}{\partial x'_{\mathfrak{b}}} \frac{\partial x_{\mathfrak{b}}}{\partial x'_{\mathfrak{l}}(0)}$$

wird; dann entsteht das Resultat

$$(31.) \frac{\sqrt{2h}}{m} \Psi_{\mathfrak{a}}\left(\frac{dx}{dt}, \frac{\partial x}{\partial x'_{\mathfrak{l}}(0)}\right) + \frac{d\frac{\sqrt{2h}}{m}}{dt} \sum_{\mathfrak{b}} a_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} \frac{\partial x_{\mathfrak{b}}}{\partial x'_{\mathfrak{l}}(0)} - \frac{\partial \sqrt{f_0(u)}}{\sqrt{h}\,\partial u_{\mathfrak{l}}} \frac{d\frac{(t-t_0)\sqrt{2h}}{m}}{dt} \sum_{\mathfrak{b}} a_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} \frac{dx_{\mathfrak{b}}}{dt}.$$

Um den ersten der angegebenen Theile des Beweises zuerst zu erledigen, multiplicire ich dieses Aggregat mit dem Factor $\frac{m^2}{2h}$ und erhalte den Ausdruck

$$(32.)\ \Phi_{\mathfrak{a},\mathfrak{l}} = \frac{m}{\sqrt{2h}} \Psi_{\mathfrak{a}}\left(\frac{dx}{dt}, \frac{\partial x}{\partial x'_{\mathfrak{l}}(0)}\right) - \frac{1}{\sqrt{2h}} \frac{dm}{dt} \sum_{\mathfrak{b}} a_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} \frac{\partial x_{\mathfrak{b}}}{\partial x'_{\mathfrak{l}}(0)} - \frac{\partial \sqrt{f_0(u)}}{\sqrt{h}\,\partial u_{\mathfrak{l}}} \left(\frac{m}{\sqrt{2h}} - \frac{t-t_0}{\sqrt{2h}} \frac{dm}{dt}\right) \sum_{\mathfrak{b}} a_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} \frac{dx_{\mathfrak{b}}}{dt}.$$

Derselbe hat die Eigenschaft, für $t = t_0$ zu verschwinden, weil für $t = t_0$ die Function m nach der Voraussetzung gleich Null, $\frac{dm}{\sqrt{2h}\,dt} = 1$, also endlich, $\frac{\partial x_{\mathfrak{b}}}{\partial x'_{\mathfrak{l}}(0)}$ nach früheren Erörterungen gleich Null ist. Der Ausdruck $\Phi_{\mathfrak{a},\mathfrak{l}}$ muss aber auch für ein indefinites t gleich Null bleiben, wenn das System von Differentialgleichungen

$$(33.) \qquad \frac{d\Phi_{\mathfrak{b}}}{dt} - \tfrac{1}{2} \sum_{\mathfrak{c},\mathfrak{b}} \frac{A_{\mathfrak{c},\mathfrak{b}}}{\Delta} \frac{\partial f_{\mathfrak{b}}(x')}{\partial x'_{\mathfrak{b}}} \Phi_{\mathfrak{c}} = 0$$

durch das System von Grössen

$$(34.)\qquad \Phi_\mathfrak{b} = \Phi_{\mathfrak{b},\mathfrak{l}}$$

erfüllt wird. Denn die Integration dieses Systems von Differentialgleichungen kann nur auf *eine* Art geschehen, sobald die Werthe der Variabelen $\Phi_\mathfrak{b}$ für $t = t_0$ vorgeschrieben sind; wenn aber für $t = t_0$ die Werthe $\Phi_\mathfrak{b} = 0$ gefordert sind, so genügen die Werthe $\Phi_\mathfrak{b} = 0$ für ein indefinites t.

Aus der Gleichung (38.), I, ergiebt sich, dass die linke Seite von (33.) durch die Substitution $\Phi_\mathfrak{b} = \sum\limits_\mathfrak{a} a_{\mathfrak{b},\mathfrak{a}} \dfrac{\partial x_\mathfrak{a}}{\partial x'_\mathfrak{l}(0)}$ in $\Psi_\mathfrak{b}\left(\dfrac{dx}{dt}, \dfrac{\partial x}{\partial x'_\mathfrak{l}(0)}\right)$, durch die Substitution $\Phi_\mathfrak{b} = \sum\limits_\mathfrak{a} a_{\mathfrak{b},\mathfrak{a}} \dfrac{dx_\mathfrak{a}}{dt}$ in $\Psi_\mathfrak{b}\left(\dfrac{dx}{dt}, \dfrac{dx}{dt}\right)$ übergeht. Es ist aber der letztere Ausdruck übereinstimmend mit der linken Seite der isoperimetrischen Differentialgleichungen in der Gestalt (3^a.), I, und deshalb gleich Null. Wenn daher die drei Bestandtheile des Aggregats $\Phi_{\mathfrak{b},\mathfrak{l}}$ in die linke Seite von (33.) eingesetzt werden, so liefert $\dfrac{m}{\sqrt{2h}} \Psi_\mathfrak{b}\left(\dfrac{dx}{dt}, \dfrac{\partial x}{\partial x'_\mathfrak{l}(0)}\right)$ das Resultat

$$\frac{m}{\sqrt{2h}}\left(\frac{d\Psi_\mathfrak{b}\left(\dfrac{dx}{dt}, \dfrac{\partial x}{\partial x'_\mathfrak{l}(0)}\right)}{dt} - \tfrac{1}{2}\sum_{\mathfrak{c},\mathfrak{b}} \frac{A_{\mathfrak{c},\mathfrak{b}}}{\Delta} \frac{\partial f_\mathfrak{b}(x')}{\partial x'_\mathfrak{b}} \Psi_\mathfrak{c}\left(\frac{dx}{dt}, \frac{\partial x}{\partial x'_\mathfrak{l}(0)}\right)\right)$$
$$+\frac{1}{\sqrt{2h}} \frac{dm}{dt} \Psi_\mathfrak{b}\left(\frac{dx}{dt}, \frac{\partial x}{\partial x'_\mathfrak{l}(0)}\right),$$

ferner $-\dfrac{1}{\sqrt{2h}} \dfrac{dm}{dt} \sum\limits_\mathfrak{a} a_{\mathfrak{b},\mathfrak{a}} \dfrac{\partial x_\mathfrak{a}}{\partial x'_\mathfrak{l}(0)}$ das Resultat

$$-\frac{1}{\sqrt{2h}} \frac{dm}{dt} \Psi_\mathfrak{b}\left(\frac{dx}{dt}, \frac{\partial x}{\partial x'_\mathfrak{l}(0)}\right) - \frac{1}{\sqrt{2h}} \frac{d^2m}{dt^2} \sum_\mathfrak{a} a_{\mathfrak{b},\mathfrak{a}} \frac{\partial x_\mathfrak{a}}{\partial x'_\mathfrak{l}(0)},$$

endlich

$$-\frac{\partial \sqrt{f_0(u)}}{\sqrt{h}\,\partial u_\mathfrak{l}}\left(\frac{m}{\sqrt{2h}} - \frac{t-t_0}{\sqrt{2h}} \frac{dm}{dt}\right) \sum_\mathfrak{a} a_{\mathfrak{b},\mathfrak{a}} \frac{dx_\mathfrak{a}}{dt}$$

das Resultat

$$-\frac{\partial \sqrt{f_0(u)}}{\sqrt{h}\,\partial u_\mathfrak{l}}\left(-\frac{t-t_0}{\sqrt{2h}} \frac{d^2m}{dt^2}\right) \sum_\mathfrak{a} a_{\mathfrak{b},\mathfrak{a}} \frac{dx_\mathfrak{a}}{dt}.$$

Die Addition giebt dann den Ausdruck

$$(35.)\quad \begin{cases} \dfrac{m}{\sqrt{2h}}\left(\dfrac{d\Psi_\mathfrak{b}\left(\dfrac{dx}{dt}, \dfrac{\partial x}{\partial x'_\mathfrak{l}(0)}\right)}{dt} - \tfrac{1}{2}\sum\limits_{\mathfrak{c},\mathfrak{b}} \dfrac{A_{\mathfrak{c},\mathfrak{b}}}{\Delta} \dfrac{\partial f_\mathfrak{b}(x')}{\partial x'_\mathfrak{b}} \Psi_\mathfrak{c}\left(\dfrac{dx}{dt}, \dfrac{\partial x}{\partial x'_\mathfrak{l}(0)}\right)\right) \\ -\dfrac{1}{\sqrt{2h}} \dfrac{d^2m}{dt^2}\left(\sum\limits_\mathfrak{a} a_{\mathfrak{b},\mathfrak{a}} \dfrac{\partial x_\mathfrak{a}}{\partial x'_\mathfrak{l}(0)} - (t-t_0) \dfrac{\partial \sqrt{f_0(u)}}{\sqrt{h}\,\partial u_\mathfrak{l}} \sum\limits_\mathfrak{a} a_{\mathfrak{b},\mathfrak{a}} x'_\mathfrak{a}\right). \end{cases}$$

Hier kann der zweite Bestandtheil des Factors von $\frac{d^2m}{dt^2}$ durch die Gleichung (12.), I, umgeformt werden; dieselbe giebt

$$2(t-t_0)\sqrt{h}\frac{\partial\sqrt{f_0(u)}}{\partial u_\mathfrak{k}} = \frac{\partial f_0(u)}{\partial u_\mathfrak{k}} = \sum_\mathfrak{c}\frac{\partial f(x')}{\partial x'_\mathfrak{c}}\frac{\partial x_\mathfrak{c}}{\partial x'_\mathfrak{k}(0)},$$

und dadurch kommt für (35.) die Darstellung

$$(35^a.)\quad \begin{cases} \frac{m}{\sqrt{2h}}\left(\frac{d\Psi_\mathfrak{b}\left(\frac{dx}{dt},\frac{\partial x}{\partial x'_\mathfrak{k}(0)}\right)}{dt} - \frac{1}{2}\sum_{\mathfrak{c},\mathfrak{b}}\frac{A_{\mathfrak{c},\mathfrak{b}}}{\Delta}\frac{\partial f_\mathfrak{b}(x')}{\partial x'_\mathfrak{b}}\Psi_\mathfrak{c}\left(\frac{dx}{dt},\frac{\partial x}{\partial x'_\mathfrak{k}(0)}\right)\right) \\ -\frac{1}{\sqrt{2h}}\frac{d^2m}{dt^2}\left(\sum_\mathfrak{a} a_{\mathfrak{b},\mathfrak{a}}\frac{\partial x_\mathfrak{a}}{\partial x'_\mathfrak{k}(0)} - \frac{1}{2h}\sum_\mathfrak{c}\frac{\partial f(x')}{\partial x'_\mathfrak{c}}\frac{\partial x_\mathfrak{c}}{\partial x'_\mathfrak{k}(0)}\sum_\mathfrak{a} a_{\mathfrak{b},\mathfrak{a}}x'_\mathfrak{a}\right). \end{cases}$$

Jetzt wende ich mich zu der als bestehend angenommenen Gleichung (53[b].), I, die, mit der Grösse m multiplicirt, diese Gestalt erhält

$$(36.)\quad m\Psi(x',\overset{1}{\delta}x,x',\delta x) - \frac{d^2m}{h\,dt^2}F(x',\overset{1}{\delta}x,x',\delta x) = 0,$$

bilde die Ableitung nach dem Differential $\overset{1}{\delta}x_\mathfrak{b}$ und ersetze die Differentiale $\delta x_\mathfrak{b}$ durch die Differentialquotienten $\frac{\partial x_\mathfrak{b}}{\partial x'_\mathfrak{k}(0)}$. Die Formeln (37.), I, und (54.), I, liefern beziehungsweise die Gleichungen

$$\frac{1}{2}\frac{\partial\Psi(\overset{1}{d}x,\overset{1}{\delta}x,dx,\delta x)}{\partial\overset{1}{\delta}x_\mathfrak{b}} = d\Psi_\mathfrak{b}(\delta x,\overset{1}{d}x) - \frac{1}{2}\sum_{\mathfrak{c},\mathfrak{b}}\frac{A_{\mathfrak{c},\mathfrak{b}}}{\Delta}\frac{\partial f_\mathfrak{b}(dx)}{\partial\,dx_\mathfrak{b}}\Psi_\mathfrak{c}(\delta x,\overset{1}{d}x)$$
$$-\delta\Psi_\mathfrak{b}(dx,\overset{1}{d}x) + \frac{1}{2}\sum_{\mathfrak{c},\mathfrak{b}}\frac{A_{\mathfrak{c},\mathfrak{b}}}{\Delta}\frac{\partial f_\mathfrak{b}(\delta x)}{\partial\,\delta x_\mathfrak{b}}\Psi_\mathfrak{c}(dx,\overset{1}{d}x),$$

und

$$\frac{\partial F(\overset{1}{d}x,\overset{1}{\delta}x,dx,\delta x)}{\partial\overset{1}{\delta}x_\mathfrak{b}} = \sum_\mathfrak{c}\frac{\partial f(dx)}{\partial\,dx_\mathfrak{c}}\overset{1}{d}x_\mathfrak{c}\sum_\mathfrak{a} a_{\mathfrak{b},\mathfrak{a}}\delta x_\mathfrak{a} - \sum_\mathfrak{c}\frac{\partial f(\overset{1}{d}x)}{\partial\,\overset{1}{d}x_\mathfrak{c}}\delta x_\mathfrak{c}\sum_\mathfrak{a} a_{\mathfrak{b},\mathfrak{a}}dx_\mathfrak{a}.$$

Nun ist, wie schon oben bemerkt, $\Psi_\mathfrak{b}\left(\frac{dx}{dt},\frac{dx}{dt}\right) = 0$, und deshalb auch

$$\frac{\partial\Psi_\mathfrak{b}\left(\frac{dx}{dt},\frac{dx}{dt}\right)}{\partial x'_\mathfrak{k}(0)} = 0,$$

mithin kommt, wenn $\frac{\partial x}{\partial x'_\mathfrak{k}(0)}$ für δx eintritt,

$$\frac{1}{2}\frac{\partial\Psi(x',\overset{1}{\delta}x,x',\delta x)}{\partial\overset{1}{\delta}x_\mathfrak{b}} = \frac{d\Psi_\mathfrak{b}\left(\frac{dx}{dt},\frac{\partial x}{\partial x'_\mathfrak{k}(0)}\right)}{dt} - \frac{1}{2}\sum_{\mathfrak{c},\mathfrak{b}}\frac{A_{\mathfrak{c},\mathfrak{b}}}{\Delta}\frac{\partial f_\mathfrak{b}(x')}{\partial x'_\mathfrak{b}}\Psi_\mathfrak{c}\left(\frac{dx}{dt},\frac{\partial x}{\partial x'_\mathfrak{k}(0)}\right),$$

$$\frac{\partial F(x',\overset{1}{\delta}x,x',\delta x)}{\partial\overset{1}{\delta}x_\mathfrak{b}} = 2f(x')\sum_\mathfrak{a} a_{\mathfrak{b},\mathfrak{a}}\frac{\partial x_\mathfrak{a}}{\partial x'_\mathfrak{k}(0)} - \sum_\mathfrak{c}\frac{\partial f(x')}{\partial x'_\mathfrak{c}}\frac{\partial x_\mathfrak{c}}{\partial x'_\mathfrak{k}(0)}\sum_\mathfrak{a} a_{\mathfrak{b},\mathfrak{a}}x'_\mathfrak{a}.$$

Durch das angegebene Verfahren folgt daher aus der Gleichung (36.), sobald $f(x') = h$ gesetzt wird, die Relation

$$(37.)\quad \begin{cases} m\left(\dfrac{d\Psi_{\mathfrak{b}}\left(\dfrac{dx}{dt}, \dfrac{\partial x}{\partial x'_{\mathfrak{k}}(0)}\right)}{dt} - \frac{1}{2}\sum_{\mathfrak{c},\mathfrak{b}} \dfrac{A_{\mathfrak{c}.\mathfrak{b}}}{\Delta} \dfrac{\partial f_{\mathfrak{b}}(x')}{\partial x'_{\mathfrak{b}}} \Psi_{\mathfrak{c}}\left(\dfrac{dx}{dt}, \dfrac{\partial x}{\partial x'_{\mathfrak{k}}(0)}\right)\right) \\ -\dfrac{d^2 m}{2h\,dt^2}\left(2h\sum_{\mathfrak{a}} a_{\mathfrak{b},\mathfrak{a}} \dfrac{\partial x_{\mathfrak{a}}}{\partial x'_{\mathfrak{k}}(0)} - \sum_{\mathfrak{c}} \dfrac{\partial f(x')}{\partial x'_{\mathfrak{c}}} \dfrac{\partial x_{\mathfrak{c}}}{\partial x'_{\mathfrak{k}}(0)} \sum_{\mathfrak{a}} a_{\mathfrak{b},\mathfrak{a}} x'_{\mathfrak{a}}\right) = 0. \end{cases}$$

Die linke Seite derselben stimmt bis auf den Factor $\sqrt{2h}$ mit dem Ausdruck (35″.) überein. Es ist somit erwiesen, dass dieser Ausdruck in Folge der Gleichung (53^b.), I, verschwinden muss; deshalb erfüllen die Ausdrücke $\Phi_{\mathfrak{b}} = \Phi_{\mathfrak{b},\mathfrak{k}}$ das System Differentialgleichungen (33.), und die Ausdrücke $\Phi_{\mathfrak{a},\mathfrak{k}}$ in (32.) sind für ein indefinites t gleich Null. Also befriedigen die n Systeme von Grössen $\zeta_{\mathfrak{b}}$ in (30.) das System Differentialgleichungen (22.), und der erste Punkt des zu leistenden Beweises ist absolvirt. Vermöge der über die Grösse m getroffenen Voraussetzung, dass $\lim.\dfrac{m}{\sqrt{2h}(t-t_0)}$ für $t-t_0=0$ gleich der Einheit ist, erhalten die Ausdrücke (30.) die Eigenschaft, für $t-t_0=0$ gleich $\delta_{\mathfrak{b},\mathfrak{k}}$ zu werden, und deshalb stellen die n Systeme von Ausdrücken, die den n Werthen der Zahl $\mathfrak{k}$ entsprechen, ein vollständiges System von Integralen des Systems (22.) dar.

Es bleibt jetzt noch übrig, aus den n^2 Gleichungen, die in der Formel $\Phi_{\mathfrak{a},\mathfrak{k}} = 0$ enthalten sind, die Gültigkeit der Gleichung (51.), I, zu deduciren. Zu diesem Zwecke ist es dienlich, das Aggregat

$$(38.)\quad \sum_{\mathfrak{a}} \Phi_{\mathfrak{a},\mathfrak{l}} \frac{\partial x_{\mathfrak{a}}}{\partial x'_{\mathfrak{k}}(0)} + \sum_{\mathfrak{b}} \Phi_{\mathfrak{b},\mathfrak{k}} \frac{\partial x_{\mathfrak{b}}}{\partial x'_{\mathfrak{l}}(0)}$$

zu betrachten, wo $\mathfrak{k}$ und $\mathfrak{l}$ ein beliebiges Paar von Zahlen bedeuten. Da nach einer gegen Ende des art. 6, I, gebrauchten Formel

$$\frac{\partial f_{\mathfrak{a}}(dx)}{\partial dx_{\mathfrak{b}}} + \frac{\partial f_{\mathfrak{b}}(dx)}{\partial dx_{\mathfrak{a}}} = 2\,da_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}$$

ist, so kommt

$$\begin{aligned} &\sum_{\mathfrak{a}} \Psi_{\mathfrak{a}}\left(\frac{dx}{dt}, \frac{\partial x}{\partial x'_{\mathfrak{l}}(0)}\right)\frac{\partial x_{\mathfrak{a}}}{\partial x'_{\mathfrak{k}}(0)} + \sum_{\mathfrak{b}} \Psi_{\mathfrak{b}}\left(\frac{dx}{dt}, \frac{\partial x}{\partial x'_{\mathfrak{k}}(0)}\right)\frac{\partial x_{\mathfrak{b}}}{\partial x'_{\mathfrak{l}}(0)} \\ -&\sum_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}\left(a_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} \frac{\partial^2 x_{\mathfrak{b}}}{\partial t\,\partial x'_{\mathfrak{l}}(0)} \frac{\partial x_{\mathfrak{a}}}{\partial x'_{\mathfrak{k}}(0)} + a_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} \frac{\partial^2 x_{\mathfrak{b}}}{\partial t\,\partial x'_{\mathfrak{k}}(0)} \frac{\partial x_{\mathfrak{b}}}{\partial x'_{\mathfrak{l}}(0)} + \frac{da_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}}{dt} \frac{\partial x_{\mathfrak{a}}}{\partial x'_{\mathfrak{k}}(0)} \frac{\partial x_{\mathfrak{b}}}{\partial x'_{\mathfrak{l}}(0)}\right) \\ -&\frac{d\sum_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} a_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} \dfrac{\partial x_{\mathfrak{a}}}{\partial x'_{\mathfrak{k}}(0)} \dfrac{\partial x_{\mathfrak{b}}}{\partial x'_{\mathfrak{l}}(0)}}{dt}. \end{aligned}$$

Man hat ferner, in Folge von (12.), I,

$$\frac{\partial\sqrt{f_0(u)}}{\partial u_\mathfrak{l}}\sum_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} a_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}\frac{\partial x_\mathfrak{a}}{\partial x'_\mathfrak{l}(0)}\frac{dx_\mathfrak{b}}{dt}+\frac{\partial\sqrt{f_0(u)}}{\partial u_\mathfrak{l}}\sum_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} a_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}\frac{\partial x_\mathfrak{b}}{\partial x'_\mathfrak{l}(0)}\frac{dx_\mathfrak{a}}{dt}$$

$$=\frac{\partial\sqrt{f_0(u)}}{\partial u_\mathfrak{l}}\frac{\partial f_0(u)}{\partial u_\mathfrak{l}}+\frac{\partial\sqrt{f_0(u)}}{\partial u_\mathfrak{l}}\frac{\partial f_0(u)}{\partial u_\mathfrak{l}}=4\sqrt{f_0(u)}\frac{\partial\sqrt{f_0(u)}}{\partial u_\mathfrak{l}}\frac{\partial\sqrt{f_0(u)}}{\partial u_\mathfrak{l}}.$$

Demnach wird das Aggregat (38.) gleich dem Ausdruck

$$(39.)\quad\begin{cases}\dfrac{m}{\sqrt{2h}}\dfrac{d\sum\limits_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} a_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}\dfrac{\partial x_\mathfrak{a}}{\partial x'_\mathfrak{l}(0)}\dfrac{\partial x_\mathfrak{b}}{\partial x'_\mathfrak{l}(0)}}{dt}+\dfrac{m^2}{2h}\dfrac{d\frac{\sqrt{2h}}{m}}{dt}\,2\sum\limits_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} a_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}\dfrac{\partial x_\mathfrak{a}}{\partial x'_\mathfrak{l}(0)}\dfrac{\partial x_\mathfrak{b}}{\partial x'_\mathfrak{l}(0)}\\[2ex] \qquad-\dfrac{m^2}{2h}\dfrac{d\frac{(t-t_0)\sqrt{2h}}{m}}{dt}\dfrac{4\sqrt{f_0(u)}}{\sqrt{h}}\dfrac{\partial\sqrt{f_0(u)}}{\partial u_\mathfrak{l}}\dfrac{\partial\sqrt{f_0(u)}}{\partial u_\mathfrak{l}},\end{cases}$$

welcher sich in die folgende Gestalt bringen lässt

$$(40.)\quad\left(\frac{m}{\sqrt{2h}}\right)^3\left(\frac{d\left(\frac{2h}{m^2}\sum\limits_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} a_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}\frac{\partial x_\mathfrak{a}}{\partial x'_\mathfrak{l}(0)}\frac{\partial x_\mathfrak{b}}{\partial x'_\mathfrak{l}(0)}\right)}{dt}-\frac{d\frac{2h(t-t_0)^2}{m^2}}{dt}\,2\frac{\partial\sqrt{f_0(u)}}{\partial u_\mathfrak{l}}\frac{\partial\sqrt{f_0(u)}}{\partial u_\mathfrak{l}}\right).$$

Nun sind die Grössen $\frac{\partial\sqrt{f_0(u)}}{\partial u_\mathfrak{l}}$ reine Constanten, die Summe

$$\tfrac{1}{2}\sum_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} a_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}\frac{\partial x_\mathfrak{a}}{(t-t_0)\partial x'_\mathfrak{l}(0)}\frac{\partial x_\mathfrak{b}}{(t-t_0)\partial x'_\mathfrak{l}(0)}$$

ist der Coefficient $\frac{1}{2}p_{\mathfrak{l},\mathfrak{l}}$ des Normaltypus $\varphi(du)$. Daher besteht die Gleichung

$$(41.)\quad\begin{cases}\sum\limits_{\mathfrak{a}}\Phi_{\mathfrak{a},\mathfrak{l}}\dfrac{\partial x_\mathfrak{a}}{\partial x'_\mathfrak{l}(0)}+\sum\limits_{\mathfrak{b}}\Phi_{\mathfrak{b},\mathfrak{l}}\dfrac{\partial x_\mathfrak{b}}{\partial x'_\mathfrak{l}(0)}\\[2ex] =\left(\dfrac{m}{\sqrt{2h}}\right)^3\dfrac{d\left(\frac{4h(t-t_0)^2}{m^2}\left(\frac{1}{2}p_{\mathfrak{l},\mathfrak{l}}-\frac{\partial\sqrt{f_0(u)}}{\partial u_\mathfrak{l}}\frac{\partial\sqrt{f_0(u)}}{\partial u_\mathfrak{l}}\right)\right)}{dt}.\end{cases}$$

Weil die linke Seite derselben für ein indefinites t als verschwindend nachgewiesen ist, so muss auch die rechte Seite für ein indefinites t verschwinden, und der Ausdruck

$$\frac{2h(t-t_0)^2}{m^2}\left(\tfrac{1}{2}p_{\mathfrak{l},\mathfrak{l}}-\frac{\partial\sqrt{f_0(u)}}{\partial u_\mathfrak{l}}\frac{\partial\sqrt{f_0(u)}}{\partial u_\mathfrak{l}}\right)$$

von t unabhängig sein. Für $t=t_0$ ist $\frac{2h(t-t_0)^2}{m^2}$ nach der Voraussetzung gleich der Einheit, $p_{\mathfrak{l},\mathfrak{l}}$ in Folge früherer Erörterungen gleich $a_{\mathfrak{l},\mathfrak{l}}(0)$; mithin gilt die Gleichung

$$(42.)\quad\frac{2h(t-t_0)^2}{m^2}\left(\tfrac{1}{2}p_{\mathfrak{l},\mathfrak{l}}-\frac{\partial\sqrt{f_0(u)}}{\partial u_\mathfrak{l}}\frac{\partial\sqrt{f_0(u)}}{\partial u_\mathfrak{l}}\right)=\tfrac{1}{2}a_{\mathfrak{l},\mathfrak{l}}(0)-\frac{\partial\sqrt{f_0(u)}}{\partial u_\mathfrak{l}}\frac{\partial\sqrt{f_0(u)}}{\partial u_\mathfrak{l}}.$$

Multiplicirt man diese Gleichung mit $du_{\mathfrak{k}} du_{\mathfrak{l}}$ und summirt nach den Buchstaben $\mathfrak{k}$, $\mathfrak{l}$, so entsteht die Gleichung

$$\frac{2f_0(u)}{m^2}\left(\varphi(du)-(d\sqrt{f_0(u)})^2\right) = f_0(du)-(d\sqrt{f_0(u)})^2,$$

welche mit der Gleichung (51.), I, gleichbedeutend ist. Hiermit ist das am Ende der ersten Abtheilung ausgesprochene Theorem vollständig erwiesen.

Eine Consequenz dieses Theorems ist die, dass diejenigen Formen $f(dx)$, bei welchen der Quotient der beiden quadrilinearen Formen

$$\frac{\Psi(\overset{1}{dx}, \overset{1}{\delta x}, dx, \delta x)}{F(\overset{1}{dx}, \overset{1}{\delta x}, dx, \delta x)}$$

gleich einer von den Differentialen unabhängigen, mithin invarianten Function der Variabelen x_a ist, die mit $-2k$ bezeichnet wird, nothwendig zu dem in (51.), I, definirten Geschlechte von Formen gehören. Denn die in Rede stehende Voraussetzung schliesst die Voraussetzung des erwiesenen Theorems in sich. Die Bestimmung der Grösse m durch die Differentialgleichung

$$-2k = \frac{1}{m}\frac{d^2m}{h\,dt^2}$$

und die Bedingung

$$\lim.\left(\frac{m}{\sqrt{2h}(t-t_0)}\right)_{t=t_0} = 1$$

ist in dem *einen* Falle ohne die Integration des Systems der isoperimetrischen Differentialgleichungen (3.), I, möglich, dass k gleich einer Constante α ist. Alsdann erhält m den Werth

$$m = \frac{\sin(\sqrt{2\alpha h}(t-t_0))}{\sqrt{\alpha}} = \frac{\sin\sqrt{2\alpha f_0(u)}}{\sqrt{\alpha}}.$$

Hieraus folgt aber für die Form $f(dx)$ der in (9.) angegebene Normaltypus. Man kann somit bei einer gegebenen Form $f(dx)$ beurtheilen, ob dieselbe in die Form (3.) oder (14.) transformabel ist, ohne die Integration des Systems der zugehörigen isoperimetrischen Differentialgleichungen vorauszusetzen, und das betreffende directe Criterium folgendermassen aussprechen.

Bei einer gegebenen reellen Form $f(dx)$ enthält die Gleichung

$$\frac{\Psi(\overset{1}{dx}, \overset{1}{\delta x}, dx, \delta x)}{F(\overset{1}{dx}, \overset{1}{\delta x}, dx, \delta x)} = -2\alpha$$

die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass die Form $f(dx)$ durch eine reelle Substitution in die Form $\frac{f_0(d\xi)}{\left(1+\frac{\alpha}{2}f_0(\xi)\right)^2}$ transformirt werden kann.

6.

In einer Abhandlung *über eine particuläre Lösung der Laplaceschen Differentialgleichung* *) macht *Jacobi* darauf aufmerksam, dass der transformirte Ausdruck von dem Quadrate des Linearelements $dx_1^2+dx_2^2+dx_3^2$ allein ausreicht, um die Transformation der *Laplace*schen Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial x_3^2} = 0$$

zu erhalten. Diesem Gedanken hat Herr *Beltrami* durch eine Arbeit *sulla teorica generale dei parametri differenziali* (Mem. dell'acc. delle scienze dell'istituto di Bologna, 1869) eine umfassende Entwickelung gegeben. Von der betreffenden Arbeit führe ich die folgenden Hauptmomente an.

Wenn w eine Function der n Variabelen x_a bezeichnet, und im Uebrigen die bisherigen Bezeichnungen gelten, so hat der Ausdruck

$$(43.)\qquad \Delta_1(w) = \sum_{a,b}\frac{A_{a,b}}{\Delta}\frac{\partial w}{\partial x_a}\frac{\partial w}{\partial x_b}$$

die Eigenschaft, sich in der Weise auf die Form $f(dx)$ zu beziehen, dass derselbe bei der Einführung von neuen Variabelen y_t in die entsprechende Function der resultirenden Form $g(dy)$ übergeht. Dieselbe Eigenschaft hat das Element eines n-fachen Integrales

$$(44.)\qquad \sqrt{\Delta}\,dx_1\,dx_2\dots dx_n,$$

welches unter den speciellen Voraussetzungen des art. 6, I, bei $n=2$ das Element der bezüglichen Oberfläche, bei $n=3$ das Element des Raumes wird. Wenn nun die erste Variation des n-fachen Integrales

$$(45.)\qquad (n)\int \Delta_1(w)\sqrt{\Delta}\,dx_1\,dx_2\dots dx_n$$

gleich Null werden soll, so besteht die erforderliche Bedingung in dem Verschwinden des Ausdrucks

$$(46.)\qquad \Delta_2(w) = \Delta^{-\frac{1}{2}}\sum_{a,b}\frac{\partial\left(\Delta^{-\frac{1}{2}}A_{a,b}\frac{\partial w}{\partial x_b}\right)}{\partial x_a},$$

welcher ebenfalls mit der Form $f(dx)$ covariant ist. Für die Form $f(dx)=\frac{1}{2}\sum_a dx_a^2$ kommt

$$\Delta_1(w) = \sum_a\left(\frac{\partial w}{\partial x_a}\right)^2,$$

$$\Delta_2(w) = \sum_a\frac{\partial^2 w}{\partial x_a^2};$$

---

*) Bd. XXXVI d. J., pag. 113ff.

mithin ist die Gleichung

$$(46^a.) \qquad \Delta_2(w) = 0$$

die auf n Variabelen ausgedehnte *Laplace*sche Differentialgleichung.

Bei der Form $f(dx) = \frac{1}{2}\sum_a dx_a^2$ sind die Normalvariabelen $u_a = x_a - x_a(0)$, mithin ist $\sqrt{2f_0(u)} = \sqrt{\Sigma(x_a - x_a(0))^2}$. Da nun die wichtigsten der bekannten Eigenschaften der partiellen Differentialgleichung $\sum_a \frac{\partial^2 w}{\partial x_a^2} = 0$ auf dem Umstande beruhen, dass für diese Gleichung ein Integral existirt, welches eine reine Function der Grösse $\sqrt{\sum_a (x_a - x_a(0))^2}$ ist, so schien es mir von Interesse, die Bedingungen zu erfahren, welche eine Form $f(dx)$ erfüllen muss, damit die ihr zugehörige Differentialgleichung $\Delta_2(w) = 0$ ein Integral habe, welches eine reine Function des zugehörigen Ausdrucks $\sqrt{2f_0(u)} = r$ ist.

Zu diesem Ende möge der Ausdruck $\Delta_2(w)$ in den Normalvariabelen dargestellt werden,

$$\Delta_2(w) = \Pi^{-\frac{1}{2}} \sum_{a,b} \frac{\partial\left(\Pi^{-\frac{1}{2}} p_{a,b} \frac{\partial w}{\partial u_b}\right)}{\partial u_a}.$$

Wofern w eine Function der Grösse $\sqrt{2f_0(u)} = r$ ist, so hat man

$$\frac{\partial w}{\partial u_b} = \frac{dw}{dr} \frac{1}{\sqrt{2f_0(u)}} \frac{\partial f_0(u)}{\partial u_b},$$

und in Folge der Gleichung (30.), I,

$$\frac{\partial f_0(u)}{\partial u_b} = \sum_c p_{b,c} u_c.$$

Deshalb ist

$$\sum_b \Pi^{-\frac{1}{2}} p_{a,b} \frac{\partial w}{\partial u_b} = \Pi^{\frac{1}{2}} \frac{dw}{r\,dr} u_a.$$

Da für jede Function ψ der Grösse r die Gleichung gilt

$$\sum_a \frac{\partial \psi(r)}{\partial u_a} u_a = \frac{d\psi}{dr} r,$$

so ist

$$\frac{\sum_a \partial\left(\Pi^{\frac{1}{2}} \frac{dw}{r\,dr} u_a\right)}{du_a} = n\Pi^{\frac{1}{2}} \frac{dw}{r\,dr} + \Pi^{\frac{1}{2}} \frac{d\left(\frac{dw}{r\,dr}\right)}{dr} r + \frac{dw}{r\,dr} \sum_a \frac{\partial \Pi^{\frac{1}{2}}}{\partial u_a} u_a,$$

und $\Delta_2(w)$ erhält den Ausdruck

$$(47.) \qquad \Delta_2(w) = \frac{d^2 w}{dr^2} + (n-1)\frac{dw}{r\,dr} + \Pi^{-\frac{1}{2}} \sum_a \frac{\partial \Pi^{\frac{1}{2}}}{\partial u_a} u_a \frac{dw}{r\,dr}.$$

Die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass die Gleichung $\Delta_2(w) = 0$ durch eine reine Function der Grösse r erfüllt werden könne, besteht also darin, dass der Ausdruck

$$\Pi^{-\frac{1}{2}} \sum_a \frac{\partial \Pi^{\frac{1}{2}}}{\partial u_a} u_a$$

eine reine Function von r sei.

Wofern diese Bedingung erfüllt ist, so hängt die Bestimmung der betreffenden Function w nur von der Ausführung von Quadraturen ab. Man kann $\Delta_2(w)$ auch in die Form bringen

$$\Delta_2(w) = \frac{d^2w}{dr^2} + \sum_a \frac{\partial \log(\Pi^{\frac{1}{2}} r^{n-1})}{\partial u_a} u_a \frac{dw}{r\,dr},$$

und deshalb kommt

$$(48.) \qquad d\log\left(\frac{dw}{dr}\right) = -\sum_a \frac{\partial \log(\Pi^{\frac{1}{2}} r^{n-1})}{\partial u_a} u_a\, d\log r,$$

woraus sich zuerst der Werth $\frac{dw}{dr}$, dann der Werth w ergiebt. In dem Falle, dass der Normaltypus $\varphi(du)$ durch die Gleichung (51.), I, dargestellt wird, verwandelt sich die Gleichung (48.) vermöge der Gleichung (52.), I, folgendermassen

$$(48^a.) \qquad d\log\left(\frac{dw}{dr}\right) = -\sum_a \frac{\partial \log(m^{n-1})}{\partial u_a} u_a\, d\log r.$$

Wenn aber m eine reine Function von r ist, so wird

$$(48^b.) \qquad d\log\left(\frac{dw}{dr}\right) = -\frac{d\log(m^{n-1})}{d\log r} d\log r.$$

Hieraus folgt

$$\frac{dw}{dr} = \text{Const.}\, m^{-(n-1)},$$

und die Function w wird durch die Gleichung

$$(49.) \qquad w = \text{Const.} \int m^{-(n-1)} dr$$

bestimmt.

Bei denjenigen Formen, die wesentlich positiv sind, steht der so eben gefundene Ausdruck w in einer genauen Beziehung zu dem Werthe des n-fachen Integrales

$$(50.) \qquad J = (n) \int \Pi^{\frac{1}{2}} du_1\, du_2 \ldots du_n,$$

das durch die Ungleichheit

$$2f_0(u) < r^2$$

bestimmt ist. Aus der Gleichung (52.), I, ergiebt sich unmittelbar die Um-

formung

$$J = (n)\int \Delta_0^{\frac{1}{2}}\Big(\frac{m}{\sqrt{2f_0(u)}}\Big)^{n-1} du_1\, du_2 \dots du_n.$$

Nun ist m eine reine Function der Grösse $\sqrt{2f_0(u)}$. Man findet daher durch bekannte Methoden, wenn der Werth des Integrals

$$(n-1)\int \pm \frac{d\gamma_1\, d\gamma_2 \dots d\gamma_{n-1}}{\gamma_n}, \quad \gamma_1^2+\gamma_2^2+\dots+\gamma_n^2 = 1,$$

mit ϖ bezeichnet wird, die Bestimmung

$$(50^a.) \quad J = \varpi \int_0^r m^{n-1}\, dr.$$

Durch die Anwendung des Zeichens $[s]$ für die grösseste in der Grösse s enthaltene ganze Zahl kann man ϖ, wie folgt, ausdrücken,

$$\varpi = \frac{2^{\left[\frac{n+1}{2}\right]}\pi^{\left[\frac{n}{2}\right]}}{(n-2)(n-4)\dots\left(n-2\left[\frac{n-1}{2}\right]\right)}.$$

Aus der Darstellung des Integrals J folgt die Relation

$$(51.) \quad \frac{dJ}{dr} = \varpi m^{n-1}.$$

Wenn daher in (49.) die Constante gleich der Einheit genommen wird, so ergiebt sich die Gleichung

$$(52.) \quad \frac{dw}{dr}\frac{dJ}{dr} = \varpi.$$

Eine Form, bei welcher die Grösse m eine reine Function der Grösse $\sqrt{2f_0(u)}$ ist, haben wir durch die Gleichung (9.) charakterisirt; daselbst findet sich

$$m = \frac{\sin\sqrt{2\alpha f_0(u)}}{\sqrt{\alpha}}.$$

Für diese Classe von Formen besitzt also die partielle Differentialgleichung $\Delta_2(w) = 0$ die Eigenschaft, dass derselben das Integral

$$w = \int \Big(\frac{\sin\sqrt{2\alpha f_0(u)}}{\sqrt{\alpha}}\Big)^{-(n-1)} d\sqrt{2f_0(u)}$$

genügt.

Bonn, den 22. December 1869.

Ueber die Bewegungsgleichungen der Elektricität für ruhende leitende Körper.

(Von Herrn *Helmholtz* in Heidelberg.)

Bei Gelegenheit gewisser Versuche wurde ich veranlasst, die Frage zu discutiren, in welcher Weise elektrische Ströme im Innern eines körperlich ausgedehnten Leiters zu fliessen beginnen. Ich suchte Aufschluss darüber aus der Theorie zu gewinnen. Die Bewegungsgleichungen der elektrischen Ströme von veränderlicher Intensität für Leiter von drei Dimensionen, welche sich aus Herrn *W. Webers* sinnreicher Hypothese über das Wesen der elektrischen Fernwirkungen ergeben, sind von Herrn *G. Kirchhoff* *) entwickelt, und theils von ihm, theils von anderen Mathematikern mit Erfolg zur Erklärung einiger Beobachtungsthatsachen benutzt worden. Bei meinem Versuche, sie auf eine neue Aufgabe anzuwenden, ergaben sich physikalisch unzulässige Folgerungen, und die nähere Untersuchung überzeugte mich bald, dass der Grund davon in den Principien der Theorie stecke, dass nämlich nach den Folgerungen aus der *Weber*schen Theorie das Gleichgewicht der ruhenden Elektricität in einem leitenden Körper labil sei, und dass deshalb die darauf gegründete Theorie die Möglichkeit von elektrischen Strömungen anzeige, die zu immer grösser werdenden Werthen der Strömungsintensität und der elektrischen Dichtigkeit fortschritten.

Als ich dagegen versuchte, neue Bewegungsgleichungen zu bilden, bei denen ich statt des *Weber*schen Gesetzes für die Induction zweier Stromelemente auf einander das von Herrn *F. E. Neumann* **) (dem Vater) formulirte Gesetz zu Grunde legte, erhielt ich brauchbare Gleichungen, die für die ruhende Elektricität stabiles Gleichgewicht ergaben.

Bei diesem Widerstreit der Theorien schien es mir rathsam, möglichst wenig den Boden der Thatsachen zu verlassen und in der Theorie unbestimmt

---

*) *Poggendorffs* Annalen CII. pag. 529.

**) Die mathematischen Gesetze der inducirten elektrischen Ströme. Schriften der Berliner Akad. d. Wissensch. von 1845. — Besonders abgedruckt. Berlin, Reimer 1846. — Ueber ein allgemeines Princip der mathematischen Theorie inducirter elektrischer Ströme. Berlin, Reimer 1848. (Vorgelegt der Berliner Akademie 9. August 1847.)

zu lassen, was bisher nicht als durch Versuche entschieden angesehen werden konnte. Die Art, wie ich in diese Frage hineingezogen war, liess schon erkennen, dass die Untersuchung selbst eine gewisse Einengung in der Breite der zulässigen Annahmen herbeiführen würde; denn nur diejenigen Annahmen konnten beibehalten werden, die für die ruhende Elektricität stabiles Gleichgewicht ergeben. Zweitens schien zu hoffen, dass eine solche Theorie erkennen lassen würde, bei welchen Klassen von elektrischen Versuchen wir erwarten dürften, Erscheinungen zu beobachten, welche auf das wahre Gesetz der Fernwirkung zweier Stromelemente gegen einander einen Rückschluss erlauben würden, und umgekehrt, bei welchen anderen Klassen von Versuchen die bestehende Lücke unserer Kenntnisse keinen wesentlichen Einfluss auf ihre theoretische Erklärung und Ableitung habe. Diese Aussicht ist auch in einem gewissen Sinne erfüllt worden, indem sich zeigt, dass die mit den uns gegenwärtig zu Gebote stehenden Beobachtungsmitteln wahrzunehmenden Erscheinungen von jener Lücke in unseren Kenntnissen wahrscheinlich nirgends Kunde geben, und daher auch zunächst nichts zu deren Ausfüllung beitragen werden.

Die wesentlichste Lücke der Theorie in dem vorliegenden Gebiet bezieht sich auf die durch Aenderung der Stromintensität vorhandener elektrischer Ströme inducirten elektromotorischen Kräfte, sobald die inducirenden Ströme nicht vollständig geschlossen sind. Der charakteristische Unterschied zwischen einem System geschlossener und einem System ungeschlossener Ströme ist, dass in ersterem keine Veränderungen in der Dichtigkeit der freien Elektricität vorkommen, wohl aber in dem letzteren. Bisher kennen wir nun aus der Erfahrung mit hinreichender Genauigkeit die Gesetze der elektrodynamischen Anziehungen und die damit connexen Gesetze der inducirten elektromotorischen Kräfte nur für geschlossene Ströme, oder höchstens solche Fälle ungeschlossener Ströme (Leydener Flaschen), bei denen die Unterbrechungsstelle einflusslos auf die elektrodynamischen Wirkungen blieb.

Der Standpunkt der reinen Erfahrungsthatsachen ist gewahrt, wenn man nach *Ampères* Vorgang die elektrodynamischen Anziehungen darstellt als die Kräfte, welche zwei von den Stromkreisen begrenzte Flächen, mit magnetischen Doppelschichten bedeckt, auf einander ausüben; aber diese Art der Darstellung kann, wie ersichtlich, auf ungeschlossene Ströme nicht ausgedehnt werden.

Indessen liegt es in der Natur der Sache, dass man versuchen musste, die Gesammtwirkung zweier Stromkreise auf einander nicht von zwei imaginären durch sie begrenzten Flächen herzuleiten, sondern sie in die Wirkungen ihrer

einzelnen Elemente aufzulösen. Dabei zeigte sich, dass das Gesetz der Elementarwirkungen nicht vollständig und eindeutig aus dem der Gesammtwirkung bestimmt werden konnte. Schon *Ampère* hatte ein Gesetz für die anziehenden und abstossenden Kräfte gegeben, welche zwei Stromelemente auf einander ausüben. Herr *Grassmann* *) zeigte, dass dafür auch andere Kräfte eingeführt werden konnten, ohne das Resultat bei irgend einer Anwendung auf geschlossene Ströme zu verändern. Herr *F. E. Neumann* (Vater) leitete aus *Ampères* Gesetzen für die Kräfte den Ausdruck für das Potential zweier Stromelemente ab, und sprach zuerst das daraus herfliessende Gesetz der Induction aus, im Wesentlichen gestützt auf die Erfahrungsregel, dass die durch Bewegung von Magneten oder Stromleitern inducirten Ströme dieser Bewegung immer entgegenwirken. Wenig später erschien der erste Abschnitt von Herrn *W. Webers* „Elektrodynamischen Maassbestimmungen", in denen er zuerst das unter seinem Namen bekannte Gesetz der elektrischen Fernwirkung aufstellte, welches alle bis dahin bekannten Wirkungen der Elektricität, die elektrostatischen, elektrodynamischen und inducirenden unter einen Gesichtspunkt zusammenfasste. Das daraus hergeleitete Inductionsgesetz war abweichend von dem *Neumann*schen Gesetze; aber es zeigte die darauf folgende Discussion, dass bei richtiger Anwendung des *Weber*schen Gesetzes, es für alle Fälle, wo der inducirende Strom geschlossen ist, genau dieselben Resultate giebt, wie das von Herrn *Neumann* aufgestellte Gesetz.

Da die von Herrn *C. Neumann* (Sohn) **) aufgestellte Hypothese über die elektrischen Fernwirkungen für geringere Strömungsgeschwindigkeiten der elektrischen Massen zum *Weber*schen Gesetze führt, so ist auch das daraus folgende Inductionsgesetz dasselbe, so lange nur die ersten Potenzen der Stromstärken zu berücksichtigen sind.

Ein andres Gesetz der Induction ist dagegen in den Arbeiten von Herrn *Cl. Maxwell* ***), wenn auch in verdeckter Form, enthalten, welches wiederum für geschlossene, aber nicht für ungeschlossene Ströme mit den beiden vorher erwähnten übereinstimmt.

Analytisch genommen beruht das bezeichnete Verhältniss dieser verschiedenen Gesetze darauf, dass die Differenzen zwischen den Werthen, die

---

*) Neue Theorie der Elektrodynamik in *Poggendorffs* Annalen LXIV. 1845.

**) Nachrichten von der Königl. Gesellschaft d. Wiss. zu Göttingen. 16 Juni 1868.

***) London, Philosophical Transactions 1865. P. I. p. 459.

sie ergeben, alle auf die Form

$$B\frac{d^2r}{ds.d\sigma}$$

gebracht werden können, wo r die Entfernung der beiden Stromelemente ds und $d\sigma$, und B eine Constante bezeichnet. Diese Grösse liefert aber ein Integral vom Werthe Null, so oft sie über einen ganzen geschlossenen Stromkreis, sei es s oder σ, integrirt wird. Ihr Einfluss verschwindet also aus dem Resultate, so oft dabei einer der beiden Stromkreise als geschlossen in die Rechnung eingeführt wird. Dasselbe würde übrigens der Fall sein, wenn r auch nur irgend eine Function der Entfernung bedeutete. Im *ersten Paragraphen* der folgenden Untersuchung ist gezeigt worden, dass letzteres die allgemeinste Annahme ist, welche für das Potential zweier Stromelemente gewählt werden kann, wenn das Potential geschlossener Stromsysteme immer seinen richtigen Werth erhalten soll. Wenn man übrigens noch die Annahme hinzufügt, wie dies in den folgenden Untersuchungen geschehen ist, dass die Wirkung ungeschlossener Ströme in die Ferne keiner anderen Function der Entfernung proportional sei, als die aller anderen elektrischen Wirkungen, so ist unter r in dem obigen Ausdrucke die Entfernung selbst zu verstehen.

Auf die hier gemachten Bemerkungen gestützt, habe ich meiner Untersuchung einen Ausdruck für das Potential zweier Stromelemente zu Grunde gelegt (§. 1, Gleichung (1.)), welcher eine Constante von unbekanntem Werthe (bezeichnet mit k) enthält, und in dieser Form die sämmtlichen bisher für dieses Potential aufgestellten Ausdrücke umschliesst. Aus meinem allgemeineren Ausdrucke ergiebt sich nämlich der von Herrn *F. E. Neumann* gebrauchte, wenn wir setzen $k=1$, dagegen der von Herrn *Cl. Maxwell,* wenn wir setzen $k=0$, und endlich der von Herrn *W. Weber* und *C. Neumann,* wenn wir setzen $k=-1$.

Die besondere Form der Herleitung des betreffenden Ausdrucks, wie sie im ersten Paragraphen durchgeführt ist, habe ich gewählt, um hervortreten zu lassen, dass unter Hinzunahme der schon erwähnten Hypothese dieser Ausdruck der allgemeinste ist, der den Bedingungen der Aufgabe und dem Gesetz von der Erhaltung der Kraft entspricht. Die weitere Annahme, dass auch die elektrodynamischen Wirkungen der ungeschlossenen Stromtheile ihrer Stromintensität einfach proportional sind, widerspricht gewissen Folgerungen der *Weber*schen Hypothese, die übrigens noch in keinem Falle durch die Erfahrung unterstützt worden sind. Wie es sich damit aber auch verhalten

mag, jedenfalls wird für geringere Stromstärken, die unterhalb einer gewissen Grenze bleiben, meine Annahme zulässig sein, so dass diese ungünstigsten Falls die Anwendbarkeit der von mir gezogenen Folgerungen nur in Bezug auf die zulässigen Stromstärken beschränkt.

Im *zweiten Paragraphen* sind die Werthe des elektrodynamischen Potentials für Ströme, die continuirlich im Raume verbreitet sind, entwickelt, und zum weiteren Gebrauche umgeformt. Die Art der Umformung und die analytischen Kunstgriffe, welche dabei angewendet sind, sind im Wesentlichen dieselben, welche schon Herr *Kirchhoff* für denselben Zweck, aber auf einen etwas anders gestalteten Ausdruck angewendet hatte.

Dann sind im *dritten Paragraphen* die Bewegungsgleichungen der Elektricität aufgestellt, und auf ein System von Differentialgleichungen gebracht worden. Letztere sind im Innern eines Leiters von gleichmässiger Beschaffenheit dieselben, wie für verschwindend kleine Bewegungen in einem der Reibung unterworfenen Gase, nur mit anderen Grenzbedingungen. Dabei entsprechen aber die elektromotorischen Kräfte den Geschwindigkeiten des Gases, die elektrostatische Potentialfunction den Druck- und Dichtigkeitsänderungen des Gases.

Im *vierten Paragraphen* folgt dann die Untersuchung, ob durch die aufgestellten Gleichungen der Verlauf der Bewegung eindeutig bestimmt sei. Dies ist der Fall, wenn die Constante k nicht negativ ist. Wenn sie aber negativ ist, ergiebt sich, dass der Werth der durch die elektrische Bewegung repräsentirten Arbeit negativ, d. h. kleiner als im Ruhezustande werden kann, was das Zeichen eines *labilen Gleichgewichts* der Elektricität im Ruhezustande ist. In der That wird ganz allgemein für Leiter jeder Form nachgewiesen, dass, wenn die genannte Arbeitsgrösse erst einmal einen negativen Werth hat, die Bewegung, sich selbst überlassen, fortdauernd anschwillt und zu unendlichen Geschwindigkeiten und Dichtigkeiten der Elektricität führt *).

Die Frage konnte noch sein, ob solche Bewegungen, die nach der labilen Seite des elektrischen Gleichgewichts hin ausschlagen, durch die bekannten äusseren Einwirkungen, welche uns bei wirklichen Versuchen zu Gebote stehen, hervorgerufen werden könnten, falls die Constante k wirklich

---

*) Aus mündlichen Mittheilungen meines Collegen *Kirchhoff* weiss ich, dass er schon vor mir gefunden hatte, dass gewisse elektrische Bewegungen in der Kugel nach den von ihm aus der *Weber*schen Hypothese abgeleiteten Gleichungen diese Eigenschaft haben.

einen negativen Werth hätte. Es wird im *fünften Paragraphen* an einem Beispiel, nämlich der Kugel, gezeigt werden, dass dies wirklich der Fall ist. Es muss dies nachweisbar im Allgemeinen geschehen, so oft elektrische Bewegungen in einer homogenen leitenden Kugel dadurch hervorgerufen werden, dass man ihr einen elektrisirten Körper nähert, und ihn dann wieder entfernt, gewisse besondere Bewegungsarten des elektrisirten Körpers ausgenommen.

Daraus geht hervor, dass *die Annahme eines negativen Werthes für die Constante k, wie sie im Weberschen Inductionsgesetze gemacht ist, unzulässig ist.*

Es kann auffallen, dass in den bisherigen Arbeiten über dieses Thema, welche alle das von Herrn *Kirchhoff* *) aus dem *Weber*schen Inductionsgesetz hergeleitete System von Gleichungen benutzt haben, diese Unzulänglichkeit nicht zum Vorschein gekommen ist. In dieser Beziehung ist zu bemerken, dass Herr *Kirchhoff* selbst Anwendungen der von ihm gefundenen Gleichungen nur auf unendlich dünne Drähte gemacht hat, und es wird in §. 7 gezeigt werden, dass wenn nur solche Oscillationen der Elektricität als stattfindend vorausgesetzt werden, gegen deren Wellenlänge der Durchmesser des Drahtes verschwindend klein ist, der Einfluss der Constante k ebenfalls verschwindet, so dass Herrn *Kirchhoffs* Resultate durch die meinigen nicht beeinträchtigt werden.

Dann hat Herr *Jochmann* **) dieselben Gleichungen angewendet zur Bestimmung der Ströme in einem rotirenden und der Einwirkung eines Magneten ausgesetzten Leiter. Solche Ströme sind in einer rotirenden Kugel immer geschlossene, so dass der Einfluss der Constante k verschwindet, und in einem Leiter von andrer Form (Scheibe) hat Herr *Jochmann* die Einwirkung der theilweis ungeschlossenen inducirten Ströme auf einander ausser Rechnung gelassen.

Endlich hat Herr *Lorberg* ***) die unter Einwirkung beliebiger periodischer äusserer Kräfte in einer homogenen leitenden Kugel vor sich gehenden periodischen Bewegungen der Elektricität untersucht, und es ist ihm gelungen, das ziemlich complicirte System der Differentialgleichungen für diesen Fall vollständig zu integriren. Seine Arbeit zeigt, dass periodische endlich bleibende

*) *Poggendorffs* Annalen CII, p. 529.

**) Dieses Journal Bd. LXIII, 158—178; 329—331.

***) Dieses Journal Bd. LXXI, p. 53.

Bewegungen der Elektricität in einer Kugel unter Einfluss periodischer Kräfte vor sich gehen *können*, aber nicht, dass solche Bewegungen durch solche Kräfte aus dem Zustand der Ruhe hervorgerufen werden. Im Gegentheil die Vergleichung mit den von mir aufgestellten Integralen der Differentialgleichungen zeigt, dass dauernd endliche Bewegungen unter zeitweiliger Einwirkung äusserer Kräfte in der Kugel nur möglich sind, wenn schon vorher eine schwellende Bewegung der Elektricität bestand, welche durch Einwirkung der äusseren Kräfte in eine abschwellende verwandelt worden ist.

Die von den Herren *W. Weber* und *Lorberg* hinzugefügte Annahme, dass die elektrischen Flüssigkeiten träge Masse und Beharrungsvermögen hätten, ändert nichts Wesentliches an diesen Ergebnissen.

Auch die von Herrn *W. Weber* *) angedeutete Annahme, dass in elektrisch geladenen Theilen des Leiters sich positive und negative Elektricität mit verschiedener Geschwindigkeit bewegen könnten, wobei dann die Fernwirkungen seiner Hypothese gemäss nicht einfach der Intensität der Strömung proportional, sondern auch von dem Producte dieser Intensität und der elektrischen Dichtigkeit abhängig werden würden, beseitigt die Schwierigkeit nicht, da die genannte Annahme nur Glieder höherer Dimensionen hinzufügen würde, die unzulässigen Folgerungen aber schon aus den Gliedern erster Dimension herfliessen, und sich daher bei den allerschwächsten Strömen schon geltend machen müssen.

Es scheint mir vielmehr, dass die hier zu Tage kommende Unzulänglichkeit des *Weber*schen Gesetzes in der Natur desselben tief begründet ist. Dieses Gesetz fügt sich allerdings in so fern dem Gesetze von der Erhaltung der Kraft ein, als es keinen Kreisprocess zulässt, der Arbeit aus Nichts erzeugte. Aber es widerspricht in so fern, als zwei elektrische Theilchen, die sich nach diesem Gesetze bewegen und mit endlicher Geschwindigkeit beginnen, in endlicher Entfernung von einander unendliche lebendige Kraft erreichen und also eine unendlich grosse Arbeit leisten können.

Es sei m die Masse, welche sich mit dem elektrischen Theilchen e bewegt; dieses sei der abstossenden Kraft des gleichartigen Theilchens e' unterworfen; die Bewegung geschehe in Richtung der Entfernung r beider Theilchen. Nach dem *Weber*schen Gesetze ist:

$$m\cdot\frac{d^2r}{dt^2} = \frac{e.e'}{r^2}\left[1-\frac{1}{c^2}\cdot\left(\frac{dr}{dt}\right)^2+\frac{2r}{c^2}\cdot\frac{d^2r}{dt^2}\right].$$

*) Elektrodynamische Maassbestimmungen Heft I. p. 160—164.

Wir multipliciren mit $\frac{dr}{dt}$ und integriren:

$$\frac{m}{2}\cdot\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = C - \frac{e.e'}{r} + \frac{e.e'}{r.c^2}\cdot\left(\frac{dr}{dt}\right)^2$$

oder

$$\frac{1}{c^2}\cdot\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = \frac{C - \frac{e.e'}{r}}{\frac{1}{2}m.c^2 - \frac{e.e'}{r}}.$$

Ist $\frac{e.e'}{r} > \frac{1}{2}mc^2 > C$, so ist $\left(\frac{dr}{dt}\right)^2$ positiv und grösser als c^2, also $\frac{dr}{dt}$ reell. Ist letzteres selbst positiv, so wird r wachsen, bis $\frac{e.e'}{r} = \frac{1}{2}m.c^2$, dann wird $\frac{dr}{dt}$ unendlich gross.

Dasselbe wird geschehen, wenn im Anfange $C > \frac{1}{2}m.c^2 > \frac{e.e'}{r}$ und $\frac{dr}{dt}$ negativ ist.

Dies könnte also schon im einfachsten denkbaren Falle, bei der Bewegung zweier isolirter elektrischer Theilchen geschehen. Die Resultate unseres fünften Paragraphen zeigen, dass dasselbe auch bei wirklich ausführbaren Versuchen müsste vorkommen können, wenn das *Weber*sche Gesetz in Wirklichkeit das Grundgesetz der elektrischen Fernwirkungen wäre *).

Im *sechsten Paragraphen* folgt dann eine Untersuchung darüber, ob und bei was für Versuchen ein wahrnehmbarer Einfluss der neu eingeführten Constante k etwa erwartet werden könne. Bilden wir die Gleichungen für eine radial von einem Centrum in einem unendlich ausgedehnten leitenden Medium sich ausbreitende elektrische Bewegung, so zeigt sich, dass sich in einem solchen Falle die Elektricität in longitudinalen Wellen ausbreiten kann, die aber je nach der Schwingungsdauer und dem Leitungswiderstand des Medium

*) Das Potential zweier elektrischer Theilchen ist nach *Weber*

$$\frac{e.e'}{r}\left[1 - \frac{1}{c^2}\cdot\left(\frac{dr}{dt}\right)^2\right].$$

Fügte man diesem Ausdrucke noch ein Glied hinzu, nämlich

$$-\frac{1+k}{2}\cdot\frac{e.e'}{c^2}\cdot\frac{d^2r}{dt^2},$$

so würde man das in Gleichung (1.) §. I gegebene Potential zweier Stromelemente erhalten, und wenn k positiv, stabiles Gleichgewicht der Elektricität. Diese Annahme würde aber in den Ausdruck der Kraft ein Glied mit $\frac{d^2r}{dt^2}$ bringen, und ich wage deshalb keineswegs sie zu empfehlen.

einem verschiedenen Grade von Dämpfung unterworfen sind. Ist die Dämpfung gering, so ist die Fortpflanzungsgeschwindigkeit solcher longitudinalen Wellen nach unserer Bezeichnung gleich $\frac{1}{A\sqrt{k}}$, wobei der Factor $\frac{1}{A}$ nach Herrn *Webers* Bezeichnung gleich $\frac{c}{\sqrt{2}}$ ist, welche letztere Grösse, wie schon Herr *Kirchhoff* gefunden hat, der Lichtgeschwindigkeit ausserordentlich nahe gleich ist und als Fortpflanzungsgeschwindigkeit der elektrischen Wellen in einem sehr gut leitenden Drahte von ihm nachgewiesen wurde.

Nach Herrn *Maxwells* Annahme $k=0$ würde die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der longitudinalen elektrischen Wellen in einem Leiter unendlich gross werden, das heisst, die strömende Elektricität würde sich wie ein incompressibles Fluidum verhalten. Es bringt diese Annahme eine sehr beträchtliche Vereinfachung der analytischen Schwierigkeiten hervor, die bei den hierher gehörigen Aufgaben vorliegen, weil bei diesem Werthe von k nie freie Elektricität in das Innere eines homogenen Leiters eintritt, wenn sie nicht von Anfang an darin vorhanden war. Es wird dabei eine der Grundgleichungen der Aufgabe ((II.), beziehlich (II^a.) des §. 3) frei von dem Differentialquotienten nach der Zeit, also ihre Integration nach der Zeit unnöthig.

Nach Herrn *F. E. Neumanns* Annahme $k=1$, wird die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Longitudinalwellen gleich der des Lichtes. Wäre k eine nicht sehr grosse positive Zahl, so würde die genannte Fortpflanzungsgeschwindigkeit doch zu der des Lichtes immer noch in einem endlichen Verhältniss stehen. Nach *Fouriers* Satz kann man sich jede elektrische Bewegung zerlegt denken in eine Summe superponirter einfacher Oscillationen. So lange nun die Wellenlängen der Longitudinalwellen der mit den gegebenen Beobachtungsmitteln wahrzunehmenden Oscillationen so gross sind, dass die Dimensionen der leitenden Körper dagegen verschwinden, so lange kann auch die Bewegung keinen merklichen Einfluss der Constante k zeigen, und kann, selbst wenn k von Null verschieden ist, mit hinreichender Annäherung gefunden werden, auch wenn wir zur Erleichterung der Rechnung $k=0$ setzen.

Der einzige praktisch vorkommende Fall eines Leiters von sehr erheblicher Erstreckung, wenigstens nach einer Richtung hin, ist der eines langen Drahtes. Ich habe deshalb im *siebenten Paragraphen* den Ablauf elektrischer Wellen in einem unendlichen Cylinder von kreisförmiger Basis so weit untersucht, als für den vorliegenden Zweck nöthig war. Ist die Wellenlänge sehr gross gegen den Durchmesser, so afficirt die Constante k erst die kleinen

Glieder höherer Ordnung. Die der ersten Ordnung finden sich übereinstimmend, wie in Herrn *Kirchhoffs* Analyse.

Es geht daraus hervor, dass wir uns bei den elektrischen Versuchen der von der Constante k abhängigen Geschwindigkeit der elektrischen Longitudinalwellen gegenüber in einer ähnlichen Lage befinden, wie in der Optik der Lichtgeschwindigkeit gegenüber. Bei unseren Laboratoriumsversuchen werden wir nicht leicht in die Lage kommen, die eine oder die andere berücksichtigen zu müssen, oder ihren Werth bestimmen zu können, wenn wir nicht Mittel anwenden, ganz ungewöhnlich feine Zeitunterschiede wahrnehmbar zu machen, wie dies für die physikalische Messung der Lichtgeschwindigkeit geschehen ist.

In den bisher besprochenen ersten sieben Paragraphen der vorliegenden Arbeit sind die elektrostatischen und elektrodynamischen Wirkungen als reine Wirkungen in die Ferne behandelt worden, welche die zwischen liegenden isolirenden Medien nicht afficiren und von ihnen nicht afficirt werden; es war dies, bisher wenigstens, die geläufige Betrachtungsweise der meisten mathematischen Physiker, wenigstens des Continents. Indessen wissen wir jetzt, namentlich durch *Faradays* Entdeckungen, dass bei weitem die meisten körperlichen Medien magnetisirbar sind, und dass ein der magnetischen Polarisation ähnlicher Zustand von diëlektrischer Polarisation in den elektrischen Isolatoren vorkommt. Die einfachste Theorie des Diamagnetismus wird gewonnen, wenn wir auch den den Weltraum füllenden Lichtäther als magnetisirbar voraussetzen, und ist dies einmal angenommen, so liegt es nicht fern, ihn auch als *Diëlektricum,* in *Faradays* Sinne, zu betrachten. Für die Wirkungen ruhender oder langsam bewegter Elektricität, ruhender oder langsam bewegter Magnetismen ergiebt eine solche Hypothese, welche das den Weltraum füllende Medium selbst als diëlektrisch und magnetisirbar betrachtet, durchaus dieselben Resultate, wie die, welche den Raum als absolut wirkungslos ansieht. *Faradays* Theorie freilich, welcher Herr *Cl. Maxwell* in dem oben citirten Aufsatze ihren mathematischen Ausdruck gegeben hat, geht weiter, indem sie die Fernkräfte ganz leugnet, und dafür nur die durch contiguirlich fortschreitende Polarisation des Medium fortgepflanzten Wirkungen setzt. Beide Theorien sind einander in gewissem Sinne entgegengesetzt, da nach der von *Poisson* ausgegangenen Theorie der magnetischen Induction, welcher die Theorie der diëlektrischen Polarisation der Isolatoren ganz entsprechend durchgeführt werden kann, die Fernwirkung durch die Polarisation verkleinert, nach Herrn *Maxwells*

Theorie dagegen die Fernwirkung durch die Polarisation des Medium geradezu ersetzt wird.

Aus Herrn *Maxwells* Theorie hat sich nun das merkwürdige Resultat ergeben, dass elektrische Störungen in isolirenden Diëlektricis sich in Transversalwellen verbreiten, für deren Fortpflanzungsgeschwindigkeit sich im Luftraume die Grösse $\frac{1}{A}$, das heisst die Lichtgeschwindigkeit, ergiebt.

Bei der hervorragenden Bedeutung, welche dieses Resultat für die weitere Entwickelung der Physik haben könnte, und da die Frage über die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der elektrischen Wirkungen in neuerer Zeit mehrfach angeregt worden ist, schien es mir wichtig, auch noch zu untersuchen, was das von mir verallgemeinerte Inductionsgesetz für den Fall ergebe, dass magnetisirbare und diëlektrisch polarisirbare Medien vorhanden seien. Dies ist im *achten Paragraphen* geschehen.

Diese Untersuchung ergiebt Folgendes:

1) In diëlektrischen Isolatoren, selbst wenn sie nicht magnetisirbar sind, können sich elektrische Bewegungen in transversal und longitudinal oscillirenden Wellen fortpflanzen.

2) Die Geschwindigkeit der transversalen Wellen im Luftraum (beziehlich Weltraum) ergiebt sich in der Rechnung als desto geringer, je grösser seine diëlektrische Polarisirungsfähigkeit angenommen wird. Ist diese Null, so ist die genannte Geschwindigkeit unendlich; ist die Polarisirungsfähigkeit sehr gross, so findet man die Geschwindigkeit der transversalen Wellen, wie bei Herrn *Maxwell*, gleich der Lichtgeschwindigkeit.

3) Die Geschwindigkeit der longitudinalen Wellen im Luftraume findet sich gleich dem Product aus der der transversalen Wellen mit dem Factor $\frac{1}{\sqrt{k}}$ und einer von der magnetischen Beschaffenheit des Luftraums abhängigen Constanten. In Herrn *Maxwells* Theorie ist die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der longitudinalen elektrischen Wellen als unendlich vorausgesetzt, was dem Werthe $k=0$ entspricht; das heisst, longitudinale Wellen kommen gar nicht zu Stande.

4) Die Geschwindigkeit der transversalen und der elektrischen longitudinalen Wellen in andern Isolatoren wird desto kleiner, je mehr ihre elektrische und magnetische Polarisirbarkeit die des Luftraums übertrifft. In den Leitern der Elektricität pflanzen sich die Wellen unter allmäliger Schwächung durch Absorption fort. Für die Transversalwellen stimmt auch dies mit Herrn *Maxwells* Theorie.

5) Wenn der Isolator, in welchem sich transversale elektrische Wellen

fortpflanzen magnetisch polarisirbar ist, und die elektrischen Oscillationen parallel einer durch die Fortpflanzungsrichtung gelegten Ebene geschehen, so finden magnetische transversale Oscillationen senkrecht zu dieser Ebene statt, die mit derselben Geschwindigkeit fortgepflanzt werden. Für magnetische longitudinale Oscillationen ergiebt sich in solchen Medien unendliche Fortpflanzungsgeschwindigkeit.

Es ergiebt sich also aus diesen Untersuchungen, dass die merkwürdige Analogie zwischen den Bewegungen der Elektricität in einem Dielektricum und denen des Lichtäthers *) nicht von der besonderen Form von Herrn *Maxwells* Hypothesen abhängt, sondern sich in wesentlich ähnlicher Weise auch ergiebt, wenn wir die ältere Ansicht über die elektrischen Fernwirkungen beibehalten.

Zu der bisher nicht bestimmbaren Constanten k unserer Untersuchungen kommt also noch eine zweite, nämlich die aus den bisherigen Versuchen ebenfalls nicht bestimmbare dielektrische Constante des Luftraums, oder die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der elektrischen Transversalwellen im Luftraume.

§. 1.

Die allgemeinere Form des Inductionsgesetzes.

Das von Herrn *F. E. Neumann* aufgestellte Inductionsgesetz für die Ströme, welche durch Bewegung von Magneten oder von Leitern constanter geschlossener Ströme inducirt werden, ist der unmittelbare Ausdruck der Erfahrung, wonach die durch Bewegung inducirten Ströme dieser Bewegung immer entgegenwirken, und wonach die elektromotorische Gesammtkraft des durch eine gewisse Bewegung erzeugten Integralstroms unabhängig von der Schnelligkeit dieser Bewegung ist. Um den mathematischen Ausdruck hierfür zu geben, mussten

*) Diese Analogie ist noch in einer andern sehr wichtigen Beziehung vorhanden, welche Herr *Maxwell* nicht berührt hat. Man hat den mechanischen Zustand des Lichtäthers in durchsichtigen Medien bisher dem der festen elastischen Körper gleich gesetzt. Diese Annahme ergiebt aber für die Grenze zweier durchsichtiger Medien andere Grenzbedingungen, als man braucht, um die Refraction und Reflexion des Lichts an dieser Grenze zu erklären, so dass hier in der theoretischen Optik ein ungelöster Widerspruch bestanden hat. Die Theorie der elektrischen Oscillationen (Gleichungen (20^c.) bis (20^e.) unten) ergiebt aber nicht bloss im Innern eines gleichartigen isolirenden Medium, sondern auch an der Grenze von zwei solchen Medien, dieselben Gesetze der Fortpflanzung, der Refraction und Reflexion der Wellen, wie wir sie beim Lichte thatsächlich finden, vorausgesetzt dass man entweder die magnetische oder die dielektrische Polarisationsfähigkeit beider Medien gleich und letztere sehr gross setzt. Von der bezeichneten Alternative hängt es ab, ob die elektrischen oder magnetischen Oscillationen eines polarisirten Strahls in der Polarisationsebene geschehen.

die Kräfte, welche zwei durchströmte Leiter, oder ein solcher und ein Magnet, auf einander ausüben, auf die Differentialquotienten einer Kräftefunction, oder wie diese hier genannt wurde, eines Potentials zurückgeführt werden.

Dies war zunächst unmittelbar möglich mittels des *Ampère*schen Satzes, wonach die Fernwirkung eines geschlossenen Stromes auf Magnete oder andere Ströme gleich ist derjenigen einer vom Strome begrenzten Fläche, die mit einer magnetischen Doppelschicht bedeckt ist, deren Moment in allen gleich grossen Flächenstücken das gleiche und der Stromstärke proportional ist.

Das Potential eines Stromes auf einen andern oder auf einen Magneten, im *Neumann*schen Sinne, kann definirt werden als die Quantität mechanischer Arbeit, welche durch die elektrodynamischen oder elektromagnetischen Abstossungskräfte geleistet wird, wenn die beiden Ströme, beziehlich Strom und Magnet, bei unveränderter Stromstärke und Magnetisirung in unendliche Entfernung von einander übergeführt werden.

Das von Herrn *Neumann* formulirte Gesetz sagt dem entsprechend aus, dass die inducirte elektromotorische Kraft, welche in dem Stromleiter s durch Bewegung anderer constanter Ströme oder Magneten hervorgebracht wird, proportional ist der auf die Zeiteinheit berechneten Zunahme des Potentials jener Ströme und Magnete, genommen auf den von der Stromeinheit durchströmten Leiter s.

Ich habe dann gezeigt, dass, wenigstens bei der Induction durch Bewegung eines unveränderlichen und die Elektricität nicht leitenden Magneten, aus dem Gesetze der Erhaltung der Kraft folgt, dass die genannte elektromotorische Kraft der genannten Aenderung des Potentials nicht nur proportional, sondern gleich sein muss, wenn man die Einheit des Widerstands so wählt, dass die Einheit des Stroms in derselben während der Zeiteinheit eine der Einheit der Arbeit äquivalente Wärmemenge erzeugt.

Weitere Erfahrungen zeigten, dass die elektromotorische Kraft des Integralstroms ebenfalls den gleichen Werth hat, wenn der inducirende Strom im unbewegten Leiter geschlossen wird, als wenn der Leiter mit dem schon bestehenden Strome aus unendlicher Ferne her schnell in die betreffende Lage geführt wird. Es folgt daraus, dass es für die inducirende Wirkung einerlei ist, ob die Zunahme des Potentials durch Bewegung oder Verstärkung des Stroms erfolgt.

Die Induction, welche ein Strom auf sich selbst ausübt, und welche in seiner eigenen Bahn den Extracurrent der Schliessung und Oeffnung her-

vorruft, konnte unter dasselbe Gesetz gebracht werden, und ich selbst habe durch den Versuch nachgewiesen, dass die Stärke auch dieser verhältnissmässig schnell verlaufenden Stromschwankungen, wenigstens bei vielgewundenen gut leitenden Spiralen, einfach durch das *Neumann*sche Gesetz geregelt wird*). Für einen einzelnen Stromkreis, dessen Widerstand W ist und in welchem die constante elektromotorische Kraft A wirkt, ist also nach dem *Ohm*schen Gesetze

$$JW = A + 2P \cdot \frac{dJ}{dt},$$

worin P das Potential des von der Stromeinheit durchlaufenen Stromkreises auf sich selbst bezogen bedeutet, und zwar so berechnet, dass die Wirkung aller Elemente a des Stromes auf alle diejenigen Elemente b, die noch nicht als a in die Summe aufgenommen sind, addirt wird. So berechnet ist das Potential das Maass der mechanischen Arbeit, die bei Formveränderungen des Stroms geleistet werden kann. Bei den Inductionswirkungen kommt jedes Stromelement als inducirendes und inducirtes in Betracht, und kehrt deshalb jede Combination aus je zweien zwei Mal wieder. Daher der Factor 2 vor P.

Aus jener Gleichung folgt die Gleichung der Erhaltung der Kraft:

$$J^2 W dt - AJdt = \frac{d}{dt}[PJ^2] \,.\, dt.$$

Nun ist $AJdt$ die Arbeit (chemische in den hydroëlektrischen Ketten), welche während der Zeit dt, um den Strom zu treiben, aufgebraucht ist; $J^2 W dt$ ist der Theil dieser Arbeit, der durch Wärmeentwickelung in der Stromleitung vernichtet ist. Daraus folgt, dass die gleichzeitige Zunahme der Grösse $-PJ^2$ einer Arbeitsleistung entspricht, welche die den Strom treibenden Kräfte verrichtet haben, während der Strom ansteigt. Umgekehrt, wenn die elektromotorische Kraft A beseitigt wird, und der Strom allmälig auf Null sinkt in der übrigens geschlossen bleibenden Leitung, so wird durch den Extracurrent die der Grösse $-PJ^2$ äquivalente Wärmemenge wiedererzeugt.

Es ist hierbei zu bemerken, dass die Grösse P nach Herrn *Neumanns* Definition nothwendig negativ ist, und daher $-PJ^2$ positiv. Dieser Satz, dass das negativ genommene Gesammtpotential sämmtlicher vorhandener Ströme auf einander dem durch das Bestehen dieser Ströme repräsentirten Arbeitsäquivalent

---

*) Ueber die Dauer und den Verlauf der durch Stromesschwankungen inducirten Ströme. *Poggendorffs* Annalen LXXXIII, p. 505. 1851.

gleich ist, gilt ganz allgemein für beliebige Systeme geschlossener Ströme. Es wird nicht nöthig sein, den Beweis dafür an dieser Stelle auszuführen, da in §. 4, Gleichung (5^a.) der Beweis ganz allgemein (auch ungeschlossene Ströme nach der neuen Inductionsformel umfassend) gegeben werden wird.

Daraus folgt also, wie schon die Herren *W. Thomson* und *Cl. Maxwell* hervorgehoben haben, dass die Strömung der Elektricität, ähnlich der lebendigen Kraft einer bewegten trägen Masse, einer Arbeit äquivalent ist. Nur tritt der Unterschied ein, dass dies Arbeitsäquivalent der elektrischen Strömung in einer complicirten Weise von den räumlichen Verhältnissen der vorhandenen Ströme abhängt.

Wenn zwei geschlossene Stromkreise s und σ mit den Stromintensitäten i und j vorhanden sind, ist das Potential von der Form

$$P_{s,s}.i^2 + P_{s,\sigma}.i.j + P_{\sigma,\sigma}.j^2.$$

Darin sind $P_{s,s}$ und $P_{\sigma,\sigma}$ die Potentiale der Kreise s und σ auf sich selbst, $P_{s,\sigma}$ das Potential der beiden auf einander, alle für die Stromeinheit in s und σ berechnet.

Die Grösse $P_{s,\sigma}.i.j$ ist also nach ihrer ursprünglich von Herrn *F. E. Neumann* ihr gegebenen Bedeutung die Grösse mechanischer Arbeit, welche bei constanten Strömen die beiden Leiter leisten können, wenn sie in unendliche Entfernung von einander gebracht werden. Ihre negativen Differentialquotienten, für irgend eine Lagenänderung genommen, sind die elektrodynamischen Kräfte, welche diese Lagenänderung hervorzubringen streben. Dass für geschlossene Ströme diese Kräfte auf ein Potential zurückgeführt werden können, ist durch die Ergebnisse der Versuche erwiesen. Für ungeschlossene Ströme könnte dies zweifelhaft erscheinen.

Eben deshalb ist es wichtig, dass die Grösse $-P_{s,\sigma}.i.j$ noch die zweite von den Bewegungen der Stromleiter unabhängige Bedeutung hat. Sie ist derjenige Theil des vorhandenen Arbeitsäquivalentes, der von dem gleichzeitigen Vorhandensein der beiden Ströme i und j herrührt. Eine Function dieser Art muss offenbar auch für eine einzelne oder zwei neben einander bestehende ungeschlossene Strömungen existiren. Es muss sich der Werth des Arbeitsäquivalents ihrer elektrischen Bewegung angeben lassen.

Wenn wir mit D_s und D_σ die Elemente der Länge zweier linearen Leiter s und σ bezeichnen, mit (D_s, D_σ) den Winkel, welchen die Richtungen beider mit einander machen, mit r ihre Entfernung, mit i die Intensität des Stromes in s, mit j die in σ, so ist nach Herrn *F. E. Neumann* das Potential der

beiden Stromelemente auf einander gleich

$$-A^2 . i . j . \frac{\cos(D_s, D_\sigma)}{r} . D_s . D_\sigma .$$

Darin ist A^2 eine Constante, deren Grösse von dem zur Messung der Stromstärke gebrauchten Maasse abhängt. Herr *Neumann* hat *Ampères* elektrodynamische Stromeinheiten gebraucht, und demzufolge $A^2 = \frac{1}{2}$ gesetzt. Wir wollen im Folgenden elektrostatisches Strommaass gebrauchen, das heisst als Einheit der Stromstärke diejenige ansehen, wobei die gesammte Quantität Elektricität (algebraisch summirt), welche durch einen Querschnitt des Leiters in der Zeiteinheit fliesst, gleich Eins ist *). Als Einheit der Elektricität bezeichnen wir mit *Gauss* diejenige, welche ruhend in der Einheit der Entfernung die gleiche ruhende Masse mit der Einheit der Kraft abstösst. Dann ist nach den Messungen der Herren *W. Weber* und *R. Kohlrausch* zu setzen

$$\frac{1}{A} = 310740 . 10^6 \frac{\text{Millimeter}}{\text{Secunden}},$$

oder $\frac{1}{A}$ ist eine Geschwindigkeit von 41928 geographischen Meilen in der Secunde, eine Geschwindigkeit, welche der des Lichtes gleich kommt.

Der obige Ausdruck für das Potential zweier Stromelemente, sowie auch der von *Ampère* für die Anziehungskraft zweier Stromelemente gegebene Ausdruck, aus dem jener Werth des Potentials abgeleitet wurde, ist selbst hergeleitet aus und geprüft worden an Beobachtungsthatsachen, welche sich auf geschlossene Ströme beziehen **). Er ist aber bisher nicht durch die Erfahrung als gültig erwiesen für solche Ströme, welche nicht als ein System überall geschlossener Stromcurven angesehen werden können, deren jede einzelne in ihrer ganzen Länge constante Intensität hat, und in der That ergeben die Theorien der Herren *W. Weber* und *Cl. Maxwell* andere abweichende Ausdrücke für das Potential zweier Stromelemente, obgleich ihre Ergebnisse für alle elektrodynamischen und inducirenden Wirkungen geschlossener Ströme durchaus mit der *Neumann*schen Theorie zusammenstimmen.

---

*) Diese Bestimmung ist übereinstimmend mit derjenigen, welche die Commission der British Association für Bestimmung des Widerstandsmaasses gewählt hat. Herrn *W. Webers* mechanische Stromeinheit ist doppelt so gross, weil er verlangt, dass die Einheit der positiven Elektricität allein genommen, in der Zeiteinheit den Querschnitt durchfliesse.

**) Ströme mit Gleitstellen können immer als geschlossene Ströme von veränderlicher Form betrachtet werden. Entladungsströme von Leydener Flaschen sind bisher auf die elektrodynamischen Wirkungen der Unterbrechungsstelle zwischen den beiden Belegen nicht untersucht worden.

Wir haben zunächst zu untersuchen, welches die allgemeinste Form des Ausdrucks für das Potential der einzelnen Stromelemente sei, die in allen den Fällen, wo einer der Ströme geschlossen ist, den gleichen Werth, wie die *Neumann*sche Formel ergiebt. Zu dem Ende stellen wir folgende Ueberlegung an.

Es gehe der Stromleiter s vom Punkte a zum Punkte b, und der in ihm fliessende Strom habe die Intensität i, ferner gehe der Stromleiter σ vom Punkte c zum Punkte d, und der Strom in ihm habe die Intensität j. Es sei Q der wirkliche Werth des Potentials dieser beiden Stromleiter und P der nach *Neumanns* Formel berechnete Werth. Wenn wir nun statt des Stromleiters s einen andern s_1 mit denselben Endpunkten setzen, und in ihm dieselbe Stromintensität i von a nach b fliessen lassen, mögen die entsprechenden Werthe von Q und von P beziehlich mit Q_1 und P_1 bezeichnet werden. Lassen wir nun die beiden Stromleiter s und s_1 zugleich bestehen, aber so, dass die Stromintensität in letzterem gleich $-i$ gemacht wird, und daher sein Potential auf σ den negativen Werth $-Q_1$ erhält, so bilden i in s und $-i$ in s_1 einen geschlossenen Strom, dessen Potential $Q-Q_1$ ist. Dieses ist aber auch durch die *Neumann*sche Form vollständig gegeben, also:

$$Q-Q_1 = P-P_1.$$

Setzen wir also

$$Q = P+F,$$

so ist auch

$$Q_1 = P_1+F$$

und die Grösse F überhaupt durchaus unabhängig von der Form, Länge, Lage, Richtung des Stromleiters s zwischen a und b, wenn nur die Lage dieser seiner Endpunkte unverändert bleibt.

Ebenso ergiebt sich, dass F auch unabhängig von der Form des Stromleiters σ zwischen den Punkten c und d ist, wenn nur diese beiden Endpunkte von σ unverändert bleiben.

Die Grösse F hängt also von keinen anderen Raumgrössen ab, als von den Coordinaten der Punkte a, b, c und d. Wenn nun überhaupt die Gesammtwirkungen, welche zwei Ströme auf einander ausüben, als die Summen der gleichartigen Wirkungen aller einzelnen Elemente des einen auf alle einzelnen Elemente des anderen betrachtet werden dürfen, so sind die Ausdrücke Q und F entstanden durch Integrationen über sämmtliche Elemente von s und σ, und die Function F, welche nur von den Coordinaten der Endpunkte ab-

hängt, muss also die Form haben:

$$F = F_{b,d} - F_{a,d} - F_{b,c} + F_{a,c},$$

wo jede dieser rechts stehenden Functionen nur von der Lage der durch die Indices bezeichneten Punkte abhängt.

Die einzige Raumgrösse, welche durch zwei Punkte vollständig bestimmt ist, ist deren Entfernung; also müssen $F_{b,d}$ etc. Functionen der Entfernungen $r_{b,d}$ etc. sein. Von andern Raumgrössen können sie nicht abhängen, wohl aber können sie noch beliebige Functionen der Intensitäten i und j sein.

Reduciren wir nun die beiden Stromleiter s und σ auf zwei verschwindend kleine Elemente Ds und $D\sigma$, und verstehen wir unter F irgend eine Function der Entfernung r dieser Elemente und der Intensitäten i und j, so wird

$$F_{b,d} - F_{a,d} - F_{b,c} + F_{a,c} = \frac{d^2F}{ds.d\sigma} . Ds . D\sigma.$$

Dies ist also die allgemeinste Form der Ergänzung, welche dem *Neumann*schen Ausdrucke des Potentials zweier Stromelemente gegeben werden kann, ohne dass dadurch die Gesammtwirkung eines geschlossenen Stroms auf einen beliebig beschaffenen anderen Strom geändert wird.

Ich erlaube mir im Folgenden die Form der Function F durch die schon in der Einleitung erwähnten Hypothesen zu beschränken, welche sich auf die Analogie der sämmtlichen bisher bekannten Fälle elektrischer Wirkungen stützen.

Erstens setze ich die in der Function F zusammengefassten Wirkungen den Intensitäten i und j direct proportional.

Zweitens setze ich voraus, dass die Abhängigkeit von der Entfernung in diesem Falle dieselbe ist, wie bei allen anderen elektrischen Fernwirkungen, die sich von einem Massenelement gleichmässig nach allen Richtungen ausbreiten; dass nämlich die Potentialfunction proportional $\frac{1}{r}$, die Kräfte proportional $\frac{1}{r^2}$ sind.

Nach diesen beiden Hypothesen haben wir zu setzen

$$\frac{d^2F}{ds.d\sigma} = B.i.j.\frac{d^2r}{ds.d\sigma},$$

wo B eine Constante bezeichnet.

Bezeichnen wir die Coordinaten von Ds und $D\sigma$ beziehlich mit x, y, z und ξ, η, ζ, die Projectionen beider Elemente auf die Coordinaten beziehlich

mit Dx, Dy, Dz und $D\xi$, $D\eta$, $D\zeta$, so ist

$$\frac{dr}{ds}\cdot Ds = \frac{x-\xi}{r}\cdot Dx + \frac{y-\eta}{r}\cdot Dy + \frac{z-\zeta}{r}\cdot Dz$$
$$= \cos(r, Ds).Ds,$$
$$\frac{dr}{d\sigma}\cdot D\sigma = -\cos(r, D\sigma).Ds,$$

wenn (r, Ds) und $(r, D\sigma)$ die Winkel bezeichnen, welche die vom Punkte (ξ, η, ζ) nach (x, y, z) positiv gerechnete Richtung von r mit den Richtungen der Elemente Ds und $D\sigma$ macht.

Weiter erhalten wir durch nochmalige Differentiirung:

$$\frac{d^2r}{ds.d\sigma}\cdot Ds.D\sigma$$
$$= -\frac{1}{r}(Dx.D\xi + Dy.D\eta + Dz.D\zeta) + \frac{1}{r}\cos(r, Ds).\cos(r, D\sigma)\,Ds.D\sigma$$

oder

$$\frac{d^2r}{ds.d\sigma} = \frac{1}{r}[\cos(r, Ds).\cos(r, D\sigma) - \cos(Ds.D\sigma)].$$

Es hat also der oben gegebene Werth von $\frac{d^2F}{ds.d\sigma}$ wirklich dieselbe Art der Abhängigkeit von r, wie andere elektrische Potentialfunctionen. Dagegen wäre, wie man sich leicht überzeugt, keine andere Function von r, als allein $F = B.i.j.r$, im Stande den in den obigen beiden Hypothesen gestellten Anforderungen zu genügen.

Was die Annahme insbesondere betrifft, dass die Function F den Intensitäten i und j direct proportional sei, so werden wir es im Folgenden mit Gleichungen zu thun haben, in denen die Stromintensitäten nur linear vorkommen. Sollte also die Abhängigkeit der Function F von i eine solche sein, dass sie nach Potenzen von i entwickelt höhere Potenzen dieser Grösse eintreten liesse, als die erste, — worauf bisher aber noch keine Erfahrungsthatsache hindeutet, — so würden immerhin unsere Gleichungen noch für Strömungen von einer gewissen geringeren Intensität ihre Geltung behalten.

Dasselbe würde, wie schon erwähnt, der Fall sein, wenn nach einer von Herrn *W. Weber* aufgestellten Hypothese, die Fernwirkungen nicht bloss von der Intensität, sondern auch vom Product der Intensität und der Dichtigkeit der freien Elektricität abhängen sollten, eine Hypothese, die übrigens ebenfalls noch durch keine Erfahrungsthatsache unterstützt wird.

In den von uns zu behandelnden Fällen wenigstens würde die Dichtigkeit im Innern der Leiter bei verschwindend kleinen Stromintensitäten immer selbst

eine verschwindend kleine Grösse derselben Ordnung sein, und also das Product beider zu vernachlässigen.

Beide Möglichkeiten würden also nur die Breite der Anwendbarkeit unserer Folgerungen für stärkere Ströme beschränken, ohne ihre Richtigkeit für schwache Ströme aufzuheben.

Ich setze jetzt, um den von uns zu brauchenden verallgemeinerten Ausdruck des elektrodynamischen Potentials zweier Elemente auf die zweckmässigste Form zu bringen, die oben gebrauchte Constante

$$B = -\frac{1-k}{2}\cdot A^2,$$

worin k eine neue Constante bezeichnet. Dann wird das Potential zweier Stromelemente gleich dem Ausdrucke:

$$(1.)\quad -\tfrac{1}{2}A^2\frac{i.j}{r}[(1+k).\cos(Ds, D\sigma)+(1-k).\cos(r, Ds).\cos(r, D\sigma)]Ds.D\sigma.$$

§. 2.

Umformung der Ausdrücke des Potentials für continuirlich im Raume verbreitete Strömungen.

Ich bezeichne mit u, v, w die Componenten der elektrischen Strömung in Richtung der positiven rechtwinkligen Coordinaten x, y, z im Innern eines continuirlich durchströmten Körpers, und die Werthe des elektrodynamischen Potentials, welches die sämmtlichen vorhandenen Ströme in Bezug auf die Stromcomponenten u, v, w im Volumenelemente $dx\,.\,dy\,.\,dz$ hervorbringen, der Reihe nach mit

$$-A^2.\ U.u\ .dx.dy.dz,$$
$$-A^2.\ V.v\ .dx.dy.dz,$$
$$-A^2.W.w\ .dx.dy.dz.$$

Der Werth von U ist nach dem in Gleichung (1.) festgestellten Werthe des Potentials je zweier einzelner Stromelemente

$$(1^a.)\ U=\iiint\left\{\frac{1+k}{2}\cdot\frac{u}{r}+\frac{1-k}{2}\cdot\frac{x-\xi}{r^3}[u.(x-\xi)+v(y-\eta)+w(z-\zeta)]\right\}.d\xi.d\eta.d\zeta.$$

$$r^2 = (x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2.$$

Unter dem Integralzeichen sind u, v, w als Functionen von ξ, η, ζ zu nehmen, und die Integration ist entweder über den ganzen Raum, oder wenigstens über alle Stellen des Raumes auszudehnen, in denen elektrische Strömungen oder Bewegungen elektrisirter Massen vorkommen.

Die Werthe von V und W erhalten wir, wenn wir in (1^a.) vertauschen

$U, \quad u, \quad x, \quad \xi$

mit $V, \quad v, \quad y, \quad \eta$

oder mit $W, \quad w, \quad z, \quad \zeta$.

Der Werth von U lässt sich auch in folgender Form schreiben:

$$(1^b.) \quad U = \iiint \left\{ \frac{u}{r} + \frac{1-k}{2} \cdot \left[u \cdot \frac{d^2 r}{dx . d\xi} + v \cdot \frac{d^2 r}{dx . d\eta} + w \cdot \frac{d^2 r}{dx . d\zeta} \right] \right\} . d\xi . d\eta . d\zeta .$$

Bezeichnen wir mit Ψ folgenden Ausdruck

$$(1^c.) \quad \Psi = \iiint \left(u \cdot \frac{dr}{d\xi} + v \cdot \frac{dr}{d\eta} + w \cdot \frac{dr}{d\zeta} \right) . d\xi . d\eta . d\zeta ,$$

so können wir, vorausgesetzt, dass Ψ einen endlichen Werth hat, die Werthe von U, V und W in folgender Form geben:

$$(1^d.) \quad \begin{cases} U = \frac{1-k}{2} \cdot \frac{d\Psi}{dx} + \iiint \frac{u}{r} . d\xi . d\eta . d\zeta , \\ V = \frac{1-k}{2} \cdot \frac{d\Psi}{dy} + \iiint \frac{v}{r} . d\xi . d\eta . d\zeta , \\ W = \frac{1-k}{2} \cdot \frac{d\Psi}{dz} + \iiint \frac{w}{r} . d\xi . d\eta . d\zeta . \end{cases}$$

In dem Ausdrucke (1^c.) für Ψ sind die Grössen $\frac{dr}{d\xi}$, $\frac{dr}{d\eta}$, $\frac{dr}{d\zeta}$ ächte Brüche, und Ψ ist jedenfalls endlich, wenn, wie im Folgenden mit Ausnahme von §. 7 immer angenommen werden wird, nur endliche elektrische Massen mit endlicher Geschwindigkeit bewegt werden, und diese sich alle in endlicher Entfernung von einander befinden, so dass jenseits eines gewissen Abstandes

$$(1^e.) \quad u = v = w = 0.$$

Um die Continuität der Functionen Ψ, U, V und W, so wie ihrer Differentialquotienten festzustellen, beziehlich die Ausnahmefälle zu finden, nehmen wir hierzu noch die Gleichungen, welche die Constanz der Quantität der Elektricität ausdrücken.

Bezeichnen wir mit φ die Potentialfunction der freien Elektricität, so ist im Innern eines Raumes, in welchem die Elektricität endliche Dichtigkeit hat, die Abnahme dieser Dichtigkeit für die Zeiteinheit gleich

$$(2.) \quad \frac{1}{4\pi} \frac{d\Delta\varphi}{dt} = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} ,$$

worin das Zeichen Δ die Operation bezeichnet

$$\Delta = \frac{d^2}{dx^2} + \frac{d^2}{dy^2} + \frac{d^2}{dz^2} .$$

Und an einer mit Elektricität belegten Fläche Ω mag N die Normale der Fläche bezeichnen, a, b, c die Winkel, welche ihre Richtung mit den positiven Axenrichtungen der x, y, z bildet, $d\Omega$ das Flächenelement; φ, u, v, w mögen Werthe dieser Functionen bezeichnen an der Seite der Fläche, die der negativen Richtung der Normale zugekehrt ist, dagegen φ_1, u_1, v_1 und w_1 die Werthe an der Seite der Fläche, wo die positive Richtung der Normale hinzeigt. Dann ist die Zunahme der Elektricitätsmenge auf der Flächeneinheit gleich

$$(2^a.)\quad \frac{1}{4\pi}\left[\frac{d^2\varphi}{dt.dN}-\frac{d^2\varphi_1}{dt.dN}\right] = (u-u_1)\cos a+(v-v_1)\cos b+(w-w_1)\cos c.$$

Wenn man nun mit Benutzung von (2.) und (2^a.) die Gleichung (1^c.) partiell integrirt, so erhält man

$$(2^b.)\quad \Psi = \frac{1}{4\pi}\frac{d}{dt}\int r\left(\frac{d\varphi}{dN}-\frac{d\varphi_1}{dN}\right).d\Omega-\frac{1}{4\pi}\frac{d}{dt}\int r.\Delta\varphi.d\xi.d\eta.d\zeta,$$

oder auch, wenn man die freie Elektricität mit E bezeichnet,

$$(2^c.)\quad \Psi = \frac{1}{4\pi}\int r.\frac{dE}{dt}.d\xi.d\eta.d\zeta.$$

Die Integrale, welche bei der Bildung von (2^b.) sich auf die unendlich entfernte Grenzfläche des Raumes beziehen, müssen nach der bei (1^c.) gemachten Annahme gleich Null werden, und sind deshalb weggelassen.

Durch Benutzung des *Green*schen Satzes ergiebt sich ferner, dass, wenn $\frac{d\varphi}{dt}$ nirgends discontinuirlich ist, das heisst, wenn nirgends elektromotorische Flächen von veränderlicher Kraft vorkommen, der in (2^b.) angegebene Werth von Ψ gleich sei

$$\Psi = -\frac{1}{4\pi}\int\frac{d\varphi}{dt}.\Delta r.d\xi.d\eta.d\zeta.$$

Auch hier können wieder die auf die unendlich entfernte Grenzfläche des Raumes bezüglichen Integrale weggelassen werden, unter Voraussetzung, dass daselbst $\frac{d\varphi}{dt}$ keine grösseren Glieder enthält, als solche von der Form

$$B.\frac{\cos\alpha}{r^2},$$

wo α der Winkel ist, den die Linie r mit irgend einer festen geraden Linie bildet, und B eine Constante. Die gemachte Voraussetzung wird immer zutreffen, wenn alle zu berücksichtigenden elektrischen Bewegungen nur in endlicher Entfernung von der untersuchten Stelle vor sich gehen.

Da nun

$$\Delta r = \frac{2}{r},$$

so folgt:

$$(2^d.)\quad \begin{cases} \Psi = -\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int \frac{d\varphi}{dt}\cdot\frac{1}{r}\cdot d\xi.d\eta.d\zeta, \\ \text{und} \\ \Delta\Psi = 2\cdot\dfrac{d\varphi}{dt}. \end{cases}$$

Die Function Ψ ist also analytisch darstellbar als die Potentialfunction einer mit der Dichtigkeit $-\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{d\varphi}{dt}$ ausgebreiteten Masse. Da nun $\frac{d\varphi}{dt}$ jedenfalls nicht an einer Fläche unendlich wird, so ist Ψ überall stetig, ebenso seine Differentialquotienten $\frac{d\Psi}{dx}$, $\frac{d\Psi}{dy}$, $\frac{d\Psi}{dz}$; beide mit eventueller Ausnahme solcher Punkte, in denen $\frac{d\varphi}{dt}$ unendlich wird.

Demgemäss sind die oben in (1^d.) *gegebenen Werthe von U, V, W jedenfalls überall stetig, mit Ausnahme solcher Punkte, wo die elektrische Strömung unendlich wird.*

Es ergiebt sich ferner aus (2^d.) durch Differentiation nach x

$$\frac{d\Psi}{dx} = \frac{1}{2\pi}\int \frac{d\varphi}{dt}\cdot\frac{x-\xi}{r^3}\cdot d\xi.d\eta.d\zeta,$$

und durch partielle Integration nach ξ

$$(2^e.)\quad \frac{d\Psi}{dx} = -\frac{1}{2\pi}\int \frac{d^2\varphi}{dt.d\xi}\cdot\frac{1}{r}\cdot d\xi.d\eta.d\zeta.$$

Daraus folgt, dass auch die ersten Differentialquotienten von Ψ nach x, y, z genommen als Potentialfunctionen einer Masse dargestellt werden können, deren Dichtigkeit $-\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{d^2\varphi}{dt.dx}$ ist. Diese ist überall endlich, ausgenommen in Punkten, in denen die Geschwindigkeiten unendlich werden. Also müssen mit Ausnahme solcher Punkte auch die zweiten Differentialquotienten von Ψ überall stetig sein.

Nachdem dies festgestellt ist, folgt aus den in (1^b.) für U, V und W gegebenen Werthen, dass auch U, V, W mit Ausnahme einzelner Punkte unter den angegebenen Voraussetzungen überall, namentlich auch an den Grenzflächen der Leiter stetige Differentialquotienten haben müssen. Dasselbe Resultat kann übrigens auch direct aus der Gleichung (1^a.) mittels ähnlicher Betrachtungen abgeleitet werden, wie sie angewendet werden, um für die Potentialfunctionen von Massen endlicher Dichtigkeit den gleichen Beweis zu führen.

Aus der Gleichung (2^d.) folgt

$$(2^f.)\qquad \Delta\Psi = 2\frac{d\varphi}{dt}$$

und demgemäss aus (1^d.)

$$(3.)\qquad \begin{cases} \Delta U = (1-k)\cdot\dfrac{d^2\varphi}{dx.dt} - 4\pi u, \\ \Delta V = (1-k)\cdot\dfrac{d^2\varphi}{dy.dt} - 4\pi v, \\ \Delta W = (1-k)\cdot\dfrac{d^2\varphi}{dz.dt} - 4\pi w. \end{cases}$$

Ferner ergiebt sich aus (1^d.)

$$\frac{dU}{dx}+\frac{dV}{dy}+\frac{dW}{dz} = \frac{1-k}{2}\cdot\Delta\Psi + \int\left(u\cdot\frac{\xi-x}{r^3}+v\cdot\frac{\eta-y}{r^3}+w\cdot\frac{\zeta-z}{r^3}\right).d\xi.d\eta.d\zeta.$$

Indem man aus (2^f.) für das erste Glied links den Werth setzt, und das folgende Glied partiell integrirt mit Berücksichtigung von (2.) und (2^a.), so erhält man

$$(3^a.)\qquad \frac{dU}{dx}+\frac{dV}{dy}+\frac{dW}{dz} = -k\cdot\frac{d\varphi}{dt}.$$

Nachdem diese Eigenschaften der Functionen U, V, W festgestellt sind, können wir zur Aufstellung der Bewegungsgleichungen übergehen.

§. 3.

Bewegungsgleichungen der Elektricität.

Die elektromotorische Kraft, die im Punkte x, y, z wirkt, ist zusammengesetzt aus derjenigen, die von der elektrostatischen Kraft der freien Elektricität herrührt, und deren Grösse durch die negativ genommenen Differentialquotienten der Potentialfunction φ der freien Elektricität gegeben wird, und ferner aus der Inductionskraft, die in Richtung der x gleich $-A^2\frac{dU}{dt}$ ist. Bezeichnen wir also den Widerstand eines prismatischen Leiters von der Einheit der Länge und Einheit des Querschnitts mit $\varkappa$, so sind folgendes die Bewegungsgleichungen der Elektricität: *)

---

*) Um die hier gegebenen Gleichungen auf die *Kirchhoff*schen zurückzuführen setze man

statt	k	$\varkappa$	φ	A^2
nunmehr	-1	$\frac{2}{4k}$	$\frac{1}{2}\Omega$	$\frac{2}{c^2}$.

$$(3^b.)\quad \begin{cases} \varkappa u = -\dfrac{d\varphi}{dx} - A^2 \dfrac{dU}{dt}, \\ \varkappa v = -\dfrac{d\varphi}{dy} - A^2 \dfrac{dV}{dt}, \\ \varkappa w = -\dfrac{d\varphi}{dz} - A^2 \dfrac{dW}{dt}. \end{cases}$$

Was den Werth der Constanten $\varkappa$ betrifft, so ist Herrn *W. Webers* elektromagnetische Stromeinheit nach unserer Bezeichnung gleich $\frac{1}{A}$, seine Einheit der elektromotorischen Kraft dagegen gleich A zu setzen, also seine elektromagnetische Widerstandseinheit gleich A^2. Für Kupferdrähte von 1 Millimeter Länge und 1 Milligramm Gewicht ergeben seine Messungen die Grösse des Widerstands, aus verschiedenen Drahtproben berechnet, wie folgt:

Jacobis Draht	2 310 000
Kirchhoffs Draht	1 916 000
W. Webers Draht	1 865 000
Mittel . . .	2 030 300

Um für einen Leiter von einem Millimeter Länge und einem Quadratmillimeter Querschnitt den Widerstand zu finden, muss man diese Zahlen durch das specifische Gewicht des Kupfers 8,95 dividiren, und so ergiebt sich als dem Mittel jener drei Kupfersorten entsprechend

$$\varkappa = 227000\, A^2 \frac{\text{Quadratmillimeter}}{\text{Secunden}}$$

oder

$$\varkappa = \frac{1}{425370.10^{12}}\ \text{Secunden.}$$

Der bestleitende Draht von galvanoplastischem Kupfer ergiebt

$$\varkappa = \frac{1}{513144.10^{12}}\ \text{Secunden.}$$

In den Gleichungen (3^b.) sind U, V, W und φ zunächst als Integrale gegeben. Um die betreffenden Gleichungen in die Form von Differentialgleichungen zu bringen, brauchen wir nur die genannten vier Grössen als Unbekannte zu benutzen.

Wir haben dabei zu unterscheiden:

1) Theile des Raums, die wir mit S bezeichnen wollen, welche leitend sind, und auf deren Inneres keine anderen Kräfte wirken, als die elektrostatischen und inducirten elektromotorischen Kräfte. Innerhalb solcher Theile

gelten die Gleichungen (3^b.), welche bei Berücksichtigung von (3.) die Form annehmen:

$$
\text{(I.)} \quad \begin{cases} \Delta U - (1-k)\dfrac{d^2\varphi}{dx.dt} = \dfrac{4\pi}{\varkappa}\left\{\dfrac{d\varphi}{dx} + A^2\dfrac{dU}{dt}\right\}, \\ \Delta V - (1-k)\dfrac{d^2\varphi}{dy.dt} = \dfrac{4\pi}{\varkappa}\left\{\dfrac{d\varphi}{dy} + A^2\dfrac{dV}{dt}\right\}, \\ \Delta W - (1-k)\dfrac{d^2\varphi}{dz.dt} = \dfrac{4\pi}{\varkappa}\left\{\dfrac{d\varphi}{dz} + A^2\dfrac{dW}{dt}\right\}. \end{cases}
$$

2) In anderen Theilen des Raumes können wir die elektrischen Strömungen als vorgeschrieben betrachten. Dies wird zum Beispiel der Fall sein, wo elektrisch geladene Isolatoren bewegt werden, oder elektrische Ströme in Drähten unter Einfluss relativ grosser hydroëlektrischer Kräfte circuliren. Auch wenn man Magnete durch ein System elektrischer Ströme ersetzt denkt, sind diese als unveränderlich vorgeschriebene Ströme zu betrachten. Diese Theile des Raumes mögen mit S_1, die Werthe der Functionen U, V, W, φ etc. mit U_1, V_1, W_1, φ_1 etc. bezeichnet werden. In ihnen ist

$$
\text{(I}^a.) \quad \begin{cases} \Delta U_1 - (1-k)\dfrac{d^2\varphi_1}{dx.dt} = -4\pi u_1, \\ \Delta V_1 - (1-k)\dfrac{d^2\varphi_1}{dy.dt} = -4\pi v_1, \\ \Delta W_1 - (1-k)\dfrac{d^2\varphi_1}{dz.dt} = -4\pi w_1. \end{cases}
$$

3) Im ganzen Raume S und S_1 gilt die Gleichung (3^a.)

$$
\text{(II.)} \quad \frac{dU}{dx} + \frac{dV}{dy} + \frac{dW}{dz} = -k.\frac{d\varphi}{dt},
$$

$$
\text{(II}^a.) \quad \frac{dU_1}{dx} + \frac{dV_1}{dy} + \frac{dW_1}{dz} = -k.\frac{d\varphi_1}{dt}.
$$

4) Die Grenzbedingungen an mit Elektricität belegten Flächen Ω sind

$$
\text{(III.)} \quad U - U_1 = V - V_1 = W - W_1 = \varphi - \varphi_1 = 0,
$$

$$
\text{(IV.)} \quad \frac{dU}{dN} - \frac{dU_1}{dN} = \frac{dV}{dN} - \frac{dV_1}{dN} = \frac{dW}{dN} - \frac{dW_1}{dN} = 0.
$$

5) In unendlicher Entfernung von den Leitern und bewegten Massen

$$
\text{(V.)} \quad U = V = W = \varphi = 0.
$$

Wenn aus diesen Gleichungen U, V, W und φ bestimmt sind, erhält man u, v, w durch die Gleichungen (3.).

Das System der Gleichungen (I.) bis (V.) vertritt vollständig die Be-

dingungen der Aufgabe, die ausgesprochen sind durch die Gleichungen (1^a.), nebst den entsprechenden Gleichungen für v und w, und durch (2.), (2^a.), (3^b.).

Da das System (I.) bis (V.) abgeleitet ist aus den Bedingungsgleichungen der Aufgabe, so fügt es keine neuen Bedingungen hinzu, die jene nicht enthalten.

Umgekehrt ist nachzuweisen, dass, *wenn das System* (I.) *bis* (V.) *erfüllt ist, jene vier Bedingungsgleichungen der Aufgabe erfüllt sind.*

Zunächst ist ersichtlich, dass die Gleichungen (3^b.) unmittelbar aus (I.) erhalten werden, wenn man ΔU etc. durch die Geschwindigkeiten ausdrückt, wie in den u, v, w definirenden Gleichungen (3.) vorgeschrieben ist.

Die Gleichung (2.) erhält man, wenn man die Gleichungen (II.) und (II^a.) der Operation Δ unterwirft, und die Werthe von $\Delta \frac{dU}{dx}$ etc. aus (3.) bildet.

Die Gleichung (2^a.), welche an Flächen Ω gilt, erhält man durch folgende Betrachtungen. Wenn Ψ eine Function ist, die auf beiden Seiten der Fläche Ω gleiche Werthe hat,

$$\Psi = \Psi_1,$$

aber $\frac{d\Psi}{dN}$ von $\frac{d\Psi_1}{dN}$ verschieden ist, so ist, wie leicht zu sehen,

$$\frac{d(\Psi-\Psi_1)}{dx} = \frac{d(\Psi-\Psi_1)}{dN}\cos a,$$

$$\frac{d(\Psi-\Psi_1)}{dy} = \frac{d(\Psi-\Psi_1)}{dN}\cos b,$$

$$\frac{d(\Psi-\Psi_1)}{dz} = \frac{d(\Psi-\Psi_1)}{dN}\cos c,$$

wo a, b, c wie früher die Winkel sind, welche die Normale N mit den Coordinatenaxen macht. Da $\frac{dU}{dx}$, $\frac{dU}{dy}$, $\frac{dU}{dz}$ auf beiden Seiten der Fläche Ω nicht verschieden sind, so ist

$$\frac{d^2(U-U_1)}{dx.dy} = \frac{d}{dN}\left\{\frac{d(U-U_1)}{dy}\right\}\cos a,$$

$$\frac{d^2(U-U_1)}{dy.dy} = \frac{d}{dN}\left\{\frac{d(U-U_1)}{dy}\right\}\cos b,$$

und daraus folgt:

$$\frac{d^2(U-U_1)}{dx.dy}\cos b - \frac{d^2(U-U_1)}{dy^2}\cdot\cos a = 0.$$

Daraus folgt weiter, dass, wenn man die Werthe von $\frac{d\varphi}{dt}$ und $\frac{d\varphi_1}{dt}$ aus den Gleichungen (II.) entnimmt,

$$\cos a\left[\varDelta(U-U_1)+k\frac{d^2(\varphi-\varphi_1)}{dt.dx}\right]+\cos b\left[\varDelta(V-V_1)+k\frac{d^2(\varphi-\varphi_1)}{dt.dy}\right]$$
$$+\cos c\left[\varDelta(W-W_1)+k\frac{d^2(\varphi-\varphi_1)}{dt.dz}\right] = 0,$$

und wenn man hierin für $\varDelta U$, $\varDelta U_1$ u. s. w. die Werthe setzt aus (3.) und (I^a.), so folgt die Gleichung (2^a.).

Endlich ist noch zu erweisen, dass die Functionen U, V, W der Gleichungen (I.) bis (V.), wenn man vermöge der Gleichungen (3.) die Geschwindigkeiten u, v, w einführt, gleich den in (1^a.) und gemäss (1^a.) gebildeten Werthen dieser Grössen sind. Dies geht daraus hervor, dass eine Function, die überall endlich und stetig ist, deren Differentialquotienten ebenfalls überall endlich und stetig sind, und die in unendlicher Entfernung gleich Null ist, wie dies die Gleichungen (III.), (IV.), (V.) von U, V, W aussagen, nach den bekannten Sätzen über Potentialfunctionen dargestellt werden kann in der Form

$$U = -\frac{1}{4\pi}\int\frac{\varDelta U}{r}.d\xi.d\eta.d\zeta.$$

Setzt man nun statt $\varDelta U$ die in (3.) und (I^a.) gegebenen Werthe, so erhält man Gleichungen von der Form (1^d.), wo der Werth von $\frac{d\Psi}{dx}$ etc. zunächst in der Form von (2^e.) gegeben ist. Die Transformationen aber des Werthes von Ψ, welche uns von der Form (1^c.) zu (2^e.) geführt haben, und welche auf partiellen Integrationen beruhten, kann man alle rückwärts machen, und kommt so auf die Gleichungen (1^d.) und (1^c.), die nur eine andere Schreibweise von (1^a.) sind.

Es ist in diesen Entwickelungen keine Rücksicht genommen auf das Vorkommen elektromotorischer (hydroëlektrischer oder thermoëlektrischer) Molecularprocesse. Haben diese constante Kraft, so geben sie einfach einen den übrigen Strömen superponirten constanten Strom. Haben sie aber inconstante Kraft, so lassen sich die Umformungen der Function Ψ nicht immer so ausführen, wie oben geschehen.

Die in der Einleitung erwähnte *Analogie zwischen den Bewegungen der Elektricität in einem Leiter und denen eines Gases* zeigt sich in folgender Weise. Es sei p der Druck, ϱ die Dichtigkeit, u, v, w die Componenten der Strömungsgeschwindigkeit; letztere seien so klein, p und ϱ so wenig von den Werthen p_0 und ϱ_0 in der ruhenden Flüssigkeit unterschieden, dass die

Glieder zweiter Dimension der Grössen $(p-p_0)$, $(\varrho-\varrho_0)$ vernachlässigt werden können. Dann sind die Bewegungsgleichungen eines reibenden Gases, auf dessen Inneres keine äusseren Kräfte wirken:

$$-\frac{1}{\varrho}\cdot\frac{dp}{dx} = \frac{du}{dt} - \mu \Delta u - \nu \frac{d}{dx}\left(\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dy}+\frac{dw}{dz}\right),$$

$$-\frac{1}{\varrho}\cdot\frac{dp}{dy} = \frac{dv}{dt} - \mu \Delta v - \nu \frac{d}{dy}\left(\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dy}+\frac{dw}{dz}\right),$$

$$-\frac{1}{\varrho}\cdot\frac{dp}{dz} = \frac{dw}{dt} - \mu \Delta w - \nu \frac{d}{dz}\left(\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dy}+\frac{dw}{dz}\right),$$

$$-\frac{1}{\varrho}\cdot\frac{d\varrho}{dt} = \frac{du}{dx}+\frac{dv}{dy}+\frac{dw}{dz}.$$

Man setze

$$\begin{array}{lcccccccc} \text{statt} & u, & v, & w, & \frac{p-p_0}{\varrho_0}, & \frac{\varrho-\varrho_0}{\varrho_0}, & \mu, & \nu \\ & U, & V, & W, & \frac{1}{A^2}\varphi, & k\varphi, & \frac{\varkappa}{4\pi A^2}, & \frac{1-k}{k}\cdot\frac{\varkappa}{4\pi A^2}, \end{array}$$

so erhalten wir die für das Innere eines Leiters von constantem Leitungsvermögen geltenden Bewegungsgleichungen der Elektricität. Dabei ergiebt sich

$$\frac{p-p_0}{\varrho-\varrho_0} = \frac{1}{kA^2}.$$

Dem kann ein Gas von stabilem Gleichgewicht nur entsprechen, wenn k positiv ist. Ist $k=0$, wie in Herrn *Maxwells* Annahme, so würde die Elektricität sich wie eine incompressible Flüssigkeit bewegen. Auch müssen die beiden Reibungscoefficienten μ und ν positiven Werth haben, wenn die Vergleichung statthaft sein soll, was bei ν nur der Fall ist, wenn $1 > k > 0$ ist.

Die Geschwindigkeiten der Flüssigkeit entsprechen aber hierbei, wie man sieht, nicht den Geschwindigkeiten der Elektricität, sondern den elektromotorischen Kräften. Die Geschwindigkeiten der Elektricität wären vielmehr den durch die Reibung hervorgebrachten Bewegungskräften proportional.

Die Grenzbedingungen freilich sind abweichend; indessen giebt eine solche Vergleichung immerhin einen Anhalt für die Vorstellung.

§. 4.

Eindeutigkeit der Lösungen und Stabilität des Gleichgewichts.

Bezeichnen wir mit Φ denjenigen Theil der Arbeit, welcher durch Abänderung der elektrischen Strömungen in den Leitern S verändert wird,

so besteht derselbe aus zwei Theilen Φ_0, welcher den elektrodynamischen, und Φ_1, welcher den elektrostatischen Wirkungen entspricht. Die ganze Grösse dieser Arbeit ist

$$(4.)\qquad \Phi = \Phi_0 + \Phi_1,$$

$$(4^a.)\qquad \Phi_0 = \tfrac{1}{2}A^2\int (Uu + Vv + Ww)\,dx.dy.dz,$$

$$(4^b.)\qquad \Phi_1 = \frac{1}{8\pi}\int \varphi\left(\frac{d\varphi}{dN} - \frac{d\varphi_1}{dN}\right)d\Omega - \frac{1}{8\pi}\int \varphi.\Delta\varphi.dx.dy.dz.$$

Durch partielle Integration ist dieser letztere Werth, wie bekannt, auf die Form zu bringen

$$(4^c.)\qquad \Phi_1 = \frac{1}{8\pi}\int \left[\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi}{dz}\right)^2\right]dx.dy.dz$$

und ist also nothwendig positiv.

In dem Werthe von Φ_0 ersetzen wir zunächst u, v, w durch die Werthe dieser Grössen in (3.) und (I^a.) und erhalten

$$\Phi_0 = -\frac{A^2}{8\pi}\int \Big\{ U.\Delta U + V.\Delta V + W.\Delta W - (1-k)\left[U\frac{d^2\varphi}{dx.dt} + V\frac{d^2\varphi}{dy.dt} + W\frac{d^2\varphi}{dz.dt}\right]\Big\}\,dx.dy.dz.$$

Wenn man hier partiell integrirt mit Berücksichtigung der Gleichungen (III.), (IV.) und (V.), so erhält man

$$\Phi_0 = \frac{A^2}{8\pi}\int \Big\{\Sigma\left[\left(\frac{dU_m}{dx_n}\right)^2\right] + \frac{1-k}{k}\left[\frac{dU}{dx} + \frac{dV}{dy} + \frac{dW}{dz}\right]^2\Big\}\,dx.dy.dz.$$

Hierin bezeichnet U_m irgend eine von den Grössen U, V, W, und x_n irgend eine von den Coordinaten x, y, z.

Wenn man berücksichtigt, wie sich aus (III.) und (IV.) durch partielle Integration ergiebt, dass

$$\int \left(\frac{dU}{dy}\cdot\frac{dV}{dx} - \frac{dU}{dx}\cdot\frac{dV}{dy}\right)dx.dy.dz = 0,$$

so verwandelt sich der letzte Ausdruck in

$$(4^d.)\qquad \Phi_0 = \frac{A^2}{8\pi}\int \Big\{\Sigma\left[\left(\frac{dU_m}{dx_n} - \frac{dU_n}{dx_m}\right)^2\right] + k\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2\Big\}\,dx.dy.dz.$$

Durch die in (4^c.) und (4^d.) gegebenen Werthe von Φ_1 und Φ_0 ergiebt sich, dass beide nothwendig positiv sind, wenn k einen positiven Werth hat, oder gleich Null ist. Wenn aber k einen negativen Werth hat, so kann das Arbeitsäquivalent der elektrischen Bewegung negativ, also kleiner als im Gleich-

gewichtszustand werden. Es wäre alsdann der Zustand der Ruhe nicht ein Minimum der Arbeit, also das Gleichgewicht in diesem Zustande nicht stabil.

Der Unterschied im Verlauf der Störungen des Gleichgewichtszustandes, je nachdem k positiv oder negativ ist, zeigt sich noch bestimmter, wenn wir die Gleichung der lebendigen Kraft für die elektrischen Bewegungen aufstellen. Dieselbe wird uns auch dazu dienen, nachzuweisen, dass durch die Gleichungen (I.) bis (V.), wenn gleichzeitig der Anfangszustand gegeben ist, die elektrische Bewegung eindeutig bestimmt ist, vorausgesetzt, dass $k \geqq 0$.

Wenn nämlich zwei von einander verschiedene Lösungen der Gleichungen (I.) bis (V.) existirten, und in der einen

$$U', \quad V', \quad W', \quad \varphi',$$

in der andern

$$U'', \quad V'', \quad W'', \quad \varphi''$$

die Werthe der in den Gleichungen vorkommenden Functionen wären, so würden auch ihre Unterschiede

$$(4^e.) \quad \begin{cases} U' - U'' = U, & V' - V'' = V, \\ W' - W'' = W, & \varphi' - \varphi'' = \varphi \end{cases}$$

gesetzt, den Gleichungen (I.) bis (V.) genügen, wenn in diesen $u_1 = v_1 = w_1 = 0$ gesetzt würde.

Um nun zu ermitteln, unter welchen Bedingungen eine solche Verschiedenheit der Lösungen möglich wäre, wollen wir den Werth von $\frac{d\Phi}{dt}$ mittels der Gleichungen (I.) bis (V.) bestimmen, wobei wir festsetzen, dass

$$(5.) \quad u_1 = v_1 = w_1 = 0$$

sei, also keine Bewegung der Elektricität ausserhalb der Leiter S vorkomme.

Aus den in §. 1 aufgestellten Principien ist schon klar, dass der Werth sein muss

$$(5^a.) \quad \frac{d\Phi}{dt} = -\int \varkappa (u^2 + v^2 + w^2)\, dS,$$

da, wenn äussere inducirende Kräfte fehlen, die in der Leitung erzeugte Wärme, deren mechanisches Aequivalent rechts in Gleichung (5^a.) steht, nur erzeugt werden kann auf Kosten des Arbeitsäquivalents der elektrischen Vertheilung und Bewegung. In der That lässt sich die Gleichung (5^a.) verificiren aus den Gleichungen (3.), (I.) bis (V.), (4.) bis (4^d.) und (5.). Am einfachsten geschieht dies mittels der mit (I.) identischen Gleichungen (3^b.)

$$\int \varkappa(u^2+v^2+w^2)\,dS = -\int\left(u\cdot\frac{d\varphi}{dx}+v\cdot\frac{d\varphi}{dy}+w\cdot\frac{d\varphi}{dz}\right)dS$$
$$-A^2\int\left(u\cdot\frac{dU}{dt}+v\cdot\frac{dV}{dt}+w\cdot\frac{dW}{dt}\right)dS.$$

Aus der in (1^b.) vorgeschriebenen Bildungsweise von U und der in (4^a.) vorgeschriebenen von Φ_0 ist leicht ersichtlich, dass

$$A^2\int\left(u\cdot\frac{dU}{dt}+v\cdot\frac{dV}{dt}+w\cdot\frac{dW}{dt}\right)dS = A^2\int\left(U\cdot\frac{du}{dt}+V\cdot\frac{dv}{dt}+W\cdot\frac{dw}{dt}\right)dS = \frac{d\Phi_0}{dt}.$$

Ferner ergiebt sich aus (4^c.) leicht

$$\frac{d\Phi_1}{dt} = \frac{1}{4\pi}\int\left[\frac{d\varphi}{dx}\cdot\frac{d^2\varphi}{dx.dt}+\frac{d\varphi}{dy}\cdot\frac{d^2\varphi}{dy.dt}+\frac{d\varphi}{dz}\cdot\frac{d^2\varphi}{dz.dt}\right]dx.dy.dz$$
$$= \frac{1}{4\pi}\int\varphi\cdot\left(\frac{d^2\varphi}{dN.dt}-\frac{d^2\varphi_1}{dN.dt}\right)d\Omega - \frac{1}{4\pi}\int\varphi.\Delta\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)dx.dy.dz,$$

und wenn wir hierin die Grössen u, v, w mittels der Gleichungen (2.) und (2^a.) einführen, und partiell integriren, ergiebt sich

$$\frac{d\Phi_1}{dt} = \int\left(u\cdot\frac{d\varphi}{dx}+v\cdot\frac{d\varphi}{dy}+w\cdot\frac{d\varphi}{dz}\right)dx.dy.dz.$$

Da ausserhalb S nach Gleichung (5^a.) u, v, w überall Null sind, ist es einerlei, ob wir die Integration in diesem letzten Ausdruck nur auf den Raum S, oder auf den ganzen unendlichen Raum ausdehnen.

Diese Umformungen zeigen, dass die Gleichungen (I.) bis (V.) der Forderung des Gesetzes von der Erhaltung der Kraft, wie sie in (5^a.) aufgestellt ist, entsprechen.

Die Gleichung (5^a.) zeigt, dass die Grösse $\frac{d\Phi}{dt}$ nur einen negativen Werth haben kann, da das rechts stehende Integral eine Summe von lauter Quadraten ist, und $\varkappa$, der Widerstand, jedenfalls positiv.

A. Wenn $k \geqq 0$ ist, ist Φ nothwendig immer positiv, und kann nicht kleiner als Null werden. Ist es also in irgend einem Augenblicke der Bewegung gleich Null, so muss es von da ab fortdauernd gleich Null sein. Damit Φ aber Null sei, müssen alle die positiven Quadrate, deren Summe es ist, gleich Null sein, also entsprechend (4.), (4^c.) und (4^d.)

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{d\varphi}{dy} = \frac{d\varphi}{dz} = 0,$$

was, da φ im Unendlichen gleich Null sein muss, nur geschehen kann, wenn im ganzen Raume $\varphi = 0$, d. h. wenn gar keine freie Elektricität existirt.

Ferner, wenn wir (4^d.) gleich Null setzen, ergiebt sich

$$\frac{dU}{dy} = \frac{dV}{dx}, \qquad \frac{dV}{dz} = \frac{dW}{dy}, \qquad \frac{dW}{dx} = \frac{dU}{dz},$$

$$\frac{dU}{dx} + \frac{dV}{dy} + \frac{dW}{dz} = 0.$$

Durch Differentiiren erhält man aus diesen Gleichungen:

$$\varDelta U = \varDelta V = \varDelta W = 0,$$

und da ausserdem U, V, W und ihre ersten Differentialquotienten nirgends unstetig sein sollen, so folgt, dass im ganzen Raume

$$U = V = W = 0.$$

Daraus folgt also entsprechend den Gleichungen (4^e.), dass, wenn im Anfang der Bewegung

$$U' - U'' = V' - V'' = W' - W'' = \varphi' - \varphi'' = 0,$$

diese Differenzen fortdauernd gleich Null bleiben.

Wenn also $k \geqq 0$ *und wenn für den Anfang der Bewegung die Werthe von* U, V, W *gegeben sind, so bestimmen die Gleichungen* (I.) *bis* (V.) *in Verbindung mit* (3.) *die Bewegung der Elektricität vollständig.*

Es folgt ferner daraus, dass, wenn wir für die Zeit $t < \tau$ und $t > \tau$ zwei verschiedene analytische Ausdrücke der Bewegung haben, diese eine einzige continuirliche Bewegung darstellen, wenn zur Zeit $t = \tau$ beide Ausdrucksformen überall im Raume gleiche Werthe von φ, U, V und W ergeben.

B. Wenn k negativ ist, so kann Φ negativ werden, und die Bewegung der Elektricität kommt nicht nothwendig zum Stillstand, wenn Φ gleich Null wird. Aber auch in diesem Falle muss, wenn äussere Einwirkungen fehlen, $\frac{d\Phi}{dt}$ nach Gleichung (5^a.) nothwendig immer einen negativen Werth haben, und wenn also Φ einmal negativ geworden ist, so muss es zu immer grösseren und grösseren negativen Werthen fortschreiten. Damit Φ einen endlichen negativen Werth F haben könne, muss nothwendig der mit dem negativen k multiplicirte Theil seines Werthes

$$\int\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 dx.dy.dz = \frac{1}{k^2}\int\left[\frac{dU}{dx} + \frac{dV}{dy} + \frac{dW}{dz}\right]^2 dx.dy.dz$$

grösser als $\frac{1}{(-k)}F$ sein und bleiben.

Wenn φ überall endlich ist und bleibt, so muss $\frac{d\varphi}{dt}$ in endlichen Theilen des Raumes einen endlichen Werth haben, damit das vorstehende Integral

einen endlichen Werth haben könne. Wenn die leitenden Körper S endlich begrenzt sind, nimmt $\frac{d\varphi}{dt}$ in unendlicher Entfernung ab wie $\frac{1}{r^2}$, und die von unendlich entfernten Theilen des Raumes herrührenden Theile des Integrals werden also jedenfalls unendlich klein. Damit aber $\frac{d\varphi}{dt}$ endliche Werthe in endlicher Raumerstreckung habe, müssen endliche Geschwindigkeiten der Elektricität in endlichen Räumen, oder unendlich grosse Geschwindigkeiten in unendlich kleinen Räumen bestehen. Denn es ist

$$\frac{d\varphi}{dt} = \int \left[u \cdot \frac{d}{d\xi}\left(\frac{1}{r}\right) + v \cdot \frac{d}{d\eta}\left(\frac{1}{r}\right) + w \cdot \frac{d}{d\zeta}\left(\frac{1}{r}\right) \right] d\xi . d\eta . d\zeta .$$

Wenn aber die Geschwindigkeiten fortdauernd in endlichen Räumen endliche Werthe haben, muss $\frac{d\Phi}{dt}$ nach Gleichung (5^a.) fortdauernd einen endlichen negativen Werth haben, und Φ also fortdauernd wachsen bis zu unendlicher negativer Grösse.

Daraus folgt, dass, wenn nicht $\frac{d\varphi}{dt}$, u, v oder w von vorn herein an einzelnen Stellen unendliche Werthe haben, sie jedenfalls mit der Zeit zu unendlichen Werthen anwachsen müssen. Ist also bei negativem k die Grösse Φ nur einmal negativ geworden, so wird die entsprechende elektrische Bewegung sich fortwährend an Intensität steigern, wenn sie nicht von Anfang an in einzelnen Stellen unendlich ist.

Das bedeutet also, dass *bei negativen Werthen von k das Gleichgewicht der ruhenden Elektricität in leitenden Körpern ein labiles Gleichgewicht ist.*

Bewegungen, welche Φ negativ machen, sind in sehr mannichfacher Weise möglich. Man braucht nur anzunehmen, dass in irgend einem Augenblick keine freie Elektricität existire, also $\varphi = 0$ sei, und dass ausserdem sei

$$U = \frac{d\chi}{dx}, \qquad V = \frac{d\chi}{dy}, \qquad W = \frac{d\chi}{dz}.$$

Dann fallen alle positiven Theile von Φ weg, und nur der negative bleibt übrig. Die Function χ ist hierbei nur den Bedingungen unterworfen, dass nach den Gleichungen (I^a.) bis (V.) und (5^a.) ausserhalb S

$$\Delta\Delta\chi = 0$$

und an den Grenzen von S die ersten und zweiten Differentialquotienten von χ continuirlich und in unendlicher Entfernung gleich Null seien. Es kann χ innerhalb S vollkommen beliebig gewählt werden, und ist dann für den Aussenraum bis auf eine willkürliche Constante bestimmt.

Unter diesen Umständen ist nun auch die für positive Werthe von k gezogene Folgerung nicht zulässig, dass die Gleichungen (I.) bis (V.) die Bewegung der Elektricität eindeutig bestimmen, wenn die Werthe U, V, W, φ für die Anfangszeit gegeben sind. Es kann sich nämlich zu der gegebenen Anfangsbewegung eine verschwindend kleine labile Bewegung gesellen, welche nach Verlauf einer gewissen Zeit endliche Werthe erhält.

Wohl aber kann auch für negative Werthe von k gezeigt werden, dass, wenn in zwei verschiedenen Integralen der Gleichungen (I.) bis (V.) sich die Grössen U, V, W, φ zu Anfang und zu Ende einer gewissen Zeit unendlich wenig von einander unterscheiden, die beiden Integrale auch während der ganzen Dauer dieser Zeit sich unendlich wenig von einander unterscheiden.

Denn für ihre Differenz gilt Gleichung (5^a.), und ist $\frac{d\Phi}{dt}$ fortdauernd negativ. Wenn also für ihre Differenz der Werth von Φ zu Anfang und zu Ende der betreffenden Zeitperiode verschwindend klein ist, so muss er während der ganzen Dauer dieser Periode verschwindend klein gewesen sein.

Wenn also auf einen elektrischen Leiter während einer gewissen endlichen Zeit inducirende Kräfte einwirken, und ein Integral der entsprechenden Bewegung gefunden wird, welches die Werthe von U, V, W, φ für $t = -\infty$ und $t = +\infty$, gleich Null ergiebt, so giebt es keine zweite Lösung, die denselben Bedingungen genügte.

§. 5.

Radiale Strömungen der Elektricität in einer leitenden Kugel.

Die Erörterungen des vorigen Paragraphen zeigen nur die Möglichkeit, dass unendlich fortschreitende Störungen des elektrischen Gleichgewichts eintreten könnten, wenn k einen negativen Werth hat; aber sie lassen noch dem Zweifel Raum, ob solche Störungen auch wirklich zu Stande kommen können bei denjenigen Methoden elektrische Bewegungen hervorzurufen, welche uns bei Versuchen zu Gebote stehen.

Um zu zeigen, dass dies der Fall sei, wird es genügen, ein möglichst einfaches Beispiel zu behandeln, und ich wähle dazu radiale Bewegungen der Elektricität in einer Kugel, die hervorgebracht werden durch Verengerung und Erweiterung einer äusseren concentrischen, mit Elektricität geladenen Kugelschaale. In dieser Form wird zwar das wirkliche Experiment nicht leicht ausgeführt werden. Aber es ist zu bemerken, dass ein unserem Falle ent-

sprechendes, von den Richtungen der Radien unabhängiges Glied jedesmal vorkommen wird, wenn man die durch Annäherung eines elektrisirten Körpers in der Kugel hervorgerufene Bewegung nach Kugelfunctionen entwickelt. Denkt man sich nämlich alle die elektrischen Bewegungen in der Kugel superponirt (und ungestörte Superposition verschiedener Bewegungen ist möglich), welche dadurch entstehen würden, dass der gleiche elektrisirte Körper von allen möglichen verschiedenen Richtungen aus zur Kugel in gleicher Weise bewegt wird, so wird die Summe aller dieser Bewegungen auf den von uns zu behandelnden Fall führen, und es ist klar, dass die durch solche Superposition entstandene Gesammtbewegung kein mit der Zeit in das Unendliche wachsendes Glied enthalten kann, wenn nicht die ursprüngliche einzelne Bewegung ein solches enthält. Stellt sich also heraus, dass unser vorausgesetzter einfachster Fall eine labile Störung des elektrischen Gleichgewichts ergiebt, so folgt, dass diese auch stattfindet in jedem Falle, wo eine elektrische Masse in gleicher Weise der leitenden Kugel genähert und entfernt worden ist, wie wir dies von der von uns angenommenen concentrischen elektrischen Schicht voraussetzen.

Wir setzen

$$x = \varrho\cos\alpha, \quad y = \varrho\cos\beta, \quad z = \varrho\cos\gamma.$$

Der Radius der leitenden Kugel sei $\mathfrak{R}$; über eine grössere concentrische Kugelfläche von dem veränderlichen Radius R sei die elektrische Masse M gleichmässig ausgebreitet. Die elektrischen Strömungen sollen nur in Richtung des Radius geschehen; wir werden also setzen können

$$(6.)\qquad u = \frac{d\chi}{dx}, \qquad v = \frac{d\chi}{dy}, \qquad w = \frac{d\chi}{dz}.$$

Da alles um den Mittelpunkt der Kugel symmetrisch ist, werden auch die Werthe der elektromotorischen Kräfte U, V, W von der Form sein:

$$(6^a.)\qquad U = \frac{d\Pi}{dx}, \qquad V = \frac{d\Pi}{dy}, \qquad W = \frac{d\Pi}{dz},$$

und φ wird wie χ und Π nur eine Function von ϱ und t sein.

Da die Herren *W. Weber* und *Lorberg* die Annahme gemacht haben, die Elektricität könne auch träge Masse haben, so will ich diese Annahme in diesem Paragraphen ebenfalls recipiren, und den linken Seiten der Bewegungsgleichungen (3^b.) noch entsprechende Glieder hinzusetzen; die träge Masse der elektrostatischen elektrischen Einheit werde mit μ bezeichnet. Die Gleichungen (3^b.) verschmelzen dann in eine Integralgleichung für das Innere der Kugel

$$(6^b.)\qquad \mu\frac{d\chi}{dt} + \varkappa\chi = -\varphi - A^2\frac{d\Pi}{dt},$$

und die Gleichungen (3.) und (3^a.), die im ganzen Raume gelten, werden:

$$(6^c.) \qquad \varDelta \Pi = (1-k)\frac{d\varphi}{dt} - 4\pi\chi,$$

$$(6^d.) \qquad \varDelta \Pi = -k\frac{d\varphi}{dt}.$$

Die Gleichungen (6^b.) und (6^c.) treten hier an Stelle von je drei Gleichungen, die durch Differentiirung nach x, y und z aus ihnen entstehen. Es ist beim Uebergang von den letzteren zu ihren beiden Integralgleichungen nicht nöthig, eine willkürliche Function der Zeit hinzuzufügen, da eine solche schon in Π und χ steckt, deren Differentialquotienten nach x, y, z genommen wir allein brauchen.

Die letzten beiden Gleichungen ergeben noch, wenn sie von einander subtrahirt werden:

$$(6^e.) \qquad \frac{d\varphi}{dt} = 4\pi\chi.$$

Die Gleichung (6^d.) ergiebt ferner, dass Π durch den ganzen Raum gleich der Potentialfunction der Dichtigkeit $\frac{k}{4\pi}\cdot\frac{d\varphi}{dt}$ sei. Dadurch ist Π ebenfalls bis auf eine willkürliche Function der Zeit, die keinen Einfluss auf die Lösung unserer Aufgabe hat, vollständig bestimmt, wenn φ gefunden ist.

Zur Bestimmung von φ im Innern der Kugel ergiebt sich zunächst aus der Gleichung (6^b.), wenn wir an ihr die Operation $\varDelta$ ausführen, und die Werthe von Π und χ aus (6^d.) und (6^e.) substituiren:

$$(7.) \qquad \varDelta\left\{\frac{\mu}{4\pi}\cdot\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{\varkappa}{4\pi}\cdot\frac{d\varphi}{dt} + \varphi\right\} = A^2 k\cdot\frac{d^2\varphi}{dt^2}.$$

Im äussern Raume dagegen ist der Werth von φ nur abhängig von den Gesammtmengen der Elektricität $\mathfrak{M}$ auf der Kugel vom Radius $\mathfrak{R}$, M auf der vom Radius R.

$$(7^a.) \qquad \begin{cases} \text{Für } \mathfrak{R} < \varrho < R \text{ ist } \varphi = \dfrac{\mathfrak{M}}{\varrho} + \dfrac{M}{R} \text{ und } \dfrac{d\varphi}{dt} = -\dfrac{M}{R^2}\cdot\dfrac{dR}{dt}; \\[2ex] \text{für } \varrho > R \quad \text{ist } \varphi = \dfrac{\mathfrak{M}+M}{\varrho} \quad \text{und } \dfrac{d\varphi}{dt} = 0. \end{cases}$$

Was die Grenzbedingungen (III.), (IV.), (V.) betrifft, so sind diese erfüllt, wenn Π die Potentialfunction von $\frac{k}{4\pi}\cdot\frac{d\varphi}{dt}$, und letztere Grösse überall continuirlich ist. Also die einzige Grenzbedingung ist, dass die aus der Gleichung (7.) gefundene Function φ für $\varrho = \mathfrak{R}$ sei

$$(7^b.) \qquad \varphi = \frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{R}} + \frac{M}{R}.$$

Ich bemerke hier gleich, dass für den Fall $k=0$, wenn wir mit e die Dichtigkeit der Elektricität bezeichnen, die Gleichung (7.) ergiebt:

$$\mu \frac{d^2 e}{dt^2} + x \frac{de}{dt} + 4\pi e = 0,$$

woraus folgt

$$e = B_0 e^{-n_0 t} + B_1 e^{-n_1 t},$$

wo n_0 und n_1 die beiden Wurzeln der Gleichung sind:

$$\mu n^2 - xn + 4\pi = 0.$$

Soll vor Einwirkung der äusseren Kräfte Ruhe bestehen, so muss $B_0 = B_1 = 0$ sein, folglich für alle Zeit $e = \frac{de}{dt} = 0$. Folglich tritt gar keine Bewegung ein, wenn $k=0$.

Die im vorigen Paragraphen aufgestellten Sätze über den Werth des Arbeitsäquivalents der elektrischen Bewegung und die continuirliche Abnahme dieses Werthes bei einer durch äussere Kräfte nicht influirten Bewegung ändern sich in unserem Falle nur in so weit, als zu dem elektrostatischen und elektrodynamischen Arbeitsäquivalent noch die lebendige Kraft der bewegten Elektricität hinzukommt, deren Grösse ist

$$\Phi_2 = \frac{\mu}{2}\int (u^2+v^2+w^2)\, dS = \frac{\mu}{32.\pi^2}\int \left(\frac{d^2\varphi}{dt.d\varrho}\right)^2 dS,$$

die Integration über die ganze Kugel ausgedehnt.

Wenn man die Gleichung (7.) mit $\frac{d\varphi}{dt}$ multiplicirt, über die ganze Ausdehnung der Kugel integrirt, und diese Integration partiell ausführt, beachtend, dass in diesem Falle an der Oberfläche der Kugel $\frac{d\varphi}{dt} = 0$ ist, so können wir der Bezeichnung des vorigen Paragraphen entsprechend setzen:

$$\tfrac{1}{2} A^2 k \int \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 dS + \frac{\mu}{8\pi}\int \left(\frac{d^2\varphi}{dt.d\varrho}\right)^2 dS + \tfrac{1}{2}\int \left(\frac{d\varphi}{d\varrho}\right)^2 dS = 4\pi.\Phi$$

und erhalten dann das Resultat:

$$\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{x}{16\pi^2}\int \left(\frac{d^2\varphi}{dt.d\varrho}\right)^2 . dS.$$

Es entspricht diese Gleichung der Gleichung (5ᵃ.) des vorigen Paragraphen, mit der durch Einführung der Grösse μ bedingten Modification, und es lassen sich dieselben Schlüsse betreffs der Stabilität des Gleichgewichts, der Eindeutigkeit der Lösungen, der Continuität zweier Bewegungen von verschiedenem analytischen Ausdruck daraus ableiten.



Ablauf elektrischer Radialströme in der Kugel ohne äussere Einwirkung.

Um später die vollständigen Integrale der durch eine gegebene äussere Einwirkung hervorgerufenen Ströme finden zu können, müssen wir zuerst das vollständige Integral der Gleichung (7.) mit der Grenzbedingung (7^b.) suchen für den Fall, dass

$$(8.)\qquad \frac{dR}{dt} = 0.$$

Setzen wir innerhalb der Kugel

$$(8^a.)\qquad \varphi = \frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{R}} + \frac{M}{R} + \frac{B_a}{\varrho}\cdot e^{n_a t}\cdot \sin\left(\frac{\pi a \varrho}{\mathfrak{R}}\right),$$

so ist Gleichung (7^b.) erfüllt, wenn a eine ganze Zahl ist, und Gleichung (7.), wenn

$$(8^b.)\qquad -\frac{\pi^2 a^2}{\mathfrak{R}^2}\left\{\frac{\mu}{4\pi}\cdot n_a^2 + \frac{\varkappa}{4\pi}\cdot n_a + 1\right\} = A^2 . k . n_a^2$$

oder

$$(8^c.)\qquad \frac{1}{n_a} = -\frac{\varkappa}{8\pi} \pm \sqrt{\left(\frac{\varkappa}{8\pi}\right)^2 - \frac{\mu}{4\pi} - k\left(\frac{A\mathfrak{R}}{\pi a}\right)^2}.$$

Die beiden hier für $\frac{1}{n_a}$ gegebenen Werthe sind auch die Werthe für die Grösse

$$n_a\left[\frac{\mu}{4\pi} + k\left(\frac{A\mathfrak{R}}{\pi a}\right)^2\right].$$

Ich bemerke dabei, dass ein complexer Werth für a die Bedingungen nicht erfüllen kann, da ein solcher einen complexen auch für n ergeben würde, und dann nicht für jeden Werth von t die Gleichung (7^b.) zu erfüllen wäre.

Da $\varkappa$ und μ positive Grössen bedeuten, so hat n_a Werthe, deren reeller Theil jedenfalls negativ ist, und einer zum Gleichgewichtszustand zurückkehrenden Bewegung entspricht, wenn k positiv ist.

Ist k dagegen negativ, so wird n ebenfalls für sehr grosse Werthe von a negative reelle Theile haben. Wenn aber $\mathfrak{R}$ gross genug ist, dass für niedrige Werthe von a

$$-k\left(\frac{A\mathfrak{R}}{\pi a}\right)^2 > \frac{\mu}{4\pi},$$

so wird von den beiden entsprechenden Werthen von n_a einer positiv werden, und einer das Gleichgewicht zerstörenden Bewegung entsprechen. Wenn $\mu = 0$ ist, wird dies für jeden Werth von a der Fall sein. Hat μ einen gewissen positiven Werth, so wird jedenfalls $\mathfrak{R}$ so gross gedacht werden können, dass es der vorstehenden Ungleichung Genüge leistet. Da übrigens die Constante

μ so klein ist, dass ihr Einfluss durch keine bisher angestellten Versuche sich entdecken liess, so wird es sich dabei gar nicht um erhebliche Werthe von $\mathfrak{R}$ handeln. Hätte μ Werthe, welche neben der Grösse $A^2\mathfrak{R}^2$ in Betracht kämen, wenn $\mathfrak{R}$ auch nur mit den Dimensionen gewöhnlich gebrauchter Drahtspiralen vergleichbar wäre, so müssten solche Spiralen, die zwei neben einander laufende Fäden enthalten, einen merklichen Extracurrent auch dann geben, wenn beide Fäden in entgegengesetzter Richtung durchströmt werden. In diesem Falle würde es das durch die Grösse μ gemessene Beharrungsvermögen der Elektricität fast allein sein, was den Extracurrent in Gang erhielte. Jedenfalls ist aber der so entstehende Extracurrent verschwindend klein gegen denjenigen, welcher bei gleich gerichteter Durchströmung solcher Doppelspiralen entsteht, und dessen Grösse von dem mit A^2 multiplicirten Potential der ganzen Spirale, auf sich selbst genommen, abhängt.

Aus der Gleichung (8^a.) können wir ein vollständiges Integral der Gleichungen (7.) und (7^b.) ableiten in der Form:

$$(9.)\quad \begin{cases} \varphi = \dfrac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{R}} + \dfrac{M}{R} + \varphi_0, \\ \varphi_0 = \dfrac{1}{\varrho} \sum\limits_{\mathfrak{a}=0}^{\mathfrak{a}=\infty} \left\{ [B_{\mathfrak{a}} . e^{n_{\mathfrak{a}} t} + \mathfrak{B}_{\mathfrak{a}} . e^{\mathfrak{n}_{\mathfrak{a}} t}] \sin\left(\dfrac{\pi \mathfrak{a} \varrho}{\mathfrak{R}}\right) \right\}. \end{cases}$$

Darin sind $n_{\mathfrak{a}}$ und $\mathfrak{n}_{\mathfrak{a}}$ die beiden Werthe, welche Gleichung (8^b.) für den betreffenden Werth von $\mathfrak{a}$ ergiebt, $B_{\mathfrak{a}}$ und $\mathfrak{B}_{\mathfrak{a}}$ aber sind willkürliche Coefficienten, welche so bestimmt werden können, dass φ und $\frac{d\varphi}{dt}$ für $t = 0$ willkürlich gegebene Functionen von ϱ im Innern der Kugel werden.

Wenn φ und $\frac{d\varphi}{dt}$ für die Zeit $t = 0$ gegeben sind, so ist in unserem Falle, wo

$$\frac{dU}{dy} = \frac{dV}{dx}, \quad \frac{dV}{dz} = \frac{dW}{dy}, \quad \frac{dW}{dx} = \frac{dU}{dz},$$

der Anfangszustand vollständig bestimmt, da dann die Potentiale Φ_0 und Φ_1 nach (4^c.) und (4^d.) vollständig bestimmt sind, ebenso wie das von der lebendigen Kraft der elektrischen Bewegung abhängige Glied Φ_2 des Potentials, welches noch hinzukommt, wenn μ von Null verschieden ist. Es können also zwei Bewegungen, für welche φ und $\frac{d\varphi}{dt}$ überall im Anfang gleich ist, sich, wenigstens wenn k positiv ist, überhaupt nicht von einander unterscheiden. Ebenso wenig können sich bei negativem Werthe von k zwei Bewegungen von einander unterscheiden, bei denen zur Zeit $t = 0$ die Functionen φ und

$\frac{d\varphi}{dt}$ überall die gleichen Werthe haben, und die beide nach Ablauf unendlicher Zeit

$$\varphi = \text{Const.},$$
$$\frac{d\varphi}{dt} = 0$$

machen. Zu dem Ende müssen in der Reihe (9.) nur die Glieder bewahrt bleiben, welche hinreichend grosse Werthe von a enthalten, dass n_a und $\mathfrak{n}_a$ nur negative reelle Theile enthalten.

Die Fälle, wo n_a oder $\mathfrak{n}_a$ positive reelle Theile enthalten, werden wir erst am Schlusse dieses Paragraphen besonders besprechen.

Elektrische Radialströme bei bestimmter äusserer Erregungsweise.

Es sei λ irgend eine Constante, für welche wir nur, um die Behandlung von Ausnahmefällen zu umgehen, festsetzen, dass $\sin(\lambda\mathfrak{R})$ *nicht* gleich Null sein soll. Es seien ferner ν_0 und ν_1 die Werthe von n aus der Gleichung

$$(9^a.)\qquad -\lambda^2\left\{\frac{\mu}{4\pi}n^2+\frac{\varkappa}{4\pi}n+1\right\} = A^2.k.n^2,$$

und es werde gesetzt:

$$(9^b.)\qquad \frac{M}{R} = \frac{C}{\nu_1-\nu_0}[\nu_1.e^{\nu_0 t}-\nu_0.e^{\nu_1 t}]+C_0,$$

so ist innerhalb der Kugel

$$(9^c.)\qquad \varphi = \frac{C}{\nu_1-\nu_0}.\frac{\mathfrak{R}.\sin(\lambda\varrho)}{\varrho.\sin(\lambda\mathfrak{R})}[\nu_1.e^{\nu_0 t}-\nu_0.e^{\nu_1 t}]+\frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{R}}+\varphi_0+C_0,$$

wo unter φ_0 die in der Gleichung (9.) enthaltene unendliche Reihe zu verstehen ist.

Dass φ ein Integral der Gleichung (7.) mit Einhaltung der Grenzbedingung (7^b.) ist, geht aus dem Bisherigen hervor. Die Coefficienten B_a und $\mathfrak{B}_a$ der Reihe φ_0 werden wir nun nach *Fouriers* Methode so bestimmen können, dass für die Zeit $t=0$

$$(9^d.)\qquad \begin{cases} \varphi = C+\frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{R}}+C_0, \\ \frac{d\varphi}{dt} = 0 \end{cases}$$

wird. Zu dem Ende muss sein

$$(9^e.)\qquad \begin{cases} C\left[1-\frac{\mathfrak{R}.\sin(\lambda\varrho)}{\varrho.\sin(\lambda\mathfrak{R})}\right] = \frac{1}{\varrho}\sum_{a=0}^{a=\infty}\left\{(B_a+\mathfrak{B}_a)\sin\left(\frac{\pi a\varrho}{\mathfrak{R}}\right)\right\}, \\ 0 = n_a.B_a+\mathfrak{n}_a.\mathfrak{B}_a, \end{cases}$$

was nach bekannten Rechnungsmethoden ergiebt:

$$(9^f.)\quad \begin{cases} B_a + \mathfrak{B}_a = (-1)^{a+1} \cdot \dfrac{2\mathfrak{R}^2\lambda^2}{\pi a(\lambda^2\mathfrak{R}^2 - \pi^2 a^2)}, \\ B_a = \dfrac{-\mathfrak{n}_a}{n_a - \mathfrak{n}_a}[B_a + \mathfrak{B}_a], \\ \mathfrak{B}_a = \dfrac{n_a}{n_a - \mathfrak{n}_a}[B_a + \mathfrak{B}_a]. \end{cases}$$

Da die Coefficienten B und $\mathfrak{B}$ für hohe Werthe von a abnehmen, wie a^{-3}, so convergirt die Reihe für φ_0 und hat einen eindeutigen Werth für $t = 0$ und alle positiven Werthe von t, wenn nicht eine von den Grössen n_∞ oder $\mathfrak{n}_\infty$ positiv unendlich wird, was geschieht, wenn gleichzeitig $\mu = 0$ und k negativ ist. Ebenso sind die Reihen für $\frac{d\varphi}{dt}$ und für $\frac{d\varphi}{d\varrho}$, wenn $t \geqq 0$, und die Reihe für $\frac{d^2\varphi}{dt.d\varrho}$, wenn ausserdem auch $\mu = 0$, convergent und eindeutig.

Unter diesen Umständen können wir den Grössen φ und $\frac{d\varphi}{dt}$ die ihnen in den Gleichungen $(9^d.)$ für die Zeit $t = 0$ und den ganzen Raum beigelegten Werthe auch für alle negativen Werthe von t beilegen, ohne die Continuität der Bewegung zu stören.

Das entscheidende Kennzeichen für die Möglichkeit, zwei Bewegungen von verschiedenem analytischem Ausdrucke in einem gegebenen Zeitpunkte an einander zu schliessen, ist, wie oben gezeigt wurde, dass die den gesammten Arbeitswerth ihrer Differenz messende Function Φ gleich Null sei. Das ist aber im vorliegenden Beispiele der Fall, da die in dem Werthe von Φ vorkommenden Werthe von $\frac{d\varphi}{d\varrho}$, $\frac{d\varphi}{dt}$, und eventualiter auch $\frac{d^2\varphi}{dt.d\varrho}$, für $t = 0$ einerseits durch convergente Reihen gegeben sind, deren Werthe andrerseits mit den Werthen der Gleichungen $(9^d.)$ zusammenfallen.

Dadurch ist also diejenige elektrische Bewegung in der Kugel gegeben, welche nach vorausgehendem Gleichgewichtszustande der Elektricität erregt wird, wenn von der Zeit $t = 0$ ab die äussere Kugelschicht eine solche Bewegung ausführt, dass die elektrische Potentialfunction in dem Raume zwischen den beiden Kugeln die durch Gleichung $(9^b.)$ gegebene Function der Zeit wird.

So oft entweder μ von Null verschieden ist, oder k positiv ist, wird es immer möglich sein, für λ einen so hohen Werth zu nehmen, dass ν_0 und ν_1 reelle negative Grössen sind, und also die Bewegung der äusseren Kugel eine vorübergehende ist. Dies werde im Folgenden immer angenommen.

Da man übrigens beliebig viele verschiedene Bewegungen derselben

Art, die zu verschiedener Zeit anfangen und verschiedene Intensität haben, in der Kugel superponiren kann, so erhalten wir die Lösung einer allgemeineren Form der letztbehandelten Aufgabe, wenn wir mit $\mathfrak{F}$ die elektrische Potentialfunction bezeichnen, die Bezeichnung φ_t dagegen für die in den Gleichungen (9.) bis (9^f.) gegebene Function φ der Zeit beibehalten und setzen:

$$(10.)\qquad \mathfrak{F} = \int_t^{\infty} \varphi_{(t-\infty)} \,.\, \psi_\tau \,.\, d\tau + \int_{-\infty}^{t} \varphi_{(t-\tau)} \,.\, \psi_\tau \,.\, d\tau.$$

Darin ist unter ψ_τ eine willkürliche Function von τ verstanden, von der wir nur voraussetzen, dass das Integral $\int \psi_\tau \,.\, d\tau$, zwischen welchen Grenzen man es auch nehme, immer endlich sei. Unter $\varphi_{(t-\infty)}$ dagegen ist der constante Werth verstanden, den in den Gleichungen (9.) bis (9^f.) das φ_t für negative Werthe von t hat:

$$\varphi_{(t-\infty)} = C + \frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{R}} + C_0.$$

Zu bemerken ist, dass für den Raum zwischen beiden Kugelflächen bei der in Gleichung (10.) angezeigten Integration immer nur die Werthe von φ zu nehmen sind, die diesem Zwischenraume entsprechen, auch wenn R zeitweilig kleiner gewesen wäre, als das entsprechende ϱ.

Der Werth von φ ist eine Summe von Theilen, die theils wie $\left(\frac{\mathfrak{M}}{\varrho} + C_0\right)$ in aller Zeit unverändert bleiben, und deshalb in der Gleichung (10.) auch nur eine Constante zum Werthe von $\mathfrak{F}$ hinzufügen, theils aber auch veränderlich sind.

Zunächst wollen wir berechnen, welcher Art von Bewegung der äusseren Kugelfläche die in Gleichung (10.) dargestellte Bewegung der Elektricität angehört, und dazu den Werth von $\mathfrak{F}$ für den Raum zwischen $\mathfrak{R}$ und R berechnen. Der veränderliche Theil von φ ist hier das Glied $\frac{M}{R} - C_0$, was wir als Function der Zeit mit ε_t bezeichnen wollen. Es hat aber für negative Werthe von $t-\tau$ die Grösse $\varepsilon_{t-\tau}$ den constanten Werth C und für positive Werthe von $t-\tau$ ist entsprechend der Gleichung (9^b.):

$$(10^a.)\qquad \varepsilon_{t-\tau} = \frac{C}{\nu_1 - \nu_0}[\nu_1 \,.\, e^{\nu_0 t} - \nu_0 \,.\, e^{\nu_1 t}].$$

Diese Grösse genügt, wie leicht zu sehen, der Differentialgleichung

$$(10^b.)\qquad \frac{d^2\varphi}{dt^2} - (\nu_0 + \nu_1)\frac{d\varphi}{dt} + \nu_0\nu_1\varphi = 0.$$

Bezeichnen wir nun den entsprechenden veränderlichen Theil von $\mathfrak{F}$ mit E, indem wir setzen

$$(10^c.)\quad \mathrm{E} = C\int_t^\infty \psi_\tau\,.\,d\tau + \int_{-\infty}^t \varepsilon_{t-\tau}\,.\,\psi_\tau\,.\,d\tau.$$

Der oben gemachten Annahme gemäss sind ν_0 und ν_1 negative reelle Grössen, und ψ_τ immer endlich, folglich ist für $\tau = -\infty$

$$\varepsilon_{t-\tau}\,.\,\psi_\tau = 0,$$

ferner ist für $t = \tau$

$$\varepsilon_{t-\tau} = C \quad \text{und} \quad \frac{d\varepsilon_{t-\tau}}{dt} = 0.$$

Wenn wir mit Berücksichtigung davon die Differentialquotienten von E bilden, so erhalten wir

$$\frac{d\mathrm{E}}{dt} = \int_{-\infty}^t \frac{d\varepsilon_{t-\tau}}{dt}\,.\,\psi_\tau\,.\,d\tau,$$

$$\frac{d^2\mathrm{E}}{dt^2} = \int_{-\infty}^t \frac{d^2\varepsilon_{t-\tau}}{dt^2}\,.\,\psi_\tau\,.\,d\tau,$$

und indem wir diese Ausdrücke und $(10^c.)$ entsprechend der Gleichung $(10^b.)$ zusammenfügen, erhalten wir:

$$(10^d.)\quad \frac{d^2\mathrm{E}}{dt^2} - (\nu_0+\nu_1)\frac{d\mathrm{E}}{dt} + \nu_0\,.\,\nu_1\mathrm{E} = \nu_0\,.\,\nu_1\,.\,C\,.\int_t^\infty \psi_\tau\,.\,d\tau.$$

Wenn wir also E als Function der Zeit als gegeben ansehen, so können wir mittels der letzten Gleichung daraus den entsprechenden Werth von ψ herleiten. Eine nochmalige Differentiation nach t giebt diesen Werth nämlich unmittelbar. Die Function E ist nur der Bedingung unterworfen, dass sie selbst, so wie $\frac{d\mathrm{E}}{dt}$ und $\frac{d^2\mathrm{E}}{dt^2}$ zu jeder Zeit endlich sein müssen, weil sie sonst nicht in Gestalt der oben gegebenen Integrale unzweideutig auszudrücken sind. Nun ist für die in Gleichung (10.) dargestellte Bewegung

$$\frac{M}{R} - C_0 = \mathrm{E}.$$

Folglich ist auch $\frac{M}{R}$ eine bis auf die Endlichkeit der ersten beiden Differentialquotienten willkürliche Bewegung der Zeit, und die Gleichung (10.) stellt die elektrische Bewegung in der leitenden Kugel für jede beliebige Bewegung der äusseren elektrischen Schicht mit continuirlich sich ändernder Geschwindigkeit dar.

Ausgeschlossen sind jedoch, wie mehrfach hervorgehoben ist, die Fälle, wo $\mu = 0$ und k negativ ist, in denen die Reihe $(9^c.)$ nicht convergirt.

Ist k positiv, so ist die Lösung die einzige mögliche, wie aus den Betrachtungen des vorigen Paragraphen und den im Anfange des jetzigen dazu gegebenen Zusätzen hervorgeht. Wird von einer gewissen Zeit ab E constant, und also $\psi_t = 0$, so bleiben nur Bewegungen übrig, die die Zeit mit Factoren von negativen reellen Theilen in den Exponenten haben, und daher zum Gleichgewichtszustand zurückkehren.

Wenn dagegen k negativ ist, und μ einen positiven endlichen Werth hat, werden bei gewisser Grösse der leitenden Kugel eine Anzahl Exponenten n_a, welche den unterhalb einer gewissen Grenze liegenden Werthen von a entsprechen, positiv sein, und schwellende Bewegungen darstellen, die nie zum Gleichgewicht zurückkehren. Das im Ausdruck für φ Gleichung (9.) vorkommende Glied

$$B_a e^{n_a t}$$

giebt laut Gleichung (10.) im Werthe von $\mathfrak{F}$ ein Glied

$$B_a e^{n_a t} \int_{t_0}^{t_1} \psi_\tau . e^{-n_a \tau} . d\tau,$$

wenn t_0 und t_1 die Grenzen bezeichnen, zwischen denen ψ_t von Null verschieden ist. Da ψ_t innerhalb dieser Grenzen vollkommen willkürlich ist, wenn sein Integral nur endlich bleibt, so wird das Integral in dem letztgenannten Ausdruck nicht nothwendig gleich Null sein, und diese Glieder, welche schwellende Bewegungen darstellen, werden im Werthe von $\mathfrak{F}$ für Zeiten $t > t_1$ nicht zu fehlen brauchen.

Es könnte nun fraglich erscheinen, ob der gefundene Werth von $\mathfrak{F}$, der solche Glieder mit ansteigender Bewegung enthält, deren Summe mit S bezeichnet werde, das einzige Integral der Bewegungsgleichungen ist, welches den vorgeschriebenen Werthen von $\frac{M}{R}$ und einem anfänglichen Zustande elektrischen Gleichgewichts entspricht, und ob nicht ein zweites davon verschiedenes Integral existire, welches keine Glieder von schwellender Bewegung enthielte.

Um diesen Zweifel zu beseitigen, beachte man, dass

$$\mathfrak{F} - S$$

ebenfalls ein Integral derselben Bewegungsgleichungen ist, welches denselben Werthen von $\frac{M}{R}$ entspricht, wie $\mathfrak{F}$, welches für $t = -\infty$ wie für $t = +\infty$ sich einem endlichen constanten Werthe nähert. Dieses letztere Integral hat aber einen anderen Anfangszustand. Nämlich vor der Einwirkung der Aenderungen von R besteht schon die durch die Summe S dargestellte schwellende

Bewegung. Sie wird durch die äussere Einwirkung vernichtet, und geht in eine abschwellende über, die den Gleichgewichtszustand erreicht. Im vorigen Paragraphen ist aber gezeigt worden, dass nur eine einzige solche Bewegung existiren kann, die unter Einwirkung gegebener äusserer Kräfte von einem gegebenen Zustand unendlich kleiner Bewegung zu einem Endzustand unendlich kleiner Bewegung führt. Also ist das Integral $\mathfrak{F} - S$ das einzige dieser Art, und es giebt kein anderes, welches bei den gegebenen Kräften aus anfänglichem in endliches Gleichgewicht führt.

Untersuchung des Falls, wo k negativ und $\mu = 0$. In diesem Falle giebt es keinen Werth von $\mathfrak{a}$ oder λ, für welchen nicht einer der beiden Werthe von n_a oder ν reell positiv würde. Um daher eine dauernd endlich bleibende Bewegung zu erhalten, muss man die anfängliche Bewegung durch die schwellenden, die endliche durch die abschwellenden Glieder zusammensetzen.

Wir wollen mit n_a und mit ν_0 die positiven Werthe, mit $\mathfrak{n}_a$ und ν_1 die negativen der Exponenten bezeichnen. Die Gleichungen (8^b.) und (9^a.) werden dabei:

$$(11.)\quad \begin{cases} A^2 k n_a^2 + \dfrac{\pi^2 \mathfrak{a}^2}{\mathfrak{R}^2}\left\{\dfrac{\varkappa}{4\pi} n_a + 1\right\} = 0, \\ A^2 k \nu^2 + \lambda^2 \left\{\dfrac{\varkappa}{4\pi}\nu + 1\right\} = 0. \end{cases}$$

Man setze

1) für negative Werthe von t

$$(11^a.)\quad \frac{M}{R} = C.\nu_1.e^{\nu_0 t} + C.\nu_0,$$

und für $\mathfrak{R} < \varrho < R$

$$(11^b.)\quad \varphi = \frac{M}{R} + \frac{\mathfrak{M}}{\varrho},$$

für $\varrho < \mathfrak{R}$

$$(11^c.)\quad \varphi = C\cdot\frac{\mathfrak{R}.\sin(\lambda\varrho)}{\varrho.\sin(\lambda\mathfrak{R})}\cdot\nu_1.e^{\nu_0 t} + C.\nu_0 + \frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{R}} + \frac{1}{\varrho}\Sigma\left\{B_a.e^{n_a t}.\sin\left(\frac{\pi a\varrho}{\mathfrak{R}}\right)\right\};$$

2) für positive Werthe von t

$$(11^d.)\quad \frac{M}{R} = C.\nu_1 + C.\nu_0.e^{\nu_1 t},$$

und für $\mathfrak{R} < \varrho < \mathfrak{R}$

$$(11^b.)\quad \varphi = \frac{\mathfrak{M}}{\varrho} + \frac{M}{R},$$

dagegen für $\varrho < R$

$$(11^e.)\quad \varphi = C.\nu_1 + C.\nu_0\cdot\frac{\mathfrak{R}.\sin(\lambda\varrho)}{\varrho.\sin(\lambda\mathfrak{R})}\cdot e^{\nu_1 t} + \frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{R}} - \frac{1}{\varrho}\Sigma\left\{\mathfrak{B}_a.e^{\mathfrak{n}_a t}.\sin\left(\frac{\pi a\varrho}{\mathfrak{R}}\right)\right\}.$$

Die Continuität der Bewegung zur Zeit $t=0$ ist hergestellt, wenn die Werthe von φ und $\frac{d\varphi}{dt}$ übereinstimmen, also:

$$(11^f.)\quad \begin{cases} 0 = C(\nu_0-\nu_1)\left[1-\frac{\mathfrak{R}.\sin(\lambda\varrho)}{\varrho.\sin(\lambda\mathfrak{R})}\right]+\frac{1}{\varrho}\Sigma\left\{(B_a+\mathfrak{B}_a).\sin\left(\frac{\pi a\varrho}{\mathfrak{R}}\right)\right\} \\ \text{und} \\ \qquad n_a B_a + \mathfrak{n}_a\mathfrak{B}_a = 0. \end{cases}$$

Es sind dies Gleichungen von der Form wie (9^e.) und finden ebenso ihre Lösung.

So ist zunächst eine immer endlich bleibende Lösung für die eine in den Gleichungen (11^a.) und (11^d.) vorgeschriebene Bewegung der äusseren elektrischen Schicht gewonnen. Aus dieser kann man wieder andere Lösungen für andere äussere Kräfte durch Superposition zusammensetzen.

Es ist ebenso, wie in dem allgemeineren Falle, wo μ nicht gleich Null war, der Beweis zu führen, dass durch solche Superposition jede beliebige Art der Bewegung der äusseren Kugel, bei der die Geschwindigkeit sich nur nicht sprungweise ändert, darzustellen ist.

Die durch eine solche Lösung dargestellte Bewegung ist eine, die immer endlich bleibt, und zur Zeit $t=-\infty$ wie zur Zeit $t=+\infty$ unendlich wenig vom Gleichgewichtszustande verschieden ist.

Da es für dieselben gegebenen Werthe von $\frac{M}{R}$ keine zweite derselben Art geben kann, so folgt, dass im Allgemeinen, wenn vor Beginn der Bewegung der Masse M Ruhe geherrscht hat, eine dauernd fortschreitende Störung des Gleichgewichts in der Kugel erregt werden muss.

Ausnahmen hiervon können bei diesen und den vorigen Fällen, wo $k<0<\mu$, nur bei bestimmten Bewegungsweisen eintreten, wenn nämlich für *jedes* positive n_a

$$(11^g.)\qquad \int \psi_\tau . e^{-n_a\tau} d\tau = 0,$$

dies Integral zwischen den Grenzen genommen, zwischen welchen ψ_τ von Null unterschieden ist.

Für eine endliche Anzahl von Werthen von a lässt sich diese Gleichung offenbar erfüllen, wenn man über entsprechend viele Constanten in dem Ausdruck für ψ verfügen kann.

Da aber ψ_τ ganz willkürlich zwischen beliebigen Grenzen bestimmt werden kann, und nur der Bedingung unterworfen ist, dass

$$\int \psi_\tau . d\tau,$$

zwischen beliebigen Grenzen genommen, immer endlich bleibt, so werden die Gleichungen (11^g.) im Allgemeinen nicht erfüllt sein.

§. 6.

Ueber den Einfluss der Constante k bei ausführbaren Versuchen.

Die Grössen U, V, W in den Bewegungsgleichungen (3^b.) hängen nach ihrer in (1^d.) gegebenen Definition von der Constante k ab. Um die Theile derselben, die davon abhängen, zu trennen von denjenigen, die von k unabhängig sind, führen wir die Bezeichnung ein

$$(12.)\quad \begin{cases} \mathfrak{U} = U+\frac{k}{2}\frac{d\Psi}{dx}, \\ \mathfrak{V} = V+\frac{k}{2}\frac{d\Psi}{dy}, \\ \mathfrak{W} = W+\frac{k}{2}\frac{d\Psi}{dz}, \end{cases}$$

wo unter Ψ die in der Gleichung (2^c.) definirte Function zu verstehen ist, und nach (2^d.)

$$(2^d.)\quad \varDelta\Psi = 2\frac{d\varphi}{dt}.$$

Ψ selbst, wie seine ersten und zweiten Differentialcoefficienten, nach den Coordinaten genommen, sind an den mit Elektricität belegten Flächen continuirlich.

Wir setzen ferner in diesem Paragraphen voraus, dass *die Abhängigkeit der behandelten Functionen von der Zeit nur dadurch gegeben sei, dass sie alle den Factor e^{nt} enthalten*. Wenn n complex oder imaginär ist, sind schliesslich in der Lösung nur die reellen Theile der betreffenden Functionen zu nehmen. Das System der Gleichungen (I.) bis (V.) wird unter diesen Umständen:

Im Innern der Leiter:

$$(12^a.)\quad \begin{cases} \frac{\varkappa}{4\pi}\cdot\varDelta\mathfrak{U} - A^2.n.\mathfrak{U} = \left(1+\frac{\varkappa n}{4\pi}\right)\cdot\frac{d\varphi}{dx} - A^2\cdot\frac{kn}{2}\cdot\frac{d\Psi}{dx}, \\ \frac{\varkappa}{4\pi}\cdot\varDelta\mathfrak{V} - A^2.n.\mathfrak{V} = \left(1+\frac{\varkappa n}{4\pi}\right)\cdot\frac{d\varphi}{dy} - A^2\cdot\frac{kn}{2}\cdot\frac{d\Psi}{dy}, \\ \frac{\varkappa}{4\pi}\cdot\varDelta\mathfrak{W} - A^2.n.\mathfrak{W} = \left(1+\frac{\varkappa n}{4\pi}\right)\cdot\frac{d\varphi}{dz} - A^2\cdot\frac{kn}{2}\cdot\frac{d\Psi}{dz}. \end{cases}$$

Ferner im äusseren Raume:

$$(12^b.)\quad \begin{cases} \Delta \mathfrak{U}_1 - n \cdot \dfrac{d\varphi_1}{dx} = -4\pi . u_1, \\ \Delta \mathfrak{V}_1 - n \cdot \dfrac{d\varphi_1}{dy} = -4\pi . v_1, \\ \Delta \mathfrak{W}_1 - n \cdot \dfrac{d\varphi_1}{dz} = -4\pi . w_1. \end{cases}$$

Im ganzen Raume:

$$(12^c.)\quad \begin{cases} \dfrac{d\mathfrak{U}}{dx} + \dfrac{d\mathfrak{V}}{dy} + \dfrac{d\mathfrak{W}}{dz} = 0, \\ \dfrac{d\mathfrak{U}_1}{dx} + \dfrac{d\mathfrak{V}_1}{dy} + \dfrac{d\mathfrak{W}_1}{dz} = 0. \end{cases}$$

An den mit Elektricität belegten Flächen:

$$(12^d.)\quad \mathfrak{U} - \mathfrak{U}_1 = \mathfrak{V} - \mathfrak{V}_1 = \mathfrak{W} - \mathfrak{W}_1 = \varphi - \varphi_1 = 0,$$

$$(12^e.)\quad \frac{d\mathfrak{U}}{dN} - \frac{d\mathfrak{U}_1}{dN} = \frac{d\mathfrak{V}}{dN} - \frac{d\mathfrak{V}_1}{dN} = \frac{d\mathfrak{W}}{dN} - \frac{d\mathfrak{W}_1}{dN} = 0.$$

In unendlicher Entfernung

$$\mathfrak{U} = \mathfrak{V} = \mathfrak{W} = \varphi = \Psi = 0.$$

In diesem ganzen Systeme von Gleichungen kommt k nur noch als Factor der Function Ψ in den Gleichungen $(12^a.)$ vor. Wir werden also zu untersuchen haben, wann diese k enthaltenden Glieder merklichen Einfluss auf die Lösung der Aufgabe erhalten können, wann nicht.

Mit Berücksichtigung der Gleichungen $(2^d.)$ und $(12^c.)$ folgt aus denen $(12^a.)$

$$(12^f.)\quad 0 = \left(\frac{n\varkappa}{4\pi} + 1\right)\Delta\varphi - A^2 k n^2 \varphi,$$

und ein partikuläres Integral dieser Gleichung ist

$$(12^g.)\quad \varphi = \frac{B}{\varrho} e^{l\varrho + nt},$$

wo $\varrho^2 = x^2 + y^2 + z^2$ ist, und

$$(12^{g*}.)\quad l^2 = \frac{4\pi A^2 k n^2}{\varkappa n + 4\pi}.$$

Bei wechselnden Werthen von $\varkappa$ erreicht der Modulus von l seinen höchsten Werth, wenn $\varkappa = 0$. Dann wird

$$l = n A \sqrt{k}$$

und also bei imaginärem n die Grösse $\dfrac{1}{A\sqrt{k}}$ die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der durch die Gleichung $(12^g.)$ dargestellten Wellen. Wenn $\varkappa$ nicht gleich Null ist, ist die Fortpflanzungsgeschwindigkeit kleiner und die Fortpflanzung

mit Absorption der Wellen verbunden. Uebrigens ist $\varkappa n$ gegen 4π verschwindend klein im Kupfer, selbst, wenn die Schwingungsperiode ein Milliontheil einer Secunde ist.

Wenn wir nun die letzten beiden Glieder in jeder der Gleichungen (12^a.) der Grösse nach vergleichen, so ist

$$(12^h.)\qquad \frac{d\varphi}{dx} = -\int E\cdot\frac{x-\xi}{r^3}\cdot d\xi\,.\,d\eta\,.\,d\zeta,$$

$$(12^i.)\qquad \frac{A^2kn}{4\pi+\varkappa n}\cdot 2\pi\frac{d\Psi}{dx} = \tfrac{1}{2}\int E\cdot\frac{x-\xi}{r^3}\cdot l^2\,.\,r^2\,.\,d\xi\,.\,d\eta\,.\,d\zeta.$$

So oft nun $\frac{1}{2}l^2r^2$ für diejenigen Werthe von r, welche zwischen den Punkten x, y, z des Körpers und den Orten ξ, η, ζ der beweglichen elektrischen Massen vorkommen, verschwindend klein ist, wird im Allgemeinen auch der mit k multiplicirte Ausdruck verschwindend klein gegen die Differentialquotienten von φ sein, zu denen er summirt ist.

Es ist aber $\frac{l}{2\pi}$ die Wellenlänge der Oscillationen, deren Schwingungsdauer $\frac{n}{2\pi}$ ist, und die Fortpflanzungsgeschwindigkeit dieser Oscillationen ist gleich der des Lichts, dividirt durch $\sqrt{k}$. Wenn also k wie in Herrn *F. E. Neumanns* Annahme gleich Eins ist, oder wenigstens nicht unverhältnissmässig viel grösser als Eins, so *werden im Allgemeinen bei Versuchen an irdischen Leitern die Bewegungen der Elektricität nicht merklich anders ausfallen, als wenn* $k=0$ *wäre,* wenn nicht eben Dimensionen der Leiter benutzt und so kleine Zeittheile beobachtet werden können, dass sich die von der Lichtgeschwindigkeit herrührenden Unterschiede innerhalb dieser Dimensionen und Zeittheile geltend machen.

Diese Folgerung ist darauf gegründet, dass die in (12^h.) und (12^i.) ausgedrückten Grössen Summen sind von denselben Summanden, aber so, dass in der zweiten Summe jeder Summand mit einem verschwindend kleinen Factor multiplicirt ist, der bei imaginärem n einen immer negativen reellen und einen der Regel nach dagegen verschwindenden imaginären Theil hat. Diese Folgerung würde nicht ohne Weiteres zulässig sein, wenn φ die relativ kleine Differenz einer sehr grossen positiven und einer nahehin ebenso grossen negativen Quantität wäre, und dabei der mittlere Werth von r^2 für die eine dieser Quantitäten einen endlichen Unterschied von dem der andern angehörigen Mittelwerthe hätte. Nun kann allerdings φ in der angegebenen Weise zusammengesetzt sein, aber dabei nur dann überall endlich bleiben, wenn zwei unendlich

grosse elektrische Quanta in unendlich kleiner Entfernung von einander als elektrische Doppelschicht von endlichem Momente gelagert sind, wie in den beiden Platten eines Condensators oder in den beiden Belegungen einer Leydener Flasche. In diesen Fällen ist aber offenbar die zweite Bedingung nicht erfüllt, nämlich die, dass der mittlere Werth von r^2 für die positive und negative elektrische Masse endlich verschieden sei.

In der Voraussetzung also, dass die Constante k keine sehr grosse Zahl ist, wird man die analytische Behandlung der Aufgaben über Elektricitätsbewegung vereinfachen dürfen, indem man $k = 0$ setzt, oder die Fortpflanzung der Longitudinalwellen unendlich gross annimmt, so oft die Dimensionen der gebrauchten Leiter verschwindend klein sind gegen die Moduln der (reellen oder complexen) Wellenlängen der zur Wahrnehmung kommenden elektrischen Oscillationen (deren Periode auch complex sein kann).

Die Vereinfachung der analytischen Operationen, welche eintritt, wenn wir $k = 0$ setzen, gründet sich darauf, dass die Gleichungen (II.) und (II^a.) nicht mehr nach t integrirt zu werden brauchen. Die Gleichung (12^f.) ergiebt alsdann für das Innere der Leiter entweder

$$n = -\frac{4\pi}{\varkappa}$$

oder

$$\Delta\varphi = 0.$$

Die letztere Alternative ergiebt, dass gar keine freie Elektricität im Innern der Leiter vorkommt. Die erstere giebt

$$\varphi = f_{x,y,z} \cdot e^{-\frac{4\pi}{\varkappa}t},$$

unabhängig von aller Einwirkung äusserer Kräfte. Bei denjenigen elektrischen Bewegungen also, die im Innern eines Leiters nach vorausgegangenem elektrischen Gleichgewicht durch äussere Kräfte hervorgerufen werden können, wird freie Elektricität, bei der Annahme $k = 0$, nur immer an der Oberfläche der Leiter oder an den Grenzflächen verschiedener Leiter vorkommen können.

§. 7.

Bewegung in einem unendlichen Cylinder.

Die einzige praktisch angewendete Form eines Leiters von hinreichend grossen Dimensionen, an der man hoffen könnte, Unterschiede, die der Lichtgeschwindigkeit entsprechen, zu entdecken, wäre die eines sehr langen Drahtes.

Ich will deshalb die Theorie der elektrischen Bewegung in einem solchen hier noch ausführen, basirt auf die Gleichungen (12^a.) bis (12^f.), indem, wie dort, die Abhängigkeit von t auf einen Factor e^{nt} beschränkt bleibe, und zugleich die Geschwindigkeiten u_1, v_1, w_1 im äusseren Raume gleich Null gesetzt werden:

$$(13.)\qquad u_1 = v_1 = w_1 = 0.$$

Die Axe des Drahtes sei auch die Axe der x, der Draht cylindrisch mit kreisförmigem Querschnitt vom Radius R. Die Bewegung geschehe theils in Richtung der x, theils in den darauf senkrechten Richtungen der

$$(13^a.)\qquad \varrho = \sqrt{y^2+z^2}.$$

Wir können unter diesen Umständen setzen

$$(13^b.)\qquad \begin{cases} \mathfrak{V} = \dfrac{d^2\chi}{dx.d\varrho}\cdot\dfrac{y}{\varrho} = \dfrac{d^2\chi}{dx.dy}, \\ \mathfrak{W} = \dfrac{d^2\chi}{dx.d\varrho}\cdot\dfrac{z}{\varrho} = \dfrac{d^2\chi}{dx.dz}. \end{cases}$$

Aus den Gleichungen (12^a.) fliessen die drei Gleichungen

$$(13^c.)\qquad \begin{cases} \dfrac{\varkappa}{4\pi}\cdot\varDelta\left\{\dfrac{d\mathfrak{V}}{dz}-\dfrac{d\mathfrak{W}}{dy}\right\} - A^2.n.\left\{\dfrac{d\mathfrak{V}}{dz}-\dfrac{d\mathfrak{W}}{dy}\right\} = 0, \\ \dfrac{\varkappa}{4\pi}\cdot\varDelta\left\{\dfrac{d\mathfrak{W}}{dx}-\dfrac{d\mathfrak{U}}{dz}\right\} - A^2.n.\left\{\dfrac{d\mathfrak{W}}{dx}-\dfrac{d\mathfrak{U}}{dz}\right\} = 0, \\ \dfrac{\varkappa}{4\pi}\cdot\varDelta\left\{\dfrac{d\mathfrak{U}}{dy}-\dfrac{d\mathfrak{V}}{dx}\right\} - A^2.n.\left\{\dfrac{d\mathfrak{U}}{dy}-\dfrac{d\mathfrak{V}}{dx}\right\} = 0. \end{cases}$$

Die erste von diesen ist durch die Annahmen in (13^b.) erfüllt. Die beiden andern ergeben, dass die Differentialquotienten nach y und z genommen von folgendem Ausdrucke gleich Null sind

$$(13^{c*}.)\qquad \frac{\varkappa}{4\pi}\cdot\varDelta\left\{\frac{d^2\chi}{dx^2}-\mathfrak{U}\right\} - A^2n\left\{\frac{d^2\chi}{dx^2}-\mathfrak{U}\right\} = f_x,$$

und gleichzeitig giebt (12^c.)

$$\frac{d}{dx}\left\{\mathfrak{U}+\frac{d^2\chi}{dy^2}+\frac{d^2\chi}{dz^2}\right\} = 0$$

oder

$$\mathfrak{U}-\mathfrak{F}_{(\varrho)} = -\frac{d^2\chi}{dy^2}-\frac{d^2\chi}{dz^2} = -\frac{d^2\chi}{d\varrho^2}-\frac{1}{\varrho}\cdot\frac{d\chi}{d\varrho}.$$

Da eine Function von ϱ allein zu χ hinzugesetzt werden kann, ohne die Werthe von $\mathfrak{V}$ und $\mathfrak{W}$ zu ändern, so können wir die willkürliche Function $\mathfrak{F}_{(\varrho)}$ hier weglassen, ohne die Allgemeinheit der Integration zu beschränken, und haben

$$(13^d.)\qquad \mathfrak{U} = \frac{d^2\chi}{dx^2}-\varDelta\chi.$$

Wir erhalten dann für die Function χ aus (13^{c*}.) folgende Differentialgleichung:

$$(13^e.)\qquad \frac{\varkappa}{4\pi}\cdot\Delta\Delta\chi - A^2 n\,\Delta\chi = 0.$$

Die dort stehende willkürliche Function $f(x)$ kann hier wiederum durch eine in χ einbegriffene Function von x ersetzt gedacht werden, da die Hinzufügung einer solchen zu χ die Werthe von $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{V}$ oder $\mathfrak{W}$ nicht verändert.

Setzt man nun diese Werthe in die Gleichungen (12^a.) ein, so findet man, dass die drei Differentialquotienten, nach x, y und z genommen, der folgenden Gleichung gleich Null sind

$$(13^f.)\qquad \frac{\varkappa}{4\pi}\Delta\left(\frac{d\chi}{dx}\right) - A^2.n.\frac{d\chi}{dx} = \left(1+\frac{\varkappa n}{4\pi}\right)\varphi - A^2.\frac{kn}{2}\Psi + \text{Const.}$$

Folglich muss diese Gleichung (13^f.) erfüllt sein, und sie zusammen mit der Gleichung (13^e.) ersetzt die Gleichungen (12^a.). Führt man die Operation Δ an (13^f.) aus, so erhält man die Differentialgleichung für φ:

$$(13^g.)\qquad \left(1+\frac{\varkappa n}{4\pi}\right)\Delta\varphi - A^2.k.n^2.\varphi = 0.$$

Man kann auch im äusseren Raume die Functionen $\mathfrak{U}_1$, $\mathfrak{V}_1$, $\mathfrak{W}_1$ auf die Form bringen:

$$(13^h.)\qquad \begin{cases} \mathfrak{U}_1 = \dfrac{d^2\chi_1}{dx^2} - \Delta\chi_1 = -\dfrac{d^2\chi_1}{d\varrho^2} - \dfrac{1}{\varrho}\cdot\dfrac{d\chi_1}{d\varrho}, \\ \mathfrak{V}_1 = \dfrac{d^2\chi_1}{dx.dy}, \\ \mathfrak{W}_1 = \dfrac{d^2\chi_1}{dx.dz}, \end{cases}$$

welche die Gleichung (12^c.) erfüllen.

Die Gleichungen (12^b.) und (13.) werden durch sie erfüllt, wenn man setzt:

$$(13^i.)\qquad \Delta\left(\frac{d\chi_1}{dx}\right) = n\varphi_1 = \tfrac{1}{2}\Delta\Psi_1$$

und

$$(13^k.)\qquad \Delta\Delta\left(\frac{d\chi_1}{dx}\right) = n.\Delta\varphi_1 = 0.$$

Daraus folgt, dass im äussern Raume sich $\frac{d\chi_1}{dx}$ und $\frac{1}{2}\Psi_1$ nur um eine Potentialfunction unterscheiden können, da die Gleichung (13^i.) sich auch schreiben lässt:

$$(13^l.)\qquad \Delta\left\{\frac{d\chi_1}{dx} - \tfrac{1}{2}\Psi_1\right\} = 0.$$

Wie wir oben schon angenommen haben, dass die Abhängigkeit der hier zu untersuchenden Functionen von t darauf beschränkt sei, dass sie den Factor e^{nt} enthalten, so fügen wir nun die weitere Beschränkung hinzu, dass ihre Abhängigkeit von x dadurch gegeben sei, dass sie den Factor e^{mx} enthalten, worin m einen imaginären Werth haben soll. Imaginär muss m sein, weil nur unter dieser Bedingung die in den Gleichungen (1^a.) oder (1^b.) gegebenen elektromotorischen Kräfte endlich sind.

Unter dieser Annahme werden die Bedingungsgleichungen unseres Problems folgende:

$$(14.)\quad \frac{x}{4\pi}\cdot\Delta\Delta\chi - A^2.n.\Delta\chi = 0,$$

$$(14^a.)\quad \Delta\Delta\chi_1 = \Delta\varphi_1 = 0,$$

$$(14^b.)\quad \frac{xm}{4\pi}\Delta\chi - A^2.n.m\chi = \left(1+\frac{xn}{4\pi}\right)\varphi - \tfrac{1}{2}A^2.k.n.\Psi,$$

$$(14^c.)\quad 2m.\Delta\chi_1 = \Delta\Psi_1 = 2n\varphi_1.$$

Dazu kommen noch die Grenzbedingungen für die Oberfläche des Cylinders, (12^d.) und (12^e.), welche sich reduciren auf folgende:

$$(14^d.)\quad m^2\chi - \Delta\chi = m^2\chi_1 - \Delta\chi_1,$$

$$(14^e.)\quad \frac{d\chi}{d\varrho} = \frac{d\chi_1}{d\varrho},$$

$$(14^f.)\quad \Delta\left(\frac{d\chi}{d\varrho}\right) = \Delta\left(\frac{d\chi_1}{d\varrho}\right),$$

$$(14^g.)\quad \varphi = \varphi_1,$$

$$(14^h.)\quad \Psi = \Psi_1,$$

$$(14^i.)\quad \frac{d\Psi}{d\varrho} = \frac{d\Psi_1}{d\varrho}.$$

Endlich für $\varrho = \infty$ müssen alle diese Functionen gleich Null werden.

Bezeichnen wir mit $J_{(p\varrho)}$ diejenige *Bessel*sche Function, welche für $\varrho = 0$ endlich bleibt und die Differentialgleichung erfüllt

$$(15.)\quad \frac{d^2}{d\varrho^2}\cdot[J_{(p\varrho)}] + \frac{1}{\varrho}\cdot\frac{d}{d\varrho}[J_{(p\varrho)}] + p^2J_{(p\varrho)} = 0,$$

so ist

$$\Delta[e^{mx}.J_{(p\varrho)}] = (m^2-p^2).e^{mx}.J_{(p\varrho)},$$

und es wird also die Gleichung (13^g.) integrirt durch die Annahme

$$(15^a.)\quad \varphi = \mathfrak{A}.e^{nt+mx}.J_{(p\varrho)},$$

wenn

$$(15^b.)\qquad \left(1+\frac{\varkappa n}{4\pi}\right)(m^2-p^2) = A^2.k.n^2.$$

Bezeichnen wir dagegen mit $\mathfrak{J}_{(p\varrho)}$ dasjenige Integral der Gleichung (15.), welches für $\varrho=\infty$ gleich Null wird, so ist im äusseren Raume mit Berücksichtigung von $(14^a.)$ und $(14^g.)$ zu setzen:

$$(15^c.)\qquad \varphi_1 = \mathfrak{A}.e^{nt+mx}.\frac{J_{(pR)}}{\mathfrak{J}_{(mR)}}.\mathfrak{J}_{(m\varrho)}.$$

Die aus φ zu bildende Function Ψ ist dadurch bestimmt, dass im ganzen Raume

$$(15^d.)\qquad \varDelta\Psi = 2n\varphi \quad\text{und}\quad \varDelta\Psi_1 = 2n\varphi_1,$$

sowie durch die Bedingungen für die Oberfläche $(14^h.)$ und $(14^i.)$. Danach wird im Innern des Cylinders Ψ die Form haben:

$$(15^e.)\qquad \Psi = \left\{\frac{2n}{m^2-p^2}.\mathfrak{A}.J_{(p\varrho)}+\mathfrak{E}.J_{(m\varrho)}\right\}.e^{nt+mx}$$

und im äusseren Raume

$$(15^f.)\qquad \Psi_1 = \left\{-\frac{n\varrho}{m^2}.\mathfrak{A}.\frac{J_{(pR)}}{\mathfrak{J}_{(mR)}}.\mathfrak{J}'_{(m\varrho)}+\mathfrak{F}.\mathfrak{J}_{(m\varrho)}\right\}.e^{nt+mx}.$$

Aus der Differentialgleichung (15.) folgt leicht, wenn wir sie nach p differentiiren, p dann mit m vertauschen, und zur Abkürzung setzen

$$\mathfrak{J}'_{(m\varrho)} = \frac{d}{d\varrho}.\mathfrak{J}_{(m\varrho)},$$

dass

$$\frac{d^2}{d\varrho^2}\left[\frac{\varrho}{m}.\mathfrak{J}'_{(m\varrho)}\right]+\frac{1}{\varrho}.\frac{d}{d\varrho}\left[\frac{\varrho}{m}.\mathfrak{J}'_{(m\varrho)}\right]+m^2.\left[\frac{\varrho}{m}.\mathfrak{J}'_{(m\varrho)}\right] = -2m.\mathfrak{J}_{(m\varrho)}$$

und somit $(15^d.)$ erfüllt sei. Die Coefficienten $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{F}$ bestimmen sich durch die Gleichungen $(14^h.)$ und $(14^i.)$, welche ergeben:

$$(15^g.)\qquad \begin{cases}\left[\frac{2n}{m^2-p^2}.J_{(pR)}+\frac{nR}{m^2}.J_{(pR)}.\frac{\mathfrak{J}'_{(mR)}}{\mathfrak{J}_{(mR)}}\right]\mathfrak{A}+\mathfrak{E}.J_{(mR)}-\mathfrak{F}.\mathfrak{J}_{(mR)} = 0,\\ \left[\frac{2n}{m^2-p^2}.J'_{(pR)}-nR.J_{(pR)}\right]\mathfrak{A}+\mathfrak{E}.J'_{(mR)}-\mathfrak{F}.\mathfrak{J}'_{(mR)} = 0.\end{cases}$$

Wir haben nun noch die Function χ zu bilden. Zunächst muss die Function $\varDelta\chi$ die Differentialgleichung (14.) erfüllen und dabei für $\varrho=0$ endlich bleiben. Daraus folgt unter den vorausgeschickten Annahmen:

$$(16.)\qquad \varDelta\chi = \mathfrak{B}.e^{nt+mx}.J_{(q\varrho)}$$

und

$$(16^a.)\qquad \frac{\varkappa}{4\pi}(m^2-q^2) = A^2.n.$$

Daraus folgt dann weiter, dass χ von der Form sein muss:

$$(16^b.)\qquad \chi = \left[\frac{1}{m^2-q^2}\cdot\mathfrak{B}.J_{(q\varrho)}+\mathfrak{G}.J_{(m\varrho)}\right].e^{nt+mx},$$

wo $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{G}$ zwei constante Coefficienten sind. Der letztere bestimmt sich aus der Gleichung (14^b.), die sich bei Einsetzung der Werthe (16^b.), (15^c.) und (15^a.) reducirt auf

$$(16^c.)\qquad \mathfrak{G} = \frac{k}{2m}\cdot\mathfrak{E}.$$

Im äusseren Raume muss die Function χ_1 nach (14^c.) von der Form sein

$$(16^d.)\qquad \chi_1 = \frac{1}{2m}\Psi_1+\mathfrak{H}.e^{nt+mx}.\mathfrak{J}_{(m\varrho)}.$$

Die Coefficienten $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{H}$ bestimmen sich durch die Grenzbedingungen (14^d.), (14^e.) und 14^f.), nämlich

$$(16^e.)\qquad \begin{cases} \dfrac{q^2}{m^2-q^2}\cdot\mathfrak{B}.J_{(qR)}+m^2.\mathfrak{G}.J_{(mR)} \\ = \dfrac{np^2}{m(m^2-p^2)}\cdot\mathfrak{A}.J_{(pR)}+\dfrac{m}{2}\cdot\mathfrak{E}.J_{(mR)}+m^2.\mathfrak{H}.\mathfrak{J}_{(mR)}, \\ \dfrac{1}{m^2-q^2}\cdot\mathfrak{B}.J'_{(qR)}+\mathfrak{G}.J'_{(mR)} \\ = \dfrac{n}{m(m^2-p^2)}\cdot\mathfrak{A}.J'_{(pR)}+\dfrac{1}{2m}\cdot\mathfrak{E}.J'_{(mR)}+\mathfrak{H}.\mathfrak{J}'_{(mR)}, \\ \mathfrak{B}.J'_{(qR)} = \dfrac{n}{m}\cdot\mathfrak{A}.J_{(pR)}\cdot\dfrac{\mathfrak{J}'_{(mR)}}{\mathfrak{J}_{(mR)}}. \end{cases}$$

Die zwei Gleichungen (15^g.), die eine (16^c.) und die drei (16^e.) bilden ein System von sechs homogenen linearen Gleichungen mit den sechs Unbekannten

$$\mathfrak{A},\ \mathfrak{B},\ \mathfrak{E},\ \mathfrak{F},\ \mathfrak{G},\ \mathfrak{H}.$$

Folglich muss die Determinante derselben gleich Null sein. Dies giebt schliesslich eine Gleichung, welche zur Bestimmung von n dient. Zur Abkürzung setzen wir

$$(16^f.)\qquad P=\frac{J'_{(pR)}}{J_{(pR)}},\qquad Q=\frac{J'_{(qR)}}{J_{(qR)}}\qquad\text{und}\qquad M=\frac{\mathfrak{J}'_{(mR)}}{\mathfrak{J}_{(mR)}}.$$

Dann ist die Eliminationsgleichung folgende:

$$(16^g.)\qquad \frac{q^2}{m^2-q^2}\cdot\frac{M}{Q}[M-Q]-k\cdot\frac{m^2}{m^2-p^2}[M-P]+\frac{1-k}{2}\cdot R[M^2+m^2] = 0.$$

Die unbekannte Grösse n ist hier in den q, p, Q und P enthalten. Es ist nun $\frac{2\pi}{im}$ gleich der Wellenlänge der betrachteten elektrischen Wellen nach der Länge des Drahtes gemessen; wir nehmen an, dass diese sehr gross gegen die Dicke des Drahtes sei, und betrachten deshalb mR als eine Grösse, die gegen die Einheit verschwindet.

Ferner ist $\frac{2\pi}{\sqrt{m^2-p^2}}$ nach (15^b.) die Wellenlänge der longitudinalen elektrischen Wellen in einem ausgedehnten leitenden Medium, deren Schwingungsdauer $\frac{2\pi}{n}$ ist; wir können deshalb auch $(m^2-p^2)R^2$ und p^2R^2 wie m^2R^2 als verschwindend klein gegen die Einheit betrachten. Dagegen ist

$$m^2-q^2 = \frac{4\pi n.A^2}{\varkappa},$$

und für Kupfer wird dies

$$m^2-q^2 = 4\pi n.\tfrac{1}{2271000}\,\frac{\text{Secunden}}{\text{Quadratmillimeter}}.$$

Wenn also R nicht unverhältnissmässig viel grösser als ein Millimeter ist, und n nicht viele Tausende beträgt, so wird auch $(m^2-q^2)R^2$ und q^2R^2 als eine gegen die Einheit kleine Grösse betrachtet werden können.

Da nun

$$J_{(pR)} = 1-\frac{p^2.R^2}{2.2}+\frac{p^4.R^4}{2.2.4.4}-\text{etc.}$$

ist, so kann für sehr kleine Werthe von pR und qR gesetzt werden

$$P = -\tfrac{1}{2}p^2R,$$

$$\frac{q^2}{Q} = -\frac{2}{R}+q^2\frac{R}{4}.$$

Wenn wir diese Werthe in (16^g.) einsetzen, erhalten wir die für kleine Werthe von pR und qR zunächst noch ohne Einschränkung der Werthe von mR gültige Gleichung:

$$(16^h.)\quad \begin{cases} 0 = -m^2\left[M+\frac{m^2R}{2}\right]+\frac{\varkappa n}{4\pi}\left[-\frac{2}{R}M^2\left(1-\frac{m^2R^2}{4}\right)-2Mm^2-\frac{m^4R}{2}\right] \\ \qquad\qquad +A^2n^2\left[M+\frac{R}{4}M^2+\frac{m^2R}{2}-\frac{1}{2}kRM^2\right]. \end{cases}$$

Es ist nun nach *Kirchhoff* *) zu setzen

$$\mathfrak{J}_{(mR)} = J_{(mR)}\left[\Psi_0-\log\left(\frac{imR}{2}\right)\right]+\left\{-\frac{m^2R^2}{2.2}(1)+\frac{m^4R^4}{2.2.4.4}(1+\tfrac{1}{2})-\frac{m^6R^6(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3})}{2.2.4.4.6.6}+\text{etc.}\right\},$$

*) Dieses Journal Bd. XLVIII, Heft 4.

worin

$$\Psi_0 = -0{,}5772157.$$

Daraus geht hervor, dass wenn mR sehr klein ist, auch RM sehr klein ist, dagegen $\frac{M}{m}$ sehr gross. Mit Berücksichtigung hiervon können wir die Gleichung (16^h.) auf folgenden einfacheren Ausdruck bringen

$$(16^i.) \qquad 0 = -m^2 - \frac{\varkappa n}{2\pi R} \cdot M + A^2 . n^2 . \{1 - \tfrac{1}{2} k . RM\}.$$

Wenn k nicht so gross ist, dass kRM, endlich wird, verschwindet das letzte Glied mit k ganz aus dieser Gleichung. Der Rest der Gleichung stimmt überein mit der Gleichung, welche Herr *Kirchhoff* aus dem *Weber*schen Gesetze abgeleitet hatte, wenigstens in Bezug auf die Glieder, welche allein Einfluss haben, wenn R unendlich klein wird. Nur in den Gliedern, welche zunächst zu berücksichtigen sind, wenn $\log R$ nicht mehr als unendlich gross betrachtet werden kann, zeigt sich ein Unterschied, indem statt unserer Function

$$M = \frac{1}{R\left\{-\log\left(\frac{im}{2}\right) + \Psi_0 - \log R\right\}}$$

in *Kirchhoffs* Gleichung steht:

$$\frac{1}{R\{\log l - \log R\}},$$

wo l die Länge des Drahtes bezeichnet, und $\log l$ statt der in meiner Formel vorkommenden Grösse steht:

$$-\log\left(\frac{im}{2}\right) + \Psi_0 = -\log(\pi) + \Psi_0 + \log(\lambda).$$

Im letzteren Ausdrucke bezeichnet λ die Wellenlänge der betreffenden Oscillationen.

Zu bemerken ist noch, dass durch die Annahme, kMR sei eine sehr kleine Grösse, das Vorkommen labiler Gleichgewichtsstörungen für negative Werthe von k von vorn herein ausgeschlossen worden ist.

§. 8.

Einfluss dielektrischer und magnetischer Polarisation der Media.

Nachdem wir uns bisher mit der Frage beschäftigt haben, welchen Einfluss die aus den bisherigen Versuchen nicht bestimmbare Constante k bei den elektrischen Bewegungen haben könne, bleibt es noch übrig, den Einfluss zu erörtern, den die zwischen den durchströmten Leitern liegenden und sie

umgebenden Isolatoren haben können. Wenn in ihnen Veränderungen vorgehen, so können diese auf die Ausbreitung der inducirenden Wirkungen Einfluss haben. Dass die meisten, vielleicht alle Naturkörper magnetisch (beziehlich diamagnetisch) polarisirbar sind, ist bekannt; für eine Reihe von Isolatoren ist auch nachgewiesen, dass in ihnen eine ähnliche Scheidung der Elektricitäten, *diëlektrische Polarisation,* stattfinden kann unter Einfluss elektrischer Kräfte, wie in magnetischen Körpern Scheidung der Magnetismen unter Einwirkung magnetischer Kräfte.

Es ist bekannt, dass man, wenigstens bei mässigeren Graden der Magnetisirung, das magnetische Moment, welches an irgend einer Stelle inducirt ist, der Stärke der an der betreffenden Stelle wirkenden magnetisirenden Kraft, diese multiplicirt mit einer von der Art des Stoffes abhängenden Constanten, gleich setzen kann. Die magnetisirende Kraft ist dabei diejenige, welche durch die äusseren Einflüsse in Verbindung mit dem in dem magnetisirten Körper selbst und an seiner Oberfläche entwickelten freien Magnetismus hervorgebracht wird. Genau dieselben Gesetze wenden wir auf die Diëlektrica an, wobei wir zunächst von den Vorgängen, die den elektrischen Rückstand der Leydener Flaschen hervorbringen, und die von der Anwesenheit schwach leitender Theile herzurühren scheinen, absehen.

Es seien $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ die Componenten der durch Vertheilung erzeugten elektrischen Momente parallel den Axen der x, y, z genommen, X, Y, Z die Componenten der gegebenen äusseren Kräfte, φ die Potentialfunction der durch deren Wirkung vertheilten Elektricität, so setzen wir dem entsprechend

$$(17.)\quad \begin{cases} \mathfrak{x} = \varepsilon\left(X - \frac{d\varphi}{dx}\right), \\ \mathfrak{y} = \varepsilon\left(Y - \frac{d\varphi}{dy}\right), \\ \mathfrak{z} = \varepsilon\left(Z - \frac{d\varphi}{dz}\right). \end{cases}$$

Die Dichtigkeit freier Elektricität im Innern eines der Vertheilung unterworfenen Körpers, in zweierlei Weise ausgedrückt, ist gleich

$$(17^a.)\quad -\frac{d\mathfrak{x}}{dx} - \frac{d\mathfrak{y}}{dy} - \frac{d\mathfrak{z}}{dz} = -\frac{1}{4\pi}\cdot\Delta\varphi.$$

An einer Oberfläche, wo $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ und φ einen Sprung machen, ist mit Beibehaltung der bisher für die Oberflächen Ω gebrauchten Bezeichnungen

$$(17^b.)\quad (\mathfrak{x}-\mathfrak{x}_1)\cos a + (\mathfrak{y}-\mathfrak{y}_1)\cos b + (\mathfrak{z}-\mathfrak{z}_1)\cos c = \frac{1}{4\pi}\left[\frac{d\varphi}{dN} - \frac{d\varphi_1}{dN}\right].$$

In Verbindung mit den Festsetzungen, welche den Werth von φ im Unendlichen bestimmen, und das Vorhandensein äusserer elektrischer Massen betreffen, genügen diese Gleichungen zur Bestimmung von φ, $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$ und $\mathfrak{z}$.

Sind die Kräfte X, Y und Z von der Form

$$X = -\frac{d\psi}{dx},$$

$$Y = -\frac{d\psi}{dy},$$

$$Z = -\frac{d\psi}{dz},$$

also gleich den Anziehungskräften einer mit der Dichtigkeit

$$E = -\frac{1}{4\pi}\cdot\Delta\psi$$

verbreiteten elektrischen Masse, so ergeben die Gleichungen (17.) und (17^a.) nach Elimination von $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$:

$$(17^c.)\quad \begin{cases} \frac{d}{dx}\left\{(1+4\pi\varepsilon)\frac{d}{dx}(\varphi+\psi)\right\}+\frac{d}{dy}\left\{(1+4\pi\varepsilon)\frac{d}{dy}(\varphi+\psi)\right\}+\frac{d}{dz}\left\{(1+4\pi\varepsilon)\frac{d}{dz}(\varphi+\psi)\right\} \\ = -4\pi E, \end{cases}$$

und an den Grenzflächen, wo zwei Körper von verschiedenen Werthen von ε zusammenstossen, wenn E an der Fläche keine unendliche Dichtigkeit hat:

$$(17^d.)\qquad (1+4\pi\varepsilon)\frac{d}{dN}(\varphi+\psi) = (1+4\pi\varepsilon_1)\frac{d}{dN}(\varphi_1+\psi).$$

Ist ε constant in dem Theile S des Raumes, wo E von Null verschieden ist, so ist

$$-\frac{1}{4\pi}\Delta(\psi+\varphi) = \frac{1}{1+4\pi\varepsilon}\cdot E.$$

Das heisst, die gesammte Potentialfunction $(\psi+\varphi)$ wird in dem Raume, in welchem E liegt, sich so verhalten, als wenn in einem nicht diëlektrischen Raume nur $\frac{E}{1+4\pi\varepsilon}$ läge. Durch die erfolgte Vertheilung wird die Quantität $\frac{-4\pi\varepsilon}{1+4\pi\varepsilon}E$ dort hingeschoben, die einen entsprechenden Theil von E neutralisirt.

Für die Verschiebungen von E im Raume S, so weit ε constant ist, bildet diese neutralisirende Elektricität kein Hinderniss, weil diese überall mitfolgen kann. Die Anziehungskräfte also, welche von anderweitig vorhandenen elektrischen Massen auf E ausgeübt werden, müssen ebenso gross sein, als wenn die E zum Theil neutralisirende Elektricität gar nicht vorhanden wäre.

Die Potentialfunction einer punktförmigen Masse E_1 ist also

$$\frac{E_1}{(1+4\pi\varepsilon)r}$$

und die Abstossung, welche sie auf die Masse E ausübt:

$$\frac{E.E_1}{(1+4\pi\varepsilon)r^2}.$$

Die Grösse der Massen E und E_1, elektrostatisch gemessen, erscheint also im Verhältniss $\sqrt{1+4\pi\varepsilon}:1$ verkleinert durch den Einfluss des Diëlektricum, in dem sie liegen.

Wenn wir nun unter c eine beliebige constante Zahl verstehen, und jede Masse E auf das c-fache vergrössert denken, jede Grösse $(1+4\pi\varepsilon)$ aber auf das c^2-fache, so bleibt die Anziehung der beiden Massen E unter so veränderten Umständen unverändert, die Potentialfunction einer jeden wird verringert im Verhältniss $\frac{1}{c}$ und die Gleichung (17^c.), welche die Vertheilung bestimmt, bleibt vollständig ungeändert.

Wir können also durch alle *elektrostatischen* Messungen immer nur das Verhältniss der Werthe von $(1+4\pi\varepsilon)$ zwischen verschiedenen Körpern, oder zwischen diesen und dem vom Lichtäther gefüllten, übrigens leeren Raume ermitteln, aber nicht den absoluten Werth der genannten Grösse. Dasselbe gilt für die Coefficienten der magnetischen Induction. Dass *Poisson* und andere Bearbeiter der Theorie des Magnetismus den magnetischen Coefficienten, welcher der Grösse $(1+4\pi\varepsilon)$ entspricht, im Luftraume gleich Eins gesetzt haben, ist willkürlich. Es ist bekannt, dass eine Reihe von Physikern durch die diamagnetischen Erscheinungen veranlasst wurden, den betreffenden Coefficienten für den nur mit Lichtäther gefüllten Raum grösser als Eins zu setzen, um ε in den diamagnetischen Körpern nicht negativ setzen zu müssen.

Die Bestimmung der elektrostatischen Einheit der Elektricität, wenn sie im Innern eines diëlektrischen Isolators vorgenommen wird, muss diese Einheit im Verhältniss $\sqrt{1+4\pi\varepsilon}:1$ zu gross ergeben, und ebenso auch die elektrostatische Einheit der Stromstärke in demselben Verhältniss zu gross. Die Constante A^2 ist der elektrodynamischen Anziehung zweier elektrostatischen Stromeinheiten proportional. Ist also das Medium, in dem wir uns befinden, und diese Versuche angestellt haben, diëlektrisch, so ist der wahre Werth der betreffenden Constante, wie er für einen absolut einflusslosen Raum gelten würde $\frac{A^2}{1+4\pi\varepsilon_0}$, wo ε_0 die diëlektrische Polarisationsconstante der Luft, beziehlich des den Weltraum füllenden Medium ist.

Wir müssen ferner die diëlektrische Polarisation auch bei der *Bestimmung der Bewegung der Elektricität* beachten.

Wenn in dem Volumenelement dS die Menge E positiver Elektricität sich um $\frac{1}{2}s$ in Richtung der positiven x, und die Menge negativer um $\frac{1}{2}s$ nach Richtung der negativen x bewegt, so wird dadurch in demselben das elektrische Moment

$$\mathfrak{x} = E.s$$

hergestellt, und gleichzeitig ist dieser Vorgang entsprechend einer Strömung in dem Element

$$u_0.dt = E.s.$$

Der Act der Polarisation bildet also eine Art elektrischer Bewegung, bei welcher

$$u_0 = \frac{d\mathfrak{x}}{dt},$$

$$v_0 = \frac{d\mathfrak{y}}{dt},$$

$$w_0 = \frac{d\mathfrak{z}}{dt}.$$

Zu dieser kann sich noch hinzugesellen diejenige Bewegung, welche dem *Ohm*schen Gesetze entsprechend in leitenden Körpern geschieht, deren Componenten mit u_2, v_2 und w_2 bezeichnet werden mögen.

Da nun nach den in Gleichung (17.) gemachten Feststellungen, die die Elektricität in Richtung der Coordinatenaxen forttreibenden Kräfte gleich sind:

$$\frac{1}{\varepsilon}\cdot\mathfrak{x}, \quad \frac{1}{\varepsilon}\cdot\mathfrak{y}, \quad \frac{1}{\varepsilon}\cdot\mathfrak{z},$$

so erhalten wir die Gleichungen:

$$(18.) \quad \begin{cases} \varkappa u_2 = \frac{1}{\varepsilon}\cdot\mathfrak{x}, \\ \varkappa v_2 = \frac{1}{\varepsilon}\cdot\mathfrak{y}, \\ \varkappa w_2 = \frac{1}{\varepsilon}\cdot\mathfrak{z}, \end{cases}$$

und die Gesammtgeschwindigkeiten der elektrischen Strömung werden:

$$(18^a.) \quad \begin{cases} u = \frac{d\mathfrak{x}}{dt} + \frac{1}{\varepsilon.\varkappa}\cdot\mathfrak{x}, \\ v = \frac{d\mathfrak{y}}{dt} + \frac{1}{\varepsilon.\varkappa}\cdot\mathfrak{y}, \\ w = \frac{d\mathfrak{z}}{dt} + \frac{1}{\varepsilon.\varkappa}\cdot\mathfrak{z}. \end{cases}$$

In Bezug auf diese Grössen u bleiben dann auch die Gleichungen (2.) und (2ª.) bestehen:

$$(2.)\qquad \frac{du}{dx}+\frac{dv}{dy}+\frac{dw}{dz} = \frac{1}{4\pi}.\frac{d\Delta\varphi}{dt},$$

$$(2^a.)\qquad (u-u_1).\cos a+(v-v_1).\cos b+(w-w_1).\cos c = \frac{1}{4\pi}\frac{d^2}{dt.dN}(\varphi-\varphi_1),$$

und die Berechnungen der elektrodynamischen Kräfte U, V, W, welche in den Gleichungen (1ª.) bis (3ª.) in §. 2 gegeben sind.

Nachdem so die elektrostatischen und elektrodynamischen Kräfte in einem dielektrischen Medium bestimmt worden sind, haben wir noch festzustellen, wie die Induction zweier Stromleiter in einem magnetisch polarisirbaren Medium verändert wird. Ich bezeichne die magnetischen Momente mit λ, μ, ν und die magnetische Potentialfunction mit χ, die Polarisationsconstante mit ϑ, die ausserdem vorhandenen magnetisirenden Kräfte mit $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$, so ist, wie in Gleichung (17.), zu setzen

$$(19.)\qquad \begin{cases} \lambda = \vartheta\left[\mathfrak{L}-\frac{d\chi}{dx}\right], \\ \mu = \vartheta\left[\mathfrak{M}-\frac{d\chi}{dy}\right], \\ \nu = \vartheta\left[\mathfrak{N}-\frac{d\chi}{dz}\right], \end{cases}$$

und

$$(19^a.)\qquad \frac{d\lambda}{dx}+\frac{d\mu}{dy}+\frac{d\nu}{dz} = \frac{1}{4\pi}.\Delta\chi,$$

oder an Flächen, welche freien Magnetismus enthalten:

$$(19^{a*}.)\qquad (\lambda-\lambda_1).\cos a+(\mu-\mu_1).\cos b+(\nu-\nu_1).\cos c = \frac{1}{4\pi}\left[\frac{d\chi}{dN}-\frac{d\chi_1}{dN}\right].$$

Die magnetisirenden Kräfte $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ am Orte x, y, z, herrührend von den Stromcomponenten u, v, w am Orte ξ, η, ζ, sind die folgenden:

Herrührend von der Stromcomponente.	$\mathfrak{L}$	$\mathfrak{M}$	$\mathfrak{N}$
u	0	$-A\cdot u\cdot\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{r}\right)$	$A\cdot u\cdot\frac{d}{dy}\left(\frac{1}{r}\right)$
v	$A\cdot v\cdot\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{r}\right)$	0	$-A\cdot v\cdot\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{r}\right)$
w	$-A\cdot w\cdot\frac{d}{dy}\left(\frac{1}{r}\right)$	$A\cdot w\cdot\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{r}\right)$	0

Also, wenn man sie für die sämmtlichen vorhandenen Strömungen berechnet,

$$(19^b.)\quad\begin{cases}\mathfrak{L} = A\left[\frac{dV}{dz}-\frac{dW}{dy}\right],\\ \mathfrak{M} = A\left[\frac{dW}{dx}-\frac{dU}{dz}\right],\\ \mathfrak{N} = A\left[\frac{dU}{dy}-\frac{dV}{dx}\right].\end{cases}$$

Somit sind, wenn u, v, w bekannt sind, die Grössen λ, μ, ν durch die Gleichungen (19.), (19^a.), (19^b.) gegeben.

Die inducirende Wirkung der Grössen λ, μ, ν im Element $dx.dy.dz$ dagegen auf die Stromelemente u, v, w in ξ, η, ζ ist proportional der Zunahme des Potentials:

Für Stromcomponente.	Inductionskraft.
u	$-A\cdot\frac{d}{dt}\left[\nu\cdot\frac{d}{dy}\left(\frac{1}{r}\right)-\mu\cdot\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{r}\right)\right]dx.dy.dz$
v	$-A\cdot\frac{d}{dt}\left[\lambda\cdot\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{r}\right)-\nu\cdot\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{r}\right)\right]dx.dy.dz$
w	$-A\cdot\frac{d}{dt}\left[\mu\cdot\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{r}\right)-\lambda\cdot\frac{d}{dy}\left(\frac{1}{r}\right)\right]dx.dy.dz.$

Also wenn wir setzen:

$$(19^c.)\quad \begin{cases} L = \iiint \frac{\lambda}{r}\cdot d\xi . d\eta . d\zeta, \\ M = \iiint \frac{\mu}{r}\cdot d\xi . d\eta . d\zeta, \\ N = \iiint \frac{\nu}{r}\cdot d\xi . d\eta . d\zeta, \end{cases}$$

so sind die Componenten der elektromotorischen Kraft, die von der Magnetisirung des Medium herrührt:

$$(19^d.)\quad \begin{cases} +A\cdot\frac{d}{dt}\left[\frac{dN}{dy}-\frac{dM}{dz}\right], \\ +A\cdot\frac{d}{dt}\left[\frac{dL}{dz}-\frac{dN}{dx}\right], \\ +A\cdot\frac{d}{dt}\left[\frac{dM}{dx}-\frac{dL}{dy}\right], \end{cases}$$

und aus den Gleichungen (17.) folgen endlich folgende Bewegungsgleichungen der Elektricität, in denen $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ die durch andere, z. B. hydroëlektrische und thermoëlektrische Processe bedingten äusseren Kräfte bedeuten:

$$(19^e.)\quad \begin{cases} \frac{1}{\varepsilon}\cdot\mathfrak{x} = -\frac{d\varphi}{dx}-A^2\cdot\frac{dU}{dt}+A\cdot\frac{d}{dt}\left[\frac{dN}{dy}-\frac{dM}{dz}\right]+\mathfrak{X}, \\ \frac{1}{\varepsilon}\cdot\mathfrak{y} = -\frac{d\varphi}{dy}-A^2\cdot\frac{dV}{dt}+A\cdot\frac{d}{dt}\left[\frac{dL}{dz}-\frac{dN}{dx}\right]+\mathfrak{Y}, \\ \frac{1}{\varepsilon}\cdot\mathfrak{z} = -\frac{d\varphi}{dz}-A^2\cdot\frac{dW}{dt}+A\cdot\frac{d}{dt}\left[\frac{dM}{dx}-\frac{dL}{dy}\right]+\mathfrak{Z}, \end{cases}$$

wozu noch aus (19.) und (19^b.) kommen:

$$(19^f.)\quad \begin{cases} \frac{\lambda}{\vartheta} = A\left[\frac{dV}{dz}-\frac{dW}{dy}\right]-\frac{d\chi}{dx}, \\ \frac{\mu}{\vartheta} = A\left[\frac{dW}{dx}-\frac{dU}{dz}\right]-\frac{d\chi}{dy}, \\ \frac{\nu}{\vartheta} = A\left[\frac{dU}{dy}-\frac{dV}{dx}\right]-\frac{d\chi}{dz}; \end{cases}$$

endlich, wenn wir mit E die freie Elektricität bezeichnen:

$$(19^g.)\quad -\frac{dE}{dt} = \frac{du}{dx}+\frac{dv}{dy}+\frac{dw}{dz}.$$

Kennt man von den veränderlichen Grössen $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$, λ, μ, ν, E durch den ganzen Raum, so ist aus den drei ersten u, v, w mittels der Gleichungen (18^a.) zu finden, der freie Magnetismus durch (19^a.), und es sind alsdann φ, χ, U, V, W, L, M, N durch Quadraturen zu berechnen, so dass die sieben vorstehenden

Gleichungen (19^e.), (19^g.) und (19^f.) zur Bestimmung der vorgenannten sieben Unbekannten als Functionen der Zeit dienen können.

Um aus diesen Gleichungen die Integrale zu entfernen, und sie in reine Differentialgleichungen zu verwandeln, erinnere ich an folgende Sätze:

Wenn man drei Functionen ξ, η, ζ von x, y, z hat, und für alle Orte innerhalb eines gewissen einfach zusammenhängenden Raumes S die drei Gleichungen erfüllt sein sollen:

$$(20.)\qquad \xi = 0, \qquad \eta = 0, \qquad \zeta = 0,$$

so folgt daraus, dass innerhalb des Raumes S sei

$$(20^a.)\qquad \begin{cases} \dfrac{d\eta}{dz} - \dfrac{d\zeta}{dy} = 0, \\[2mm] \dfrac{d\zeta}{dx} - \dfrac{d\xi}{dz} = 0, \\[2mm] \dfrac{d\xi}{dy} - \dfrac{d\eta}{dx} = 0, \\[2mm] \dfrac{d\xi}{dx} + \dfrac{d\eta}{dy} + \dfrac{d\zeta}{dz} = 0. \end{cases}$$

Es lässt sich nun zeigen, dass das System der Gleichungen (20^a.) das System der Gleichungen (20.) vollständig ersetzt, wenn die Bedingungen hinzugefügt werden,

1) dass ξ, η, ζ im ganzen Raume S endlich und stetig seien,

2) dass an der Oberfläche von S sei

$$(20^b.)\qquad \xi.\cos a + \eta.\cos b + \zeta.\cos c = 0,$$

wo a, b, c die Winkel sind, welche die Normale N der Oberfläche von S mit den Coordinatenaxen macht.

Aus den ersten drei Gleichungen des Systems (20^a.) folgt nämlich direct, dass es eine Function Ψ von x, y, z geben müsse, von der Beschaffenheit, dass

$$\xi = \frac{d\Psi}{dx}, \qquad \eta = \frac{d\Psi}{dy}, \qquad \zeta = \frac{d\Psi}{dz}.$$

Dann ergiebt die letzte der Gleichungen (20^a.)

$$\Delta\Psi = 0,$$

und die Gleichung (20^b.), dass an der ganzen Oberfläche des Raumes S

$$\frac{d\Psi}{dN} = 0.$$

Da der Raum S der Voraussetzung nach einfach zusammenhängend, und die Grössen ξ, η, ζ überall endlich und stetig sein sollen, so genügen diese Bedingungen nach bekannten Gesetzen über die Potentialfunctionen, um zu zeigen, dass im ganzen Raume S

$$\Psi = \text{Const.},$$

$$\xi = \eta = \zeta = 0. \tag{20.}$$

Wenden wir diese Sätze auf das System der Gleichungen (19^e^.), und dann auch auf das der Gleichungen (19^f.) an, betrachten wir dabei den unendlichen Raum als den Raum S, und berücksichtigen wir, dass aus (19^c.), (19^a.) und (19^{a*}.) folgt:

$$\frac{dL}{dx}+\frac{dM}{dy}+\frac{dN}{dz} = -\chi,$$

so erhalten wir folgende Systeme von Gleichungen:

$$(20^c.)\quad\begin{cases}\frac{d}{dy}\left(\frac{\mathfrak{z}}{\varepsilon}\right)-\frac{d}{dz}\left(\frac{\mathfrak{y}}{\varepsilon}\right) = \frac{1+4\pi\vartheta}{\vartheta}\cdot A\cdot\frac{d\lambda}{dt}+\frac{d\mathfrak{Z}}{dy}-\frac{d\mathfrak{Y}}{dz},\\ \frac{d}{dz}\left(\frac{\mathfrak{x}}{\varepsilon}\right)-\frac{d}{dx}\left(\frac{\mathfrak{z}}{\varepsilon}\right) = \frac{1+4\pi\vartheta}{\vartheta}\cdot A\cdot\frac{d\mu}{dt}+\frac{d\mathfrak{X}}{dz}-\frac{d\mathfrak{Z}}{dx},\\ \frac{d}{dx}\left(\frac{\mathfrak{y}}{\varepsilon}\right)-\frac{d}{dy}\left(\frac{\mathfrak{x}}{\varepsilon}\right) = \frac{1+4\pi\vartheta}{\vartheta}\cdot A\cdot\frac{d\nu}{dt}+\frac{d\mathfrak{Y}}{dx}-\frac{d\mathfrak{X}}{dy},\end{cases}$$

$$(20^d.)\quad \frac{d}{dx}\left(\frac{\mathfrak{x}}{\varepsilon}\right)+\frac{d}{dy}\left(\frac{\mathfrak{y}}{\varepsilon}\right)+\frac{d}{dz}\left(\frac{\mathfrak{z}}{\varepsilon}\right)=-\Delta\varphi+A^2\cdot k\cdot\frac{d^2\varphi}{dt^2}+\frac{d\mathfrak{X}}{dx}+\frac{d\mathfrak{Y}}{dy}+\frac{d\mathfrak{Z}}{dz},$$

$$(20^e.)\quad\begin{cases}\frac{d}{dy}\left(\frac{\nu}{\vartheta}\right)-\frac{d}{dz}\left(\frac{\mu}{\vartheta}\right) = A\cdot\left[\frac{d^2\varphi}{dx.dt}-4\pi\cdot\frac{d\mathfrak{x}}{dt}-\frac{4\pi}{\varkappa\varepsilon}\cdot\mathfrak{x}\right],\\ \frac{d}{dz}\left(\frac{\lambda}{\vartheta}\right)-\frac{d}{dx}\left(\frac{\nu}{\vartheta}\right) = A\cdot\left[\frac{d^2\varphi}{dy.dt}-4\pi\cdot\frac{d\mathfrak{y}}{dt}-\frac{4\pi}{\varkappa\varepsilon}\cdot\mathfrak{y}\right],\\ \frac{d}{dx}\left(\frac{\mu}{\vartheta}\right)-\frac{d}{dy}\left(\frac{\lambda}{\vartheta}\right) = A\cdot\left[\frac{d^2\varphi}{dz.dt}-4\pi\cdot\frac{d\mathfrak{z}}{dt}-\frac{4\pi}{\varkappa\varepsilon}\cdot\mathfrak{z}\right],\end{cases}$$

$$(20^f.)\quad \frac{d}{dx}\left(\frac{\lambda}{\vartheta}\right)+\frac{d}{dy}\left(\frac{\mathfrak{y}}{\vartheta}\right)+\frac{d}{dz}\left(\frac{\mathfrak{z}}{\vartheta}\right) = -\Delta\chi.$$

Dazu kommen noch die Bedingungen für die unendlich entfernte Grenzfläche des Raumes:

$$\mathfrak{x}=\mathfrak{y}=\mathfrak{z}=\lambda=\mu=\nu=\varphi=\chi=0.$$

Ferner die Bedingung, dass die in (19^e.) und (19^f.) gleich Null gesetzten Grössen überall stetig und endlich seien. Da nun dies für die Grössen U, V, W, L, M, N und ihre Differentialquotienten schon nach der für sie vor-

geschriebenen Bildungsweise durch Integration der Fall ist, so oft u, v, w, λ, μ, ν überall endlich sind, so reduciren sich die Bedingungen der Stetigkeit darauf, dass die sechs Grössen:

$$\frac{\mathfrak{x}}{\varepsilon}+\frac{d\varphi}{dx}-\mathfrak{X}, \quad \frac{\lambda}{\vartheta}+\frac{d\chi}{dx},$$
$$\frac{\mathfrak{y}}{\varepsilon}+\frac{d\varphi}{dy}-\mathfrak{Y}, \quad \frac{\mu}{\vartheta}+\frac{d\chi}{dy},$$
$$\frac{\mathfrak{z}}{\varepsilon}+\frac{d\varphi}{dz}-\mathfrak{Z}, \quad \frac{\nu}{\vartheta}+\frac{d\chi}{dz}$$

überall stetig seien, namentlich auch an solchen Flächen, wo ε, ϑ und $\varkappa$ unstetig sind.

Da χ an solchen Flächen stetig ist, so ist

$$\frac{d}{dx}(\chi-\chi_1) = \cos a \frac{d}{dN}(\chi-\chi_1)$$
u. s. w.

Wir haben ferner nach der Gleichung (19^{a*}.)

$$(20^g.) \quad (\lambda-\lambda_1).\cos a+(\mu-\mu_1).\cos b+(\nu-\nu_1).\cos c = \frac{1}{4\pi}\frac{d}{dN}(\chi-\chi_1)$$

und nach den Stetigkeitsbedingungen somit

$$(20^h.) \quad \begin{cases} \frac{\lambda}{\vartheta}-\frac{\lambda_1}{\vartheta_1} = -\frac{1}{4\pi}\cdot\cos a\cdot\frac{d}{dN}(\chi-\chi_1), \\ \frac{\mu}{\vartheta}-\frac{\mu_1}{\vartheta_1} = -\frac{1}{4\pi}\cdot\cos b\cdot\frac{d}{dN}(\chi-\chi_1), \\ \frac{\nu}{\vartheta}-\frac{\nu_1}{\vartheta_1} = -\frac{1}{4\pi}\cdot\cos c\cdot\frac{d}{dN}(\chi-\chi_1). \end{cases}$$

Aus den Gleichungen (20^g.) und (20^h.) kann $\chi-\chi_1$ unmittnlbar eliminirt werden. Dann kommt χ nur noch in der Gleichung (20^f.) vor. Es können also aus den Gleichungen (20^c.), (20^d.), (20^e.) und den Stetigkeitsbedingungen die anderen unbekannten Grössen bestimmt werden, ohne auf χ Rücksicht zu nehmen.

Sind die Kräfte $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ an der betreffenden Fläche stetig, oder ist nur ihre senkrecht zur Fläche gerichtete Resultante $\mathfrak{P}$ unstetig, so erhalten wir für die $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ ein ähnliches System von Gleichungen:

$$(20^i.) \quad \begin{cases} \frac{\mathfrak{x}}{\varepsilon}-\frac{\mathfrak{x}_1}{\varepsilon_1} = -\frac{1}{4\pi}\cdot\cos a\left[\mathfrak{P}-\mathfrak{P}_1+\frac{d}{dN}(\varphi-\varphi_1)\right], \\ \frac{\mathfrak{y}}{\varepsilon}-\frac{\mathfrak{y}_1}{\varepsilon_1} = -\frac{1}{4\pi}\cdot\cos b\left[\mathfrak{P}-\mathfrak{P}_1+\frac{d}{dN}(\varphi-\varphi_1)\right], \\ \frac{\mathfrak{z}}{\varepsilon}-\frac{\mathfrak{z}_1}{\varepsilon_1} = -\frac{1}{4\pi}\cdot\cos c\left[\mathfrak{P}-\mathfrak{P}_1+\frac{d}{dN}(\varphi-\varphi_1)\right]. \end{cases}$$

Dass die Gleichungen $(20^c.)$ bis $(20^i.)$ mit Ausschluss von $(20^f.)$ die Lösung eindeutig bestimmen, wenn k nicht negativ ist, ergiebt sich aus der Gleichung der lebendigen Kraft, die wir deshalb hier zunächst aufstellen wollen.

Für den Fall, dass keine äusseren Kräfte wirken, also

$$\mathfrak{X} = \mathfrak{Y} = \mathfrak{Z} = 0,$$

erhält man die *Gleichung der lebendigen Kraft,* indem man die Gleichungen $(20^c.)$ der Reihe nach mit $\frac{\lambda}{\vartheta}, \frac{\mu}{\vartheta}, \frac{\nu}{\vartheta}$ multiplicirt und addirt, dann ebenso die Gleichungen $(20^e.)$ der Reihe nach mit $\frac{\mathfrak{x}}{\varepsilon}, \frac{\mathfrak{y}}{\varepsilon}, \frac{\mathfrak{z}}{\varepsilon}$ multiplicirt und addirt, die letztere Summe von der ersteren abzieht. Die Glieder der linken Seite lassen sich dann integriren, und ihr Integral wird wegen der Stetigkeitsbedingungen $(20^h.)$ und $(20^i.)$ gleich Null. Die Glieder der rechten Seite, welche φ enthalten, können durch eine partielle Integration mit Rücksicht auf $(20^d.)$ umgeformt werden, und man erhält endlich:

$$(20^k.)\quad \begin{cases} \frac{1}{2}\cdot\frac{d}{dt}\iiint\Big\{\frac{1+4\pi\vartheta}{\vartheta^2}\cdot[\lambda^2+\mu^2+\nu^2]+\frac{4\pi}{\varepsilon}[\mathfrak{x}^2+\mathfrak{y}^2+\mathfrak{z}^2] \\ \qquad +\left[\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2+\left(\frac{d\varphi}{dy}\right)^2+\left(\frac{d\varphi}{dz}\right)^2\right]+A^2.k\cdot\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2\Big\}.dx.dy.dz \\ = -\iiint\frac{4\pi}{\varkappa.\varepsilon^2}[\mathfrak{x}^2+\mathfrak{y}^2+\mathfrak{z}^2].dx.dy.dz = -\iiint\varkappa\,[u_2^2+v_2^2+w_2^2].dx.dy.dz. \end{cases}$$

Aus dieser Gleichung sind entsprechende Folgerungen, wie aus der früheren $(5^a.)$ zu ziehen. Bezeichnen wir das Integral, dessen nach der Zeit genommener Differentialquotient die linke Seite der Gleichung $(20^h.)$ bildet, mit Φ, so ist Φ nothwendig immer positiv, wenn k positiv ist. Sein Werth muss aber während des Ablaufs der Bewegung nothwendig immer kleiner werden. Ist derselbe Null, so muss er Null bleiben.

Daraus folgt, dass, wenn ausser den Kräften $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$ und $\mathfrak{Z}$ die Anfangswerthe von

$$\mathfrak{x},\ \mathfrak{y},\ \mathfrak{z},\ \lambda,\ \mu,\ \nu,\ \varphi,\ \frac{d\varphi}{dt}$$

durch den ganzen Raum gegeben sind, die Gleichungen $(20^c.)$ bis $(20^i.)$ die Bewegung eindeutig bestimmen.

Ist $k = 0$, so fällt $\frac{d\varphi}{dt}$ aus diesen Bestimmungsstücken weg.

Um die Art der durch diese Gleichungen angezeigten Bewegungszustände anschaulicher zu machen, wollen wir sie auf einen Körper S anwenden, in dessen Innerem ε und ϑ constant sind und $\varkappa = \infty$ ist; ferner $\mathfrak{X} = \mathfrak{Y} = \mathfrak{Z} = 0$.

Wir erhalten dann:

$$(21.)\quad \begin{cases} \dfrac{d\mathfrak{z}}{dy}-\dfrac{d\mathfrak{y}}{dz} = A.\varepsilon.\dfrac{1+4\pi\vartheta}{\vartheta}.\dfrac{d\lambda}{dt}, \\[2ex] \dfrac{d\mathfrak{x}}{dz}-\dfrac{d\mathfrak{z}}{dx} = A.\varepsilon.\dfrac{1+4\pi\vartheta}{\vartheta}.\dfrac{d\mu}{dt}, \\[2ex] \dfrac{d\mathfrak{y}}{dx}-\dfrac{d\mathfrak{x}}{dy} = A.\varepsilon.\dfrac{1+4\pi\vartheta}{\vartheta}.\dfrac{d\nu}{dt}. \end{cases}$$

$$(21^a.)\quad \frac{1}{\varepsilon}\left[\frac{d\mathfrak{x}}{dx}+\frac{d\mathfrak{y}}{dy}+\frac{d\mathfrak{z}}{dz}\right] = -\Delta\varphi+A^2.k.\frac{d^2\varphi}{dt^2}.$$

$$(21^b.)\quad \begin{cases} \dfrac{d\nu}{dy}-\dfrac{d\mu}{dz} = A.\vartheta.\left[\dfrac{d^2\varphi}{dx.dt}-4\pi.\dfrac{d\mathfrak{x}}{dt}\right], \\[2ex] \dfrac{d\lambda}{dz}-\dfrac{d\nu}{dx} = A.\vartheta.\left[\dfrac{d^2\varphi}{dy.dt}-4\pi.\dfrac{d\mathfrak{y}}{dt}\right], \\[2ex] \dfrac{d\mu}{dx}-\dfrac{d\lambda}{dy} = A.\vartheta.\left[\dfrac{d^2\varphi}{dz.dt}-4\pi.\dfrac{d\mathfrak{z}}{dt}\right]. \end{cases}$$

Wenn wir aus (21.) neue Gleichungen bilden, nach der Weise wie (20^a.) aus (20.) gebildet ist, so erhalten wir

$$(21^c.)\quad \begin{cases} \Delta\mathfrak{x} = \\ 4\pi\varepsilon(1+4\pi\vartheta)A^2\dfrac{d^2\mathfrak{x}}{dt^2}+\left[1-\dfrac{(1+4\pi\vartheta)(1+4\pi\varepsilon)}{k}\right]\dfrac{d}{dx}\left[\dfrac{d\mathfrak{x}}{dx}+\dfrac{d\mathfrak{y}}{dy}+\dfrac{d\mathfrak{z}}{dz}\right] \\ \text{etc.} \end{cases}$$

Die entsprechenden Gleichungen für $\mathfrak{y}$ und $\mathfrak{z}$ erhält man, indem man in (21^c.) $\mathfrak{x}$ und x beziehlich mit $\mathfrak{y}$ und y, oder mit $\mathfrak{z}$ und z vertauscht.

In ähnlicher Weise erhält man für die magnetischen Momente:

$$(21^d.)\quad \begin{cases} \Delta\lambda = 4\pi\varepsilon(1+4\pi\vartheta)A^2.\dfrac{d^2\lambda}{dt^2}, \\[2ex] \Delta\mu = 4\pi\varepsilon(1+4\pi\vartheta)A^2.\dfrac{d^2\mu}{dt^2}, \\[2ex] \Delta\nu = 4\pi\varepsilon(1+4\pi\vartheta)A^2.\dfrac{d^2\nu}{dt^2}, \end{cases}$$

$$\frac{d\lambda}{dx}+\frac{d\mu}{dy}+\frac{d\nu}{dz} = 0.$$

In den Gleichungen (21^c.) sind die elektrischen Verschiebungen in einem diëlektrischen Isolator durch ganz dieselben Gleichungen gegeben, wie die Verschiebungen der wägbaren Theilchen in einem festen elastischen Körper,

in welchem die Fortpflanzungsgeschwindigkeit beträgt

für die Transversalwellen: $\frac{1}{A\sqrt{4\pi\varepsilon(1+4\pi\vartheta)}}$,

für die Longitudinalwellen: $\frac{1}{A}\sqrt{\frac{1+4\pi\varepsilon}{4\pi\varepsilon . k}}$.

Die Gleichungen (21^d.) dagegen für die magnetischen Verschiebungen entsprechen denen im Innern eines incompressiblen elastischen Körpers, in welchem die Geschwindigkeit der Transversalwellen dieselbe ist, wie die angegebene der elektrischen Verschiebungen, die Geschwindigkeit der longitudinalen Schwingungen dagegen unendlich gross. Es ergeben diese Gleichungen, wie schon Herr *Maxwell* für den von ihm behandelten Grenzfall ($k=0$, ε und ϑ unendlich gross) gezeigt hat, dass bei den Transversalwellen die elektrische Oscillation in der einen Polarisationsebene, die magnetische in der darauf senkrechten geschieht.

Um zu ermitteln, was unter Annahme eines diëlektrischen Raumes der gemessene Werth der Constante A bedeute, müssen wir noch den Fall der gut leitenden Körper untersuchen, wenn $\varkappa$ so klein ist, dass die durch die Polarisation entstehende Geschwindigkeit $\frac{d\mathfrak{x}}{dt}$ gegen die von der Leitung abhängende $\frac{\mathfrak{x}}{\varkappa\varepsilon}$ verschwindet. Unter dieser Annahme ergeben die Gleichungen (20^c.) bis (20^e.) bei eben solcher Behandlung, wie für den Isolator

$$\varkappa\Delta u = (1+4\pi\vartheta)4\pi A^2\frac{du}{dt} - \frac{d}{dx}\left\{\Delta\varphi + (1+4\pi\vartheta - k)A^2\frac{d^2\varphi}{dt^2}\right\}$$

etc.

Die beiden andern erhält man, indem man u und x mit v und y, oder mit w und z vertauscht.

Vergleicht man diese mit denen, welche durch die Operation Δ aus (3^b.) gebildet werden:

$$\varkappa\Delta u = 4\pi A^2\frac{du}{dt} - \frac{d}{dx}\left\{\Delta\varphi + (1-k)A^2\frac{d^2\varphi}{dt^2}\right\}$$

etc.

so sieht man, dass nur die Constanten verschieden sind. Statt A^2 der letzteren steht in der ersten $A^2(1+4\pi\vartheta)$, und statt k der letzteren steht

$$\frac{k}{1+4\pi\vartheta}$$

in der ersteren. *Ist also das Medium magnetisirbar, so erscheint der Werth der Constante k darin verkleinert in dem angegebenen Verhältniss.*

Andererseits erscheint die Constante A^2, wenn in einem magnetisirbaren Medium experimentirt wird, vergrössert durch ihre Multiplication mit dem Factor $(1+4\pi\vartheta)$. Da wir nun durch alle statischen Versuche über magnetische Vertheilung nur immer das Verhältniss der Werthe von $(1+4\pi\vartheta)$ für verschiedene Stoffe zu einander, oder zu dem nur mit Lichtäther gefüllten sogenannten Vacuum ermitteln können, so finden wir durch Versuche im Luftraum oder Vacuum immer nur das Product der Constante A^2 mit dem Factor $(1+4\pi\vartheta_0)$, wenn wir mit ϑ_0 den unbekannten Werth dieses Coefficienten für den Luftraum bezeichnen.

Ferner ist schon oben nachgewiesen worden, dass die Quantitäten Elektricität, welche strömen, nach elektrostatischen Einheiten bestimmt im Verhältniss $\sqrt{1+4\pi\varepsilon_0} : 1$ verkleinert erscheinen, und ebenso alle nach elektrostatischer Einheit gemessenen Stromeinheiten. Dagegen erscheint der Widerstand $\varkappa$ im Verhältniss $1 : (1+4\pi\varepsilon_0)$ vergrössert und ebenso die Constante A^2. Ist also $\mathfrak{A}$ der im Luftraum gefundene, der Lichtgeschwindigkeit nahe gleiche Werth von $\frac{1}{A}$, so ist der wahre Werth

$$\frac{1}{A} = \mathfrak{A}\sqrt{1+4\pi\varepsilon_0}\,.\sqrt{1+4\pi\vartheta_0},$$

und der Werth der Fortpflanzungsgeschwindigkeiten in einem isolirenden Medium wird

$$\text{longitudinal:}\quad \mathfrak{A}\sqrt{\frac{(1+4\pi\varepsilon)(1+4\pi\varepsilon_0)(1+4\pi\vartheta_0)}{4\pi\varepsilon k}},$$

$$\text{transversal:}\quad \mathfrak{A}\sqrt{\frac{(1+4\pi\varepsilon_0)(1+4\pi\vartheta_0)}{4\pi\varepsilon(1+4\pi\vartheta)}}.$$

In der Luft selbst werden diese Werthe:

$$\text{longitudinal:}\quad \mathfrak{A}(1+4\pi\varepsilon_0)\sqrt{\frac{1+4\pi\vartheta_0}{4\pi\varepsilon_0 k}},$$

$$\text{transversal:}\quad \mathfrak{A}\sqrt{\frac{1+4\pi\varepsilon_0}{4\pi\varepsilon_0}}.$$

Für die elektrodynamische Induction erweist es sich also nicht als gleichgiltig, wie es bei den elektrostatischen Phänomenen der Fall war, ob der Luftraum ein Diëlektricum ist oder nicht, sondern es hängt die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der inducirenden Wirkung von der absoluten Grösse von ε_0 ab, und ε_0 würde durch experimentelle Bestimmung dieser Fortpflanzungsgeschwindigkeit der elektrischen Transversalwellen im Luftraum bestimmt werden können. Diese Geschwindigkeit müsste der vorliegenden Theorie nach

grösser sein, als die aus Herrn *W. Webers* Versuchen bestimmte Geschwindigkeit $\mathfrak{A}$, und dieser nur gleich werden können, wenn die diëlektrische Polarisationsconstante der Luft ε_0 unendlich gross gegen $\frac{1}{4\pi}$ wäre. Es geht daraus hervor, dass die bisher vorliegenden Erfahrungen auch ohne wesentliche Aenderungen in den Grundzügen der acceptirten Theorie der Elektrodynamik eine Ausbreitung der elektrischen Fernwirkungen mit endlichen Geschwindigkeiten als möglich erscheinen lassen; und zwar würden sich die elektromagnetischen Wirkungen dabei mit einer der Lichtgeschwindigkeit gleichen oder grösseren Geschwindigkeit ausbreiten, während die Ausbreitung der elektrostatischen von der unbekannten Constante k abhängig bliebe.

Heidelberg, 1870.

Corrigenda.

Seite 75, Zeile 4 v. o. statt Ds lese man $D\sigma$.

- 80, - 1 v. u. - $\frac{2}{4k}$ - - $\frac{1}{4k}$.

Ueber einen die trigonometrischen Reihen betreffenden Lehrsatz.

(Von Herrn *G. Cantor* in Halle *).)

Riemanns Forschungen im Gebiete der trigonometrischen Reihen sind in der Abhandlung „Ueber die Darstellbarkeit einer Function durch eine trigonometrische Reihe, Göttingen 1867" bekannt geworden.

Dieselben beziehen sich zunächst in den §§. 7—10 auf Reihen, in welchen die Coefficienten unendlich klein werden; die übrigen Reihen werden alsdann, wenn nur Convergenz für einen Werth der Veränderlichen vorhanden ist, auf jene zurückgeführt.

Ich will im Folgenden den Satz beweisen:

„Wenn zwei unendliche Grössenreihen: $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ und $b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots$ so beschaffen sind, dass die Grenze von

$$a_n \sin nx + b_n \cos nx$$

für jeden Werth von x, der in einem gegebenen Intervalle $(a < x < b)$ des reellen Grössengebietes liegt, mit wachsendem n gleich Null ist, so convergirt sowohl a_n wie b_n mit wachsendem n gegen die Grenze Null".

Wird dieser Satz auf die trigonometrischen Reihen angewandt, so giebt er die Einsicht, dass eine derartige Reihe

$$\tfrac{1}{2} b_0 + a_1 \sin x + b_1 \cos x + \cdots + a_n \sin nx + b_n \cos nx + \cdots$$

nur dann für alle Werthe von x in einem gegebenen Intervalle $(a < x < b)$ des reellen Grössengebietes convergiren kann, wenn die Coefficienten a_n, b_n mit wachsendem n unendlich klein werden.

Diese Thatsache ist, wie aus mehreren Stellen der oben citirten Abhandlung hervorgeht, *Riemann* bekannt gewesen; es scheint jedoch, dass er sie nur im Hinblicke auf diejenigen Fälle bewiesen hat, wo die Coefficienten

---

*) Zu den folgenden Arbeiten bin ich durch Herrn *Heine* angeregt worden. Derselbe hat die Güte gehabt, mich mit seinen Untersuchungen über trigonometrische Reihen frühzeitig bekannt zu machen. Aus dem Versuche seine Resultate in der Richtung zu erweitern, dass jedwede Voraussetzung über die *Art* der Convergenz bei den auftretenden Reihen vermieden wird, sind beide hervorgegangen.

a_n, b_n in der Form der Integralausdrücke:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(t)\sin nt\,dt, \qquad \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(t)\cos nt\,dt$$

vorausgesetzt werden können.

§. 1.

Ich schicke das Lemma vorauf:

„Hat man eine unendliche Reihe ganzer positiver Zahlen:

$$(R.) \qquad u,\ v,\ w,\ x,\ \ldots$$

von der Beschaffenheit, dass:

$$v > 4u, \quad w > 8v, \quad x > 16w, \quad \ldots$$

so giebt es eine Zahlengrösse Ω, welche die Eigenschaft hat, dass das Product $n\Omega$, wenn man für n eine der Zahlen $(R.)$ setzt, die Form hat:

$$n\Omega = 2z_n + 1 \pm \Theta_n,$$

wo z_n eine vom Index n abhangende positive ganze Zahl und Θ_n eine zu n gehörige positive Grösse ist, welche unendlich klein wird, wenn man n in der Zahlenreihe $(R.)$ ins Unendliche fortschreiten lässt.“

Beweis. Ich bestimme auf Grundlage der Reihe $(R.)$ eine neue Reihe $(S.)$ von ungeraden ganzen Zahlen:

$$(S.) \qquad 2g+1, \quad 2h+1, \quad 2i+1, \quad \ldots$$

nach folgendem Gesetze:

$2g+1$ werde bestimmt durch die Bedingung, dass:

$$2g+1-\frac{v}{u}$$

dem absoluten Werthe nach kleiner oder gleich 1 sei.

Falls in dieser Bestimmung eine Zweideutigkeit enthalten ist, entscheide man sich für die kleinere der beiden ihr genügenden ungeraden Zahlen. Wenn $2g+1$ bestimmt ist, so wird $2h+1$ durch die Bedingung: $2h+1-(2g+1)\frac{w}{v}$ dem absoluten Betrage nach kleiner oder gleich 1 bestimmt, wobei man sich im Falle der Zweideutigkeit wie im ersten Falle zu verhalten hat.

Analog werde die dritte Zahl $2i+1$ bestimmt durch die Bedingung: $2i+1-(2h+1)\frac{x}{w}$ dem absoluten Werthe nach kleiner oder gleich 1 und ebenso alle folgenden Zahlen der Reihe $(S.)$.

Man bilde aus $(R.)$ und $(S.)$ die unendliche Reihe rationaler Brüche:

$$(N.)\qquad \frac{1}{u},\quad \frac{2g+1}{v},\quad \frac{2h+1}{w},\quad \frac{2i+1}{x},\quad \dots .$$

Diese Brüche nähern sich einer festen von Null verschiedenen Grenze, einer Zahlengrösse, welche ich mit Ω bezeichnen will.

Um dies zu sehen, bemerke man, dass, der Entstehungsweise der Reihe $(S.)$ zufolge, die nachstehenden Ungleichheiten Geltung haben:

$$\left(\frac{1}{u}-\frac{2g+1}{v}\right)\leqq\frac{1}{v},\quad \left(\frac{2g+1}{v}-\frac{2h+1}{w}\right)\leqq\frac{1}{w},\quad \dots .$$

Mithin ist die Differenz des ersten und irgend eines folgenden Bruches der Reihe $(N.)$ nicht grösser als die Summe:

$$\frac{1}{v}+\frac{1}{w}+\frac{1}{x}+\cdots \text{ in infinitum};$$

ebenso ist die Differenz des zweiten und irgend eines folgenden Bruches nicht grösser als die Summe:

$$\frac{1}{w}+\frac{1}{x}+\cdots \text{ in infinitum};$$

und das Aehnliche gilt für die Differenzen der übrigen Brüche in der Reihe $(N.)$.

Da die Reihe $\frac{1}{v}+\frac{1}{w}+\cdots$, wegen der Bedingungen, denen die Zahlen $(R.)$ unterworfen sind, convergirt, so folgt hieraus, dass die Differenz zweier Brüche $(N.)$, wenn dieselben beliebig in der Reihe $(N.)$ stets weiter ins Unendliche rücken, unendlich klein wird, was die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür ist, dass sich die Brüche $(N.)$ einer festen Grenze Ω nähern.

Diese Zahlengrösse Ω ist von Null verschieden; denn sie unterscheidet sich nach dem Gesagten von dem ersten Näherungsbruche $\frac{1}{u}$ höchstens um die Summe:

$$\frac{1}{v}+\frac{1}{w}+\cdots;$$

die letztere ist aber kleiner als $\frac{1}{v}(1+\frac{1}{8}+\cdots)$, d. h. kleiner als $\frac{5}{4v}$, also auch kleiner als $\frac{5}{16u}$; es liegt daher Ω in den Grenzen:

$$\frac{11}{16u} \quad\text{und}\quad \frac{21}{16u}.$$

Es ist nun nicht schwer einzusehen, dass Ω die im Lemma ausgesagten Eigenschaften hat, wenn man:

$$z_u=0,\quad z_v=g,\quad z_w=h,\quad z_x=i,\quad \dots$$

nimmt. Man hat nämlich:

$$\left(\Omega-\frac{1}{u}\right)\leqq\frac{1}{v}+\frac{1}{w}+\cdots,\quad\text{also}\quad(\Omega u-1)<\tfrac{1}{2};$$

ferner

$$\left(\Omega-\frac{2g+1}{v}\right)\leqq\frac{1}{w}+\frac{1}{x}+\cdots,\quad\text{also}\quad(\Omega w-2g-1)<\tfrac{1}{4};$$

ebenso ist

$$(\Omega x-(2h+1))<\tfrac{1}{8}\ \text{u. s. f.}$$

Es nehmen also die Differenzen:

$$u\Omega-2z_u-1,\quad v\Omega-2z_v-1,\quad w\Omega-2z_w-1,\quad\ldots$$

welche ich mit:

$$\pm\Theta_u,\quad\pm\Theta_v,\quad\pm\Theta_w,\quad\ldots$$

bezeichnet habe, schneller ab als die Brüche:

$$\tfrac{1}{2},\quad\tfrac{1}{4},\quad\tfrac{1}{8},\quad\ldots.$$

Dies war zu beweisen.

§. 2.

„Die Zahlengrösse Ω kann durch eine Modification des für sie festgestellten Entstehungsgesetzes so bestimmt werden, dass sie in ein gegebenes Intervall des reellen Grössengebietes zu liegen kommt."

Ist das Intervall von 0 bis 2 in 2ν gleiche Intervalle getheilt und soll Ω in das μ^{te} von ihnen fallen, so befolge man nachstehende Regel:

Man benutze die Reihe $(R.)$ erst von demjenigen Gliede an, welches grösser ist als 6ν; setzen wir der Kürze wegen voraus, dass schon $u>6\nu$, so bestimme man die ungerade Zahl $2f+1$ so, dass der Bruch $\frac{2f+1}{u}$ in den Grenzen $\frac{3\mu-2}{3\nu}$ und $\frac{3\mu-1}{3\nu}$ liege; die ungeraden Zahlen $2g+1$, $2h+1$, ... haben in ähnlichem Sinne wie oben, den Bedingungen:

$$\left(2g+1-(2f+1)\frac{v}{u}\right)\leqq 1,$$
$$\left(2h+1-(2g+1)\frac{w}{v}\right)\leqq 1$$
$$\cdots\cdots\cdots$$

zu genügen, so dass man hat:

$$\left(\frac{2f+1}{u}-\frac{2g+1}{v}\right)\leqq\frac{1}{v},$$
$$\left(\frac{2g+1}{v}-\frac{2h+1}{w}\right)\leqq\frac{1}{w},$$
$$\cdots\cdots\cdots$$

Es fällt alsdann die Grenze Ω, welcher die Näherungsbrüche:

$$\frac{2f+1}{u},\quad \frac{2g+1}{v},\quad \frac{2h+1}{w},\quad \ldots$$

zustreben, zwischen $\frac{2f+1}{u}-\frac{5}{16u}$ und $\frac{2f+1}{u}+\frac{5}{16u}$, mithin auch, wegen der Bestimmungen, die wir für $2f+1$ und u getroffen haben, zwischen:

$$\frac{3\mu-2}{3\nu}-\frac{5}{6.16.\nu} \quad \text{und} \quad \frac{3\mu-1}{3\nu}+\frac{5}{6.16.\nu}$$

und um wie vielmehr zwischen:

$$\frac{\mu-1}{\nu} \quad \text{und} \quad \frac{\mu}{\nu}.$$

Die Zahlengrösse Ω hat auch hier die im Lemma ausgesagten Eigenschaften, wenn man:

$$z_u=f,\quad z_v=g,\quad z_w=h,\quad \ldots$$

nimmt.

§. 3.

Wenn ich von einer unendlichen Grössenreihe:

$$(G.)\qquad \varrho_1,\ \varrho_2,\ \varrho_3,\ \ldots,\ \varrho_n,\ \ldots$$

sage, dass $\lim \varrho_n = 0$, so verstehe ich darunter, dass, wenn δ eine beliebig gegebene Grösse ist, man aus der Reihe $(G.)$ eine endliche Anzahl von Gliedern aussondern kann, so dass die übrig gebliebenen sämmtlich kleiner sind als δ.

In dieser Definition liegt, dass, wenn $\lim \varrho_n = 0$ und

$$\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \ldots$$

irgend eine aus der Reihe der positiven ganzen Zahlen ausgehobene unendliche Zahlenreihe ist, in der Grössenreihe

$$(G'.)\qquad \varrho_\alpha,\ \varrho_\beta,\ \varrho_\gamma,\ \ldots$$

Glieder gefunden werden können, welche kleiner sind, als eine beliebig gegebene Grösse δ.

Es ist folgenreich, dass dieser Ausspruch sich durch den Satz umkehren lässt:

„Ist eine unendliche Grössenreihe $(G.)$ gegeben und weiss man, dass in jeder aus $(G.)$ gehobenen unendlichen Grössenreihe $(G'.)$ Glieder gefunden werden können, welche kleiner sind als eine willkürlich gegebene Grösse δ, so ist:

$$\lim \varrho_n = 0.\text{“}$$

Beweis. Sei Δ', Δ'', ... eine beliebige Reihe beständig abnehmender, unendlich klein werdender Grössen, z. B. die Reihe $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$. Man hebe aus der Reihe $(G.)$ zuerst diejenigen Glieder aus, welche grösser als Δ', dann von den übrig gebliebenen diejenigen, welche grösser sind als Δ'', u. s. f.; bei keiner von diesen Operationen gelangt man zum Ausheben unendlich vieler Glieder, weil sonst eine unendliche Reihe $(G'.)$ vorhanden wäre, deren Glieder sämmtlich grösser sind als eine von Null verschiedene Grösse $\Delta^{(\nu)}$, was gegen die Voraussetzung ist; die Grössenreihe $(G.)$ ist also von der Beschaffenheit, dass, bei beliebig klein gegebener Grösse $\Delta^{(\nu)}$, eine endliche Anzahl von Gliedern aus derselben ausgesondert werden kann, so dass die übrig bleibenden sämmtlich kleiner sind als $\Delta^{(\nu)}$; es ist also $\lim \varrho_n = 0$.

Daraus ergiebt sich als Corollar Folgendes:

„Ist eine unendliche Grössenreihe $(G.)$ gegeben und kann man aus jeder aus $(G.)$ gehobenen Grössenreihe $(G'.)$ eine neue Grössenreihe:

$$(G''.) \quad \varrho_\varkappa, \varrho_\upsilon, \varrho_\omega, \ldots$$

ausheben, in welcher die Glieder mit wachsendem Index unendlich klein werden, so ist:

$$\lim \varrho_n = 0.\text{“}$$

§. 4.

Lehrsatz. „Wenn für jeden reellen Werth von x zwischen gegebenen Grenzen $(a < x < b)$:

$$\lim (a_n \sin nx + b_n \cos nx) = 0,$$

so ist sowohl:

$$\lim a_n = 0, \quad \text{wie} \quad \lim b_n = 0.\text{“}$$

Beweis. Wir wollen $a_n \sin nx + b_n \cos nx$ in die Form bringen $\varrho_n \cos(\varphi_n - nx)$, wo $\varrho_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$ und φ_n der zwischen 0 und 2π liegende Bogen sei, dessen Sinus gleich $\frac{a_n}{\varrho_n}$, dessen Cosinus gleich $\frac{b_n}{\varrho_n}$ ist; es ist auf diese Weise nur zu zeigen, dass $\lim \varrho_n = 0$, um alsdann unmittelbar schliessen zu können, dass $\lim a_n = 0$, $\lim b_n = 0$.

Wir bezeichnen die Reihe $\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_n, \ldots$ mit $(G.)$. Sei:

$$(G'.) \quad \varrho_\alpha, \varrho_\beta, \ldots$$

irgend eine aus $(G.)$ gehobene unendliche Reihe; dann will ich zeigen, dass sich aus $(G'.)$ eine unendliche Reihe:

$$(G''.) \quad \varrho_\varkappa, \varrho_\upsilon, \varrho_\omega, \ldots$$

ausheben lässt, deren Glieder mit wachsendem Index unendlich klein werden.

Betrachten wir zu dem Ende die unendliche Reihe:

$$(1.)\quad \varphi_\alpha,\ \varphi_\beta,\ \varphi_\gamma, \ldots;$$

es muss, da die Glieder derselben alle zwischen 0 und 2π liegen, ein Intervall von der Grösse $\frac{\pi}{4}$ angegeben werden können, innerhalb welches unendlich viele Glieder der Reihe (1.) liegen.

Um die Ideen zu fixiren, sei $\left(\Phi \leqq \varphi \leqq \Phi+\frac{\pi}{4}\right)$ ein solches Intervall, (wo also Φ eine bestimmte zwischen 0 und $\frac{7\pi}{4}$ gelegene Grösse ist) und sei:

$$(2.)\quad \varphi_{\alpha'},\ \varphi_{\beta'},\ \varphi_{\gamma'},\ \ldots$$

eine aus (1.) gehobene unendliche Grössenreihe, deren Glieder sämmtlich in diesem Intervalle liegen.

Aus der Zahlenreihe

$$\alpha',\ \beta',\ \gamma',\ \ldots.$$

hebe ich eine unendliche Zahlenreihe:

$$(R.)\quad u,\ v,\ w,\ \ldots$$

aus, welche den Bedingungen des Lemmas im §. 1 entspricht, und bei welcher ausserdem u so gross genommen ist, dass man die im §. 2 definirte Zahlengrösse Ω in das Intervall $\left(\frac{a}{\pi}\cdots\frac{b}{\pi}\right)$, mithin auch in das grössere $\left(\frac{2a}{\pi}\cdots\frac{2b}{\pi}\right)$ verlegen kann. Die unendliche Grössenreihe:

$$(G''.)\quad \varrho_u,\ \varrho_v,\ \varrho_w,\ \ldots,$$

welche offenbar aus $(G'.)$ gehoben ist, ist es nun, von welcher ich nachweisen werde, dass ihre Glieder mit wachsendem Index unendlich klein werden.

Vorerst hebe ich hervor, dass die Glieder der mit $(G''.)$ parallel laufenden Reihe:

$$(F.)\quad \varphi_u,\ \varphi_v,\ \varphi_w,\ \ldots$$

in dem Intervalle $\left(\Phi\ldots\Phi+\frac{\pi}{4}\right)$ enthalten sind, und unterscheide die beiden Fälle, dass dieses Intervall eine der beiden Grössen $\frac{\pi}{2}$ und $\frac{3\pi}{2}$ enthält oder keine von ihnen enthält.

Erster Fall:

I. In dem Intervalle $\left(\Phi\ldots\Phi+\frac{\pi}{4}\right)$ liegt weder $\frac{\pi}{2}$ noch $\frac{3\pi}{2}$. Ich kann eine von Null verschiedene Grösse ε angeben, so dass $\cos\varphi$ seinem absoluten Werthe nach grösser als ε ist für jeden Werth von φ im Intervalle $\left(\Phi\ldots\Phi+\frac{\pi}{4}\right)$.

Man bestimme nach den Vorschriften des §. 2 eine Zahlengrösse Ω, so beschaffen, dass:

1) Ω zwischen $\frac{a}{\pi}$ und $\frac{b}{\pi}$ zu liegen kommt,

2) $\Omega n-(2z_n+1)=\pm\Theta_n$ unendlich klein wird, wenn man für n die steigenden Zahlen der Reihe (R.) setzt.

Setzt man in der mit den Reihen (G''.) und (F.) parallel laufenden:

$$(P.)\qquad \varrho_u\cos(\varphi_u-ux),\quad \varrho_v\cos(\varphi_v-vx),\quad \varrho_w\cos(\varphi_w-wx),\quad \ldots$$

$x=\pi\Omega$, so ist klar, dass die Cosinusse der Reihe (P.), von einem gewissen Index an, sämmtlich ihrem absoluten Werthe nach grösser sind als $\frac{\varepsilon}{2}$.

Die Glieder selbst der Reihe (P.) werden der Voraussetzung gemäss, welche im Theorem liegt, für jeden Werth von x in den Grenzen a und b, mithin auch für $x=\pi\Omega$, mit wachsendem Index unendlich klein; daraus folgt, dass die Glieder der Reihe (G''.) mit wachsendem Index unendlich klein werden.

Zweiter Fall.

II. In dem Intervalle $\left(\Phi\ldots\Phi+\frac{\pi}{4}\right)$ liegt entweder $\frac{\pi}{2}$ oder $\frac{3\pi}{2}$; dann liegt in dem Intervalle $\left(\Phi+\frac{\pi}{2}\ldots\Phi+\frac{3\pi}{4}\right)$ kein ungerades Vielfaches von $\frac{\pi}{2}$, und ich kann eine von Null verschiedene Grösse ε' angeben, so dass $\cos\varphi$ seinem absoluten Betrage nach grösser ist als ε' für jeden Werth von φ im Intervalle $\left(\Phi+\frac{\pi}{2}\ldots\Phi+\frac{3\pi}{4}\right)$.

Man bestimme nach den Vorschriften des §. 2 eine Zahlengrösse Ω, so beschaffen, dass:

1) Ω zwischen $\frac{2a}{\pi}$ und $\frac{2b}{\pi}$ zu liegen kommt,

2) $\Omega n-(2z_n+1)=\pm\Theta_n$ unendlich klein wird, wenn man für n die steigenden Zahlen der Reihe (R.) setzt.

Setzt man in der Reihe:

$$(P.)\qquad \varrho_u\cos(\varphi_u-ux),\quad \varrho_v\cos(\varphi_v-vx),\quad \ldots$$

$x=\frac{\pi}{2}\Omega$, so ist klar, dass die Cosinusse in derselben, von einem gewissen Index an, sämmtlich ihrem absoluten Werthe nach grösser sind als $\frac{\varepsilon'}{2}$.

Von den Gliedern selbst der Reihe (P.) gilt das Nämliche wie unter I.; sie werden mit wachsendem Stellenzeiger für jeden Werth von x in den

Grenzen a und b, mithin auch für $x = \frac{\pi}{2}\Omega$ unendlich klein; es folgt also auch in diesem Falle, dass die Glieder der Reihe $(G''.)$ mit wachsendem Index unendlich klein werden. —

Wir haben somit gezeigt, dass, wenn $(G'.)$ irgend eine aus $(G.)$ ausgehobene unendliche Reihe ist, man aus dieser eine Reihe $(G''.)$ ausheben kann, deren Glieder mit wachsendem Index unendlich klein werden.

Dem Corollar des §. 3 zufolge reicht dies aus, um schliessen zu können:

$$\lim \varrho_n = 0.$$

Berlin, den 20. März 1870.

Beweis, dass eine für jeden reellen Werth von x durch eine trigonometrische Reihe gegebene Function $f(x)$ sich nur auf eine einzige Weise in dieser Form darstellen lässt.

(Von Herrn *G. Cantor* in Halle.)

Wenn eine Function $f(x)$ einer reellen Veränderlichen x durch eine für jeden Werth von x convergente, trigonometrische Reihe:

$$f(x) = \tfrac{1}{2} b_0 + (a_1 \sin x + b_1 \cos x) + \cdots + (a_n \sin nx + b_n \cos nx) + \cdots$$

gegeben ist, so ist es von Wichtigkeit, zu wissen, ob es noch andre Reihen von derselben Form giebt, welche ebenfalls für jeden Werth von x convergiren und die Function $f(x)$ darstellen. Diese Frage, welche erst in neuester Zeit angeregt worden ist, kann nicht etwa, wie gewöhnlich angenommen wird, dadurch entschieden werden, dass man jene Gleichung mit $\cos n(x-t)\,dx$ multiplicirt und Glied für Glied von $-\pi$ bis $+\pi$ integrirt (wobei in der That auf der rechten Seite nur das aus dem n^{ten} Gliede hervorgehende Integral nicht wegfallen würde); denn, abgesehen davon, dass hierbei die Möglichkeit der Integration von $f(x)$ vorausgesetzt würde, kann die Integration einer Reihe:

$$A_0 + A_1 + \cdots + A_n + \cdots,$$

in welcher die A_n Functionen einer Veränderlichen x sind, durch Integration ihrer Theile nur dann ohne Bedenken ausgeführt werden, wenn der Rest, welcher nach Abtrennung der n ersten Glieder übrig bleibt, für alle Werthe von x, welche im Integrationsintervalle liegen, *gleichzeitig* unendlich klein wird. Also muss, wenn man:

$$f(x) = A_0 + A_1 + \cdots + A_n + R_n$$

setzt, bei gegebener Grösse ε, eine ganze Zahl m vorhanden sein, so beschaffen, dass für $n \gtreqless m$, R_n seinem absoluten Betrage nach kleiner ist als ε für alle Werthe von x, welche in Betracht kommen.

Es ist nämlich die kleinste ganze Zahl m, welche für ein gegebenes x die Bedingung erfüllt, dass der absolute Betrag von R_n kleiner ist als ε, wenn $n \gtreqless m$, als eine unstetige Function von x und ε zu betrachten; be-

zeichnet man sie unter diesen Umständen genauer mit $m(x, \varepsilon)$, so weiss man nicht, ob die Function $m(x, \varepsilon)$ bei gegebenem ε für alle Werthe von x unterhalb einer endlichen Grenze liegt; es ist sogar leicht einzusehen, dass, wenn $f(x)$ für $x = x_1$ eine Unstetigkeit hat, die Function $m(x, \varepsilon)$ Werthe annehmen muss, welche jede angebbare Grenze übersteigen, wenn, bei festgehaltenem ε, x dem Werthe x_1 unendlich nahe rückt.

Hieraus geht hervor, dass die Eindeutigkeit der Darstellung einer Function durch eine für jeden Werth von x convergente trigonometrische Reihe auf diesem Wege nicht ergründet werden kann.

Durch die *Riemann*sche Abhandlung „Ueber die Darstellung einer Function durch eine trigonometrische Reihe, Göttingen 1867" bin ich auf einen andern, das Ziel erreichenden Weg geführt worden, welchen ich hier kurz angeben will.

Zuerst hebe ich hervor, dass, wie in meinem Aufsatze „Ueber einen die trigonometrischen Reihen betreffenden Lehrsatz" bewiesen ist, bei einer trigonometrischen Reihe:

$$A_0 + A_1 + \cdots + A_n + \cdots,$$

welche für sämmtliche Werthe von x in einem gegebenen, übrigens beliebig kleinen Intervalle des reellen Grössengebietes convergirt, die Coefficienten a_n, b_n mit wachsendem n unendlich klein werden.

Denkt man sich nun zwei trigonometrische Reihen, welche für jeden reellen Werth von x convergiren und denselben Werth annehmen, mithin dieselbe Function $f(x)$ darstellen, so folgt durch Abziehen der einen von der andern, eine für jeden Werth von x convergente Darstellung der Null:

$$(1.) \quad 0 = C_0 + C_1 + \cdots + C_n + \cdots$$

wo $C_0 = \frac{1}{2} d_0$, $C_n = c_n \sin nx + d_n \cos nx$ und wo die Coefficienten c_n, d_n mit wachsendem n, nach dem soeben Gesagten, unendlich klein werden. Ich bilde mit *Riemann* aus der Reihe (1.) die Function:

$$(2.) \quad F(x) = C_0 \frac{xx}{2} - C_1 - \cdots - \frac{C_n}{nn} - \cdots.$$

Sie ist eine in der Nähe eines jeden Werthes von x stetige Function von x *), welche dem Lehrsatze 1 im §. 8 der vorhin genannten Abhandlung zufolge, die Eigenschaft hat, dass für jeden Werth von x der zweite Differenzquotient:

---

*) Um dies einzusehen, würde es ausreichen, wenn man nur wüsste, dass die c_n, d_n unter einer angebbaren Grenze liegen, der Nachweis davon dürfte jedoch dieselben Mittel in Anspruch nehmen, mit welchen gezeigt wird, dass $\lim c_n = 0$ und $\lim d_n = 0$.

$$\frac{F(x+\alpha)-2F(x)+F(x-\alpha)}{\alpha\alpha}$$

mit unendlich abnehmendem α sich der Grenze Null nähert.

Halten wir diese beiden data für die Function $F(x)$ fest:

I. dass sie stetig ist in der Nähe eines jeden Werthes von x,

II. dass die Grenze ihres zweiten Differenzquotienten mit unendlich abnehmendem α für jeden Werth von x gleich Null ist,

so lässt sich daraus zeigen, dass $F(x)$ eine ganze Function ersten Grades $cx+c'$ ist. Der folgende Beweis hiervon ist mir von Herrn *Schwarz* in Zürich mitgetheilt worden *).

Man denke sich bei einer in einem Intervalle $(a \dots b)$ der reellen Veränderlichen x gegebenen Function $F_1(x)$ die Bedingungen I. und II. erfüllt, und zwar die erste in der Nähe eines jeden Werthes von x im Intervalle, die zweite für jeden Zwischenwerth x, und betrachte, indem man unter i die positive oder negative Einheit, unter $\varkappa$ irgend eine reelle Grösse versteht, die Function:

$$\varphi(x) = i\left\{F_1(x)-F_1(a)-\frac{x-a}{b-a}(F_1(b)-F_1(a))\right\}-\frac{\varkappa^2}{2}(x-a)(b-x).$$

Aus den Voraussetzungen über $F_1(x)$ folgt, dass $\varphi(x)$ im Intervalle $(a \dots b)$ stetig ist, und dass die Grenze des zweiten Differenzquotienten von $\varphi(x)$ gleich $\varkappa^2$ ist für jeden Zwischenwerth x, bei unendlich abnehmendem α; ferner ist: $\varphi(a)=0$, $\varphi(b)=0$. Bezeichnen wir daher:

$$\varphi(x+\alpha)-2\varphi(x)+\varphi(x-\alpha) \quad \text{mit} \quad \varphi(x,\alpha),$$

so ist $\varphi(x,\alpha)$ für jeden Zwischenwerth x, bei unendlich abnehmendem α, annähernd gleich $\varkappa^2\alpha^2$, also positiv und von Null verschieden für hinreichend kleine Werthe von α. Daraus folgt, dass $\varphi(x)$ für keinen Werth von x im Intervalle positiv ist. In der That an den Grenzen ist $\varphi(x)=0$; würde $\varphi(x)$ für einen Zwischenwerth positiv sein, so wäre das *Maximum* der Werthe, welche $\varphi(x)$ annehmen kann, ebenfalls eine positive Grösse und würde zum Mindesten für einen *Zwischenwerth* x_0 von x *erreicht;* es wäre also für hinreichend kleine

---

*) Dieser Beweis stützt sich im Wesentlichen auf den in den Vorlesungen des Herrn *Weierstrass* häufig vorkommenden und bewiesenen Satz:

„Eine in einem Intervalle $(a \dots b)$ (die Grenzen incl.) der reellen Veränderlichen x gegebene, stetige Function $\varphi(x)$ *erreicht* das Maximum g der Werthe, welche sie annehmen kann, zum Mindesten für einen Werth x_0 der Veränderlichen, so dass $\varphi(x_0)=g$."

Einen ähnlichen, auch hierauf beruhenden Beweis für den Fundamentalsatz der Differentialrechnung hat *Ossian Bonnet* geführt; derselbe findet sich in „*Cours de calcul différentiel et intégral,* par *J. A. Serret,* Paris 1868" im ersten Bande, Seite 17—19.

Werthe von α: $\varphi(x_0+\alpha)-\varphi(x_0) \gtreqless 0$, $\varphi(x_0-\alpha)-\varphi(x_0) \gtreqless 0$, mithin auch: $\varphi(x_0, \alpha) \gtreqless 0$, während doch $\varphi(x_0, \alpha)$ für hinreichend kleine Werthe von α positiv ist. Man hat also für jeden Werth von x im Intervalle $(a \dots b)$, für $i = \pm 1$ und für einen beliebigen reellen Werth von $\varkappa$:

$$\varphi(x) \gtreqless 0;$$

lässt man hierin $\varkappa$ unendlich klein werden, so folgt:

$$F_1(x) = F_1(a) + \frac{x-a}{b-a}(F_1(b)-F_1(a)).$$

Es ist also unter den gemachten Voraussetzungen $F_1(x)$ eine ganze Function ersten Grades von x.

Daraus ergiebt sich für unsere Function $F(x)$ (da hier das Intervall beliebig erweitert werden kann) die für alle Werthe von x gültige Form: $F(x) = cx + c'$, und man hat daher für jeden Werth von x:

$$C_0 \frac{xx}{2} - cx - c' = C_1 + \frac{C_2}{4} + \dots + \frac{C_n}{nn} + \dots.$$

Aus der Periodicität auf der rechten Seite ergiebt sich zunächst, dass sowohl $c = 0$, wie auch $C_0 = \frac{d_0}{2} = 0$, und man behält daher die Gleichung:

$$(3.) \qquad -c' = C_1 + \frac{C_2}{4} + \dots + \frac{C_n}{nn} + \dots.$$

Die Reihe rechts ist von der Art, dass man, bei gegebenem ε, eine ganze Zahl m angeben kann, so dass, wenn $n \gtreqless m$, der Rest R_n seinem absoluten Betrage nach kleiner als ε ist *für alle Werthe von x.*

Man kann daher die Gleichung (3.) nach Multiplication mit $\cos n(x-t)\,dx$ *Glied für Glied* von $-\pi$ bis $+\pi$ integriren; das Resultat ist

$$c_n \sin nt + d_n \cos nt = 0,$$

wo unter t eine beliebige reelle Grösse zu verstehen ist; man hat also: $c_n = 0$, $d_n = 0$, während schon vorher gefolgert wurde, dass $d_0 = 0$.

Es ergiebt sich also das Resultat, dass eine für jeden einzelnen reellen Werth von x convergente Darstellung der Null durch eine trigonometrische Reihe (1.) nicht anders möglich ist, als wenn die Coefficienten d_0, c_n, d_n sämmtlich gleich Null sind und man hat den Satz:

„Wenn eine Function $f(x)$ einer reellen Veränderlichen x durch eine für jeden Werth von x convergente trigonometrische Reihe gegeben ist, so giebt es keine andere Reihe von derselben Form, welche ebenfalls für jeden Werth von x convergirt und die nämliche Function $f(x)$ darstellt."

Berlin, den 6. April 1870.

Ueber Flächenabbildung.

(Von Herrn *F. Eisenlohr* in Heidelberg.)

Seit den Untersuchungen von *Lambert, Lagrange* und *Gauss* gilt als erste Bedingung, der eine jede Abbildung von Theilen der Erdoberfläche auf der Ebene genügen muss, dass sie in den kleinsten Theilen dem Originale ähnlich, oder nach *Gauss* conform sei. Dennoch wird diese Bedingung noch immer auch von den besten Kartenzeichnern verletzt, sobald grössere Theile der Erdoberfläche abzubilden sind; und als Grund wird angegeben, dass die gewöhnlich vorgeschlagenen conformen Projectionsarten, die stereographische und Merkators Projection zu grosse Verzerrung der Contouren und zu grosse Krümmung der kürzesten Linie ergeben. Eine Abweichung von jenem ersten Princip, das wenigstens an jeder Stelle der Karte einen bestimmten Massstab bedingt, kann freilich nur das Uebel verschlimmern; aber dennoch bleibt es wünschenswerth, unter der grossen Anzahl conformer Abbildungen, diejenige heraus zu wählen, welche in jedem gegebenen Falle die geringste Verzerrung des Bildes hervorbringt. Nun wäre zuerst festzustellen, wonach jene Verzerrung abzuschätzen sei. Herr *H. Weber* hat in einer interessanten Abhandlung *) den Fehler einer Stelle der Karte zu definiren gesucht als den Logarithmen des Verhältnisses der dort stattfindenen Vergrösserung zu der als Einheit angesehenen Vergrösserung in einem willkürlich gewählten Nullpunkte, und hat nach dem Principe der Methode der kleinsten Quadrate das Minimum eines Integrals gesucht, dessen Element das Quadrat jenes Logarithmen multiplicirt mit dem Elemente der abzubildenden Fläche ist. Doch hängt, wie Herr *Weber* gezeigt hat, die Lösung dieser Aufgabe von der Integration einer verwickelten partiellen Differentialgleichung vierter Ordnung ab. Man könnte statt des Logarithmen, auch das um die Einheit verminderte Verhältniss der Vergrösserung selbst als Fehler betrachten, und hätte dabei den Vortheil, dass die Summe der Fehlerquadrate, welche einer Abbildung zukommen, zu derjenigen, welcher die Zurückführung des Bildes auf das Original unterworfen ist, einfach in dem Verhältnisse des Quadrats der Vergrösserung in dem will-

---

*) Dieses Journal Bd. 67 pag. 229.

kürlichen Nullpunkte steht. Doch ist die Lösung dieser Aufgabe nicht einfacher als die der obigen, und führt ebensowenig zu brauchbaren Resultaten.

Es scheint dagegen, als wenn die geringere Treue der Abbildung einer Fläche nicht unmittelbar durch die Verschiedenheit des Massstabes bedingt werde, sondern vielmehr durch die Verzerrung der Contouren, insbesondere durch die geodätische Krümmung, welche die geodätischen Linien des Originals auf dem Bilde zeigen, wie übrigens auch durch die Anforderung der Kartenzeichnung bestätigt wird. Man findet nun, dass an irgend einer Stelle des Bildes diejenigen geodätischen Linien des Originals, welche senkrecht zu einer Curve gleicher Vergrösserung stehen, keine, die von der Curve berührten die grösste Krümmung erhalten; dass ferner diese grösste Krümmung ausgedrückt werde durch die Schnelligkeit, mit welcher sich auf der abzubildenden Fläche die reciproke Vergrösserung in der Längeneinheit ändert*). Jener grösste Werth der Krümmung der geodätischen Linien, welche durch einen Punkt des Bildes gelegt werden können, empfiehlt sich demnach als ein sehr geeignetes Mass des Fehlers an diesem Punkte.

Man wird, um möglichst kleine Fehler zu begehen, ein Integral zu einem Minimum machen müssen, dessen Element das Flächenelement des Bildes multiplicirt mit dem Quadrate der grössten Krümmung in demselben ist.

Wir beschränken zunächst nicht die Art der Flächen, auf welchen sich das Original und das Bild befinden. Sind t und u die Coordinaten eines Punktes des ersten, T und U die Coordinaten eines Punktes des zweiten, und sind t und u so beschaffen, dass sie beliebigen Constanten gleich gesetzt, zwei Systeme zu einander senkrechter isothermer Linien auf den Flächen geben, gilt ferner dasselbe für T und U, so kann man bekanntlich $T+Ui$ als eine Function von $t+ui$ darstellen:

$$T+Ui = f(t+ui),$$

wenn die Abbildung in den kleinsten Theilen ähnlich sein soll. Die Vergrösserung m ist sodann der Modul von $\sqrt{\frac{N}{n}}\cdot f'(t+ui)$, oder es ist $\lg m + \frac{1}{2}\lg\frac{n}{N}$ der reelle Theil von $\lg f'(t+ui)$, wenn die Linearelemente dS und ds auf den beiden Flächen durch die Gleichungen

$$dS^2 = N(dT^2+dU^2), \qquad ds^2 = n(dt^2+du^2)$$

gegeben sind. Nun ist das Maximum der Krümmung in einem Punkte des

*) Es kann dies übrigens aus einer Formel von Herrn *Weber* p. 232 a. a. O. gefolgert werden, in welcher nur statt des Factors 2 der Factor -1 zu setzen ist, wie nach mündlicher Mittheilung Herr *Weber* selbst bereits bemerkt hat.

Bildes $\sqrt{\frac{1}{nm^4}\left(\frac{\partial m^2}{\partial t^2}+\frac{\partial m^2}{\partial u^2}\right)}$; das Flächenelement des Originals $n\,dt\,du$, das des Bildes $m^2 n\,dt\,du$; also muss das Integral:

$$\iint\left[\left(\frac{\partial \lg m}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial \lg m}{\partial u}\right)^2\right]dt\,du,$$

über den Raum der abzubildenden Fläche ausgedehnt, ein Minimum werden, und ausserdem der Logarithme von m und seine Differentialquotienten in Bezug auf Endlichkeit und Stetigkeit entsprechenden Bedingungen wie das Potential elektrischer Massen genügen, wie Herr *Weber* a. a. O. ausführlicher entwickelt hat. Führt man für $\log m$ die Grösse q ein, so erhält man durch Variation des Integrals die Gleichung:

$$\iint\left(\frac{\partial q}{\partial t}\cdot\frac{\partial \delta q}{\partial t}+\frac{\partial q}{\partial u}\cdot\frac{\partial \delta q}{\partial u}\right)dt\,du = 0$$

und nach theilweiser Integration

$$0 = \int q\frac{\partial \delta q}{\partial t}du+\int q\frac{\partial \delta q}{\partial u}dt-\iint q\left(\frac{\partial^2 \delta q}{\partial t^2}+\frac{\partial^2 \delta q}{\partial u^2}\right)dt\,du.$$

Die einfachen Integrale, welche sich auf den Umfang der Fläche beziehen, können in ein Integral verwandelt werden, welches über diesen Umfang ausgedehnt ist, nämlich

$$\int q\frac{\partial \delta q}{\partial p}d\sigma,$$

wo $d\sigma$ das Linearelement des Umfanges, p die Normale auf demselben ist. Das Doppelintegral verschwindet, weil $q+\frac{1}{2}\log\left(\frac{n}{N}\right)$, also auch δq der Summe einer Function von $t+ui$ und einer andern von $t-ui$ gleich ist, also die Gleichung:

$$\frac{\partial^2 \delta q}{\partial t^2}+\frac{\partial^2 \delta q}{\partial u^2} = 0$$

in der ganzen Ausdehnung der abzubildenden Fläche erfüllt. Am Rande muss δq, welches übrigens eine willkürliche Function von t und u ist, der Bedingung genügen:

$$\int q_0\frac{\partial \delta q}{\partial p}d\sigma = 0,$$

wenn q_0 eine constante Grösse ist, da dieses Integral durch Integration von $\iint q_0\left(\frac{\partial^2 \delta q}{\partial t^2}+\frac{\partial^2 \delta q}{\partial u^2}\right)dt\,du$ erhalten wird. Das über den Umfang ausgedehnte Integral kann also nur dadurch Null werden, dass wir q auf dem ganzen Umfange

einer constanten Grösse q_0 gleich setzen, oder *die Abbildung zeigt im Innern die kleinste Verzerrung, wenn die Vergrösserung auf dem ganzen Umfang denselben Werth behält.*

Zugleich ist durch diesen Grundsatz die conforme Abbildung mit möglichst kleiner Verzerrung vollständig bestimmt, wenn der Logarithme der Vergrösserung im Innern noch die oben erwähnten Bedingungen erfüllt. Soll z. B. die beste Abbildung eines Theils einer Kugel (der Erde) auf eine Ebene gesucht werden, so seien $t=\varphi$ die geographische Länge, $u=\alpha$ der Logarithme der Tangente des halben Polarabstandes, und der Radius der Kugel $=1$; ferner $T=x$ und $U=y$ rechtwinklige Coordinaten in der Ebene, so ist

$$\frac{N}{n}=\left(\frac{e^{\alpha}+e^{-\alpha}}{2}\right)^2,$$

und die Grösse $z=\lg\left(\frac{2m}{e^{\alpha}+e^{-\alpha}}\right)$ muss auf dem Umfange des abzubildenden Stückes gleich $-\lg\left(\frac{e^{\alpha}-e^{-\alpha}}{2}\right)$ sein, und im Innern der Differentialgleichung:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial \alpha^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial \varphi^2}=0$$

genügen. Die Lösung dieser Aufgabe für den Aequator als Begrenzungscurve ist die stereographische Projection; für zwei Parallelkreise erhält man eine von *Gauss* *) angegebene Projectionsart, welche in *Mercators* Projection übergeht, wenn beide Parallelkreise gleich weit vom Aequator abstehen, und welche *Mercators* Projection für nahezu die ganze Erdkugel ergiebt, wenn diese Parallelkreise zugleich sehr hohen Breiten, z. B. 85°, zugehören.

Es schien mir interessant und für die Kartenzeichnung wichtig, dieselbe Aufgabe für zwei Meridiane als Begrenzungscurve zu lösen.

Betrachtet man hier α und φ wie rechtwinklige Coordinaten, so reducirt sich die Aufgabe darauf, den Werth von z für jeden Punkt eines durch zwei parallele Linien begrenzten Streifens zu finden; und diese letztere Aufgabe lässt sich bekanntlich wie das Potential nach *Green* auf die Aufsuchung eines Integrals der Differentialgleichung zurückführen, welches am Rande verschwindet und im Innern einer stetigen Function von α und φ, um den Logarithmen der Entfernung von jenem Punkte vermehrt, gleich ist. Ich werde das letztere Integral die *Green*sche Function nennen.

*) Allgemeine Auflösung der Aufgabe, die Theile einer gegebenen Fläche auf einer anderen abzubilden. 10.

Den Bedingungen dieser Function genügt der reelle Theil der convergenten Reihe

$$\lg\left(\frac{\Phi-\varphi+i(\alpha-A)}{b-\varphi-\Phi-i(\alpha-A)}\right)+\sum_{n=-\infty}^{n=\infty}\lg\left(\frac{1+\dfrac{\Phi-\varphi+i(\alpha-A)}{2nb}}{1-\dfrac{\Phi+\varphi-b+i(\alpha-A)}{2nb}}\right),$$

wo b die Breite des Streifens, A und Φ die Coordinaten jenes Punktes, von einem in der Mitte des Streifens gelegenen Punkte an gerechnet, sind, und die Summe über alle positiven und negativen Werthe von n mit Ausnahme der Null auszudehnen ist. Durch Summirung der Reihe erhält man die *Green*sche Function gleich dem reellen Theile von

$$(1.)\qquad w=\lg\left(\frac{e^{(A-\alpha+i(\varphi-\Phi))\frac{\pi}{2b}}-e^{-(A-\alpha+i(\varphi-\Phi))\frac{\pi}{2b}}}{e^{(A-\alpha+i(\varphi+\Phi-b))\frac{\pi}{2b}}-e^{-(A-\alpha+i(\varphi-\Phi-b))\frac{\pi}{2b}}}\right).$$

Man erhält übrigens die obige Reihe, wenn man den Punkt (A, Φ) an beiden Grenzlinien spiegelt, und zu dem Logarithmen der Entfernung irgend eines Punktes von dem Punkte (A, Φ) den Logarithmen der Entfernung von dem ersten, zweiten, etc. Spiegelbilde positiv oder negativ hinzufügt, je nachdem die Anzahl der Spiegelungen eine gerade oder ungerade war, analog einer von Herrn *Kirchhoff* bei der Untersuchung der Vertheilung elektrischer Ströme in einer ebenen Platte angewandten Methode *). Soll nun z an den Grenzlinien

$$z_0 = -\lg\left(\frac{e^{\alpha}+e^{-\alpha}}{2}\right)$$

sein, so erhält man für z im Punkte (A, Φ) den reellen Theil von

$$(2.)\qquad z' = -\frac{1}{2\pi}\int z_0\frac{\partial w}{\partial p}\,ds,$$

wo die Integration über beide Ränder auszudehnen und p die nach aussen gerichtete Normale auf dem Rande ist. Dies giebt:

$$(3.)\qquad z' = \frac{2}{b}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\lg\left(\frac{e^{\alpha}+e^{-\alpha}}{2}\right)d\alpha}{e^{(A-\alpha+i\Phi)\frac{\pi}{b}}+e^{-(A-\alpha+i\Phi)\frac{\pi}{b}}}.$$

Ist hier z. B. $b=\pi$, so kann man in dem bestimmten Integral für α $y+A+i\Phi = y+r$ substituiren und in Beziehung auf r differentiiren; man erhält alsdann einen Ausdruck, der sich unbestimmt integriren lässt, und nach

*) Mitgetheilt von Herrn *Quincke* (*Poggendorffs* Annalen 97, p. 382) bei der Berechnung seiner Versuche über die Stromvertheilung in einer rechteckigen Platte.

Einführung der Grenzen und Integration in Bezug auf r:

$$(4.)\qquad z' = -2\lg\left(\frac{e^{\frac{A+i\Phi}{2}}+e^{-\frac{A+i\Phi}{2}}}{2}\right).$$

Dieser Fall entspricht der Abbildung der Halbkugel nach stereographischer Projection. In allen Fällen dagegen, in welchen $\frac{b}{\pi}$ einem Bruche $\frac{h}{k}$ gleich ist, dessen Nenner k ungerade, lässt sich das Integral (3.) durch Zerlegung von $(e^{a}+e^{-a})$ in h Factoren, und durch Zerfällung des Bruches in k Partialbrüche, in Integrale zerlegen, welche mit der Form von (3.) für $b=\pi$ übereinstimmen, und ebenso integrirt werden können. Nur, wenn k gerade ist, giebt die Zerlegung in Partialbrüche nicht wieder Partialbrüche derselben Form, und das bestimmte Integral führt zu höheren Transcendenten.

Setzt man $b=2\pi$, so erhält man eine Darstellung der ganzen Kugel, die treuer ist als *Mercators* Projection, welche letztere übrigens streng genommen gar nicht die *ganze* Kugel darzustellen im Stande ist.

Die Vergrösserung ist hier gleich dem Modul von

$$(5^{a}.)\qquad e^{z'}\cos(\alpha i) = \frac{\cos\alpha i}{8\cos^{2}\frac{1}{2}\left(\varphi+\frac{\pi}{2}-\alpha i\right)\cos^{2}\frac{1}{2}\left(\varphi-\frac{\pi}{2}-\alpha i\right)},$$

$$(5^{b}.)\qquad x+yi \text{ wird } \int z'\,d(\alpha+\varphi i) = \frac{2}{i}(v+ui)+2\sqrt{2}\,(e^{v-ui}-e^{-(v-ui)}),$$

wo

$$\operatorname{tg} u = \frac{\sin\frac{\vartheta}{2}}{\cos\frac{\vartheta}{2}+\cos\frac{\varphi}{2}\sqrt{2\cos\vartheta}},\qquad v=\tfrac{1}{2}\,l\left(\frac{\cos\frac{\vartheta}{2}+\sqrt{\cos\vartheta}\cos\left(45-\frac{\varphi}{2}\right)}{\cos\frac{\vartheta}{2}+\sqrt{\cos\vartheta}\cos\left(45+\frac{\varphi}{2}\right)}\right)$$

und ϑ die geographische Breite bedeutet.

Die Annahme $b=\frac{\pi}{3}$ giebt eine sehr gute Darstellung des sechsten Theils der Erdoberfläche mit dem Minimum der Vergrösserung $\frac{8}{9}$ in der Mitte, auf die Vergrösserung am Rande als Einheit bezogen. Man erhält:

$$(6.)\quad z' = 2\lg\cos\left(\frac{\varphi-\alpha i}{2}\right)-2\lg\cos\left(\frac{\varphi+\frac{\pi}{3}-\alpha i}{2}\right)-2\lg\left(\frac{\varphi-\frac{\pi}{3}-\alpha i}{2}\right)-l.2,$$

$$(7.)\qquad x+yi = \frac{2i}{\sqrt{27}}(e^{v+ui}-e^{-(\iota+ui)}+2v+2ui),$$

wenn

$$v = \tfrac{1}{2} l \left(\frac{1 + \cos\left(a - \frac{\pi}{3}\right)\cos\vartheta}{1 + \cos\left(a + \frac{\pi}{3}\right)\cos\vartheta} \right); \qquad \operatorname{cotg} u = \frac{\frac{1}{2} + \cos a \cos\vartheta}{\sqrt{\frac{3}{4}} \cdot \sin\vartheta},$$

oder bequemer zur logarithmischen Berechnung

$$\operatorname{tg} u_1 = \operatorname{tg}\frac{\vartheta}{2} \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{6} - \frac{a}{2}\right), \qquad \operatorname{tg} u_2 = \operatorname{tg}\frac{\vartheta}{2} \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{6} + \frac{a}{2}\right),$$

$$x = \tfrac{1}{3} \frac{\sin 2u_2}{\sin\left(\frac{\pi}{3} + a\right)} + \tfrac{1}{3} \frac{\sin 2u_1}{\sin\left(\frac{\pi}{3} - a\right)} + \frac{4}{\sqrt{27}}(u_1 + u_2),$$

$$y = \tfrac{2}{3} \operatorname{cotg}\vartheta \sin(u_2 - u_1)\cos(u_2 + u_1) + \frac{2}{\sqrt{27}} l. \left(\frac{\sin\left(\frac{\pi}{3} - a\right) . \sin 2u_2}{\sin\left(\frac{\pi}{3} + a\right) . \sin 2u_1} \right).$$

Besteht die Begrenzung aus zwei Meridianen und zwei Parallelkreisen, so ist die *Green*sche Function, welche innerhalb des aus denselben gebildeten Vierecks einer stetigen Function vermehrt um den Logarithmen der Entfernung vom Punkte (A, Φ) gleich ist, und am Rande verschwindet, für den Punkt (α, φ) der reelle Theil von

$$w = \lg \frac{\vartheta_1(\alpha - A + i(\varphi - \Phi))\vartheta(\alpha + A - \alpha_0 + i(\varphi + \Phi))}{\vartheta_1(\alpha + A - 2\alpha_0 + i(\varphi - \Phi))\vartheta_1(\alpha - A + i(\varphi + \Phi))},$$

unter Benutzung der in *Briot* und *Bouquets* Theorie der doppelt periodischen Functionen angewandten Bezeichnung. Es sind hierin $\alpha = \alpha_0$ und $\varphi = 0$ die Coordinaten des Mittelpunkts des betrachteten Vierecks, $\alpha = \alpha_0 \pm \frac{1}{3}\omega$ diejenigen der begrenzenden Parallelkreise, $\varphi = \pm\frac{\omega'}{4i}$ diejenigen der begrenzenden Meridiane, ω und ω' die Perioden der aus den ϑ–Functionen gebildeten elliptischen Functionen.

Das obige Resultat, welches im Wesentlichen mit dem von Herrn *Jochmann**) für die Vertheilung elektrischer Ströme erhaltenen übereinstimmt, lässt sich mit Hülfe der Spiegelung des Punktes (A, Φ) an den vier Rändern und durch Summirung einer Reihe von Logarithmen ableiten, aber auch direct in Bezug auf die vorgeschriebenen Bedingungen für den Rand und das Innere prüfen. Die Auflösung der vorliegenden Aufgabe kommt also nach Gleichung (2.) auf ein über die Grenzen ausgedehntes bestimmtes Integral zurück, in dessen Element sich ϑ–Functionen befinden.

---

*) *Schlömilch,* Journal X, p. 48.

Es bliebe noch ein anderer Weg übrig, nämlich unter den bekannten einfachen Projectionsarten diejenigen auszuwählen, für welche eine Linie gleicher Vergrösserung nahezu mit dem Rande der Karte übereinstimmt. Solche einfachen Projectionsarten sind z. B. die von *Lagrange* vorgeschlagenen, bei welchen die Meridiane und Parallelkreise wieder Kreise werden, und welche im Allgemeinen, abgesehen von Constanten, welche nur eine Verschiebung der Coordinaten oder Veränderung des Massstabes bewirken, durch die Gleichung:

$$(8.)\qquad x+yi = \operatorname{tg}\left[\frac{\lambda}{2}(\varphi+\alpha i+\beta i)\right]$$

dargestellt werden, wo α und φ dieselbe Bedeutung haben, wie oben, und β und λ willkürliche Constanten sind; dieselben mögen für unsere Zwecke reell sein.

In der That geben die Normen der beiden Seiten der Gleichungen:

$$x+yi+\operatorname{cotg}\lambda i(\beta+\alpha) = \frac{\cos\frac{\lambda}{2}(\varphi-\alpha i-\beta i)}{\cos\frac{\lambda}{2}(\varphi+\alpha i+\beta i).\sin\lambda i(\alpha+\beta)},$$

$$x+yi+\operatorname{cotg}\lambda\varphi = \frac{\cos\frac{\lambda}{2}(\varphi-\alpha i-\beta i)}{\cos\frac{\lambda}{2}(\varphi+\alpha i+\beta i).\sin\lambda\varphi}$$

einander gleich gesetzt, Gleichungen von Kreisen für die Längen- und Breitengrade.

Die Curven gleicher Vergrösserung sind für diese Projectionsarten allerdings nicht sehr einfacher Art; und es wird auch hier in den meisten Fällen sehr schwierig sein, die willkürlichen Constanten λ und β so zu bestimmen, dass eine solche Curve in der Abbildung mit dem Rande der Karte nahezu übereinstimme. Man wird es deshalb in der Regel zweckmässiger finden, die Bedingungen kleinster Verzerrung nur auf die nächste Umgebung des Mittelpunkts der Karte zu beschränken; d. h. dafür zu sorgen, dass die Vergrösserung auf dem Umfange einer sehr kleinen Ellipse von gegebenem Axenverhältnisse, deren Mittelpunkt im Mittelpunkte der Karte liegt, unverändert bleibe. Hierzu ist zunächst nöthig, dass die Vergrösserung im Mittelpunkt der Karte ein Maximum oder Minimum habe, oder wenn der Mittelpunkt die Coordinaten $\alpha=\alpha_0$, $\varphi=0$ hat, dass die Gleichung erfüllt wird:

$$\operatorname{tg}\frac{\lambda i}{2}(\alpha+\beta) = \lambda.\operatorname{tg}\alpha_0 i$$

oder:

$$(9.)\qquad \lambda(\alpha_0+\beta) = \lg\left(\frac{e^{\alpha_0}(\lambda+1)+e^{-\alpha_0}(\lambda-1)}{e^{\alpha_0}(\lambda-1)+e^{-\alpha_0}(\lambda+1)}\right).$$

In der Nähe des Mittelpunkts ist die Vergrösserung:

$$m = 1+d\alpha^2\left(\frac{1}{(e^{\alpha_0}+e^{-\alpha_0})^2}-\frac{\lambda^2-1}{4}\right)+d\varphi^2\left(\frac{1}{(e^{\alpha_0}+e^{-\alpha_0})^2}+\frac{\lambda^2-1}{2}\right).$$

Soll also in einer kleinen Ellipse mit constanter Vergrösserung das Verhältniss der westöstlichen Axe zur Meridianaxe wie a zu 1 sein, so hat man nun noch zu setzen:

$$\frac{(e^{\alpha_0}+e^{-\alpha_0})^2.(\lambda^2-1)}{4} = \frac{1-a^2}{1+a^2},$$

oder wenn statt α_0 die Breite ϑ_0 eingeführt wird:

$$(10.)\qquad \frac{\lambda^2-1}{\cos^2\vartheta_0} = \frac{1-a^2}{1+a^2},$$

wodurch λ bestimmt wird, während aus (9.) β abgeleitet werden kann.

Ist a unendlich gross, so erhält man die von *Lambert* und *Gauss* vorgeschlagene Projectionsart, bei welcher die Vergrösserung längs eines ganzen Parallelkreises constant ist; λ wird gleich $\sin\vartheta_0$. Ist a der Einheit gleich, so erhält man die stereographische Projection, weil $\lambda^2-1=0$ wird.

Heidelberg, den 7. März 1870.

Bemerkungen zur Determinanten-Theorie.

(Von Herrn *Kronecker*.)

Auszug aus Briefen an Herrn *Baltzer*.

. . . . . Ihrer Aufforderung entsprechend sende ich Ihnen Bemerkungen über einige Punkte der Determinanten-Theorie, welche Sie freilich nur zum Theil bei Bearbeitung der dritten Auflage Ihres Lehrbuchs werden benutzen können, da der Druck des Werkes Ihren Mittheilungen nach schon weit vorgeschritten ist. Dabei werde ich durchweg von einigen bequemen Bezeichnungen Gebrauch machen, die ich in meinem Aufsatz „über bilineare Formen" (Bd. 68 dieses Journals) eingeführt habe, nämlich erstens die Determinante von n^2 Grössen: a_{ik} einfach durch das Zeichen:

$$|a_{ik}|$$

darstellen und zweitens:

$$\delta_{ik} \textit{ gleich Eins oder gleich Null}$$

setzen, je nachdem die beiden Indices i und k einander gleich oder von einander verschieden sind.

I.

An Stelle des Satzes 7, pag. 33. der zweiten Auflage Ihres Lehrbuches habe ich in Vorlesungen, welche ich im Winter 1864 an hiesiger Universität gehalten habe, folgendes allgemeinere Theorem gesetzt:

Es seien a_{ik} für $i, k = 1, 2, \dots n$ beliebige n^2 Elemente, ferner sei für $m < n$:

$$\begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12}, & \dots & a_{1m} \\ a_{21}, & a_{22}, & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}, & a_{m2}, & \dots & a_{mm} \end{vmatrix} = d$$

und für irgend welche Indices i, k:

$$\begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12}, & \dots & a_{1m}, & a_{1k} \\ a_{21}, & a_{22}, & \dots & a_{2m}, & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1}, & a_{m2}, & \dots & a_{mm}, & a_{mk} \\ a_{i1}, & a_{i2}, & \dots & a_{im}, & a_{ik} \end{vmatrix} = d_{ik};$$

endlich sei:

$$c_{ik} = a_{ik}.d - d_{ik} \quad (i, k = 1, 2, \dots n).$$

Alsdann bilden die n^2 Elemente c_{ik} ein System, für welches sämmtliche Unterdeterminanten $(m+1)^{\text{ster}}$ Ordnung identisch verschwinden.

Wenn man nämlich für $r = 1, 2, \dots m$ mit b_{rk} den Factor von a_{ir} in der Entwickelung von d_{ik} nach den Elementen der letzten Horizontalreihe bezeichnet, so dass:

$$d_{ik} = a_{ik}.d + \sum_r a_{ir}.b_{rk}$$

wird, so ist:

$$c_{ik} = -\sum_r a_{ir}.b_{rk};$$

das System der Elemente c entsteht also aus der Zusammensetzung eines Systems a, in welchem die letzten $(n-m)$ Vertikalreihen fehlen, und eines Systems b, in welchem sämmtliche Elemente der letzten $(n-m)$ Horizontalreihen gleich Null sind, und hieraus folgt unmittelbar die Richtigkeit des obigen Theorems.

Nach der Definition der Grössen d_{ik} ist offenbar *identisch:*

$$d_{ik} = 0 \quad \text{und also:} \quad c_{ik} = a_{ik}.d,$$

sobald nicht *beide* Indices i und k grösser als m sind. Ist also das System der Elemente a_{ik} so beschaffen, dass auch die $(n-m)^2$ Determinanten d_{ik}, in denen i und k grösser als m sind, verschwinden, so ist für *sämmtliche* Indices i, k:

$$c_{ik} = a_{ik}.d;$$

folglich werden — vorausgesetzt, dass d von Null verschieden ist — nach obigem Theorem für ein solches System a_{ik} sämmtliche Unterdeterminanten $(m+1)^{\text{ster}}$ Ordnung gleich Null. Hiermit ist die Richtigkeit des im Eingang erwähnten Satzes dargethan, und ich will nur noch die Bemerkung hinzufügen, dass für aus *beliebigen* Elementen a in der oben angegebenen Weise gebildete Grössen b die Gleichung:

$$-b_{rs} = \delta_{rs}.d$$

besteht, sobald der Index s nicht grösser als m ist.

II.

In Bezug auf den Inhalt des §. 12 Ihres Lehrbuches, welcher von den Functionaldeterminanten handelt, habe ich Ihnen verschiedene Bemerkungen zu machen, die ich zur besseren Uebersicht in mehrere Paragraphen sondern will.

§. 1.

Wenn n Grössen: $x_{n+1}, x_{n+2}, \dots x_{2n}$ als Functionen der n Variabeln: $x_1, x_2, \dots x_n$ implicite durch die n Gleichungen:

$$F_i(x_1, x_2, \dots x_{2n}) = 0 \qquad (i=1,2,\dots n)$$

definirt werden, so ist die Functionaldeterminante:

$$\left| \frac{\partial x_{n+i}}{\partial x_k} \right| \qquad (i,k=1,2,\dots n)$$

durch die Gleichung:

$$(A.) \qquad |F_{i,n+k}| \cdot \left| \frac{\partial x_{n+i}}{\partial x_k} \right| = (-1)^n \cdot |F_{ik}|$$

bestimmt, in welcher:

$$F_{ir} = \frac{\partial F_i}{\partial x_r} \qquad (r=1,2,\dots 2n)$$

zu nehmen ist. Da nämlich für die Unterdeterminanten: D_{hi} des Systems von n^2 Grössen: $F_{i,n+k}$ die Formel:

$$\sum_i D_{hi} \cdot F_{i,n+k} = \delta_{hk} \cdot |F_{i,n+k}| \qquad (h,i,k=1,2,\dots n)$$

besteht, so kommt, indem die Gleichung:

$$\sum_r F_{ir}\, dx_r = 0 \qquad (r=1,2,\dots 2n)$$

mit D_{hi} multiplicirt und über $i=1,2,\dots n$ summirt wird:

$$|F_{i,n+k}| \cdot dx_{n+h} = -\sum_i \sum_k D_{hi} \cdot F_{ik}\, dx_k \qquad (i,k=1,2,\dots n).$$

Der partielle Differentialquotient von x_{n+h} nach x_k wird hiernach durch die Gleichung:

$$|F_{i,n+k}| \cdot \frac{\partial x_{n+h}}{\partial x_k} = -\sum_i D_{hi} \cdot F_{ik}$$

bestimmt, aus welcher mit Hülfe der Multiplicationsregel und der Relation:

$$|D_{hi}| = |F_{i,n+k}|^{n-1}$$

die obige Formel $(A.)$ (cf. pag. 128 Ihres Buches) unmittelbar resultirt.

Wenn speciell:

$$F_i = -x_{n+i} + f_i(x_1, x_2, \dots x_n) \qquad (i=1,2,\dots n)$$

ist, so ergiebt die Formel $(A.)$:

$$\left| \frac{\partial x_{n+i}}{\partial x_k} \right| = \left| \frac{\partial f_i}{\partial f_k} \right|.$$

Wenn ferner zur Erledigung des Inhaltes von Art. 2, §. 12 Ihres Buches F_i

so angenommen wird, dass darin die Variabeln: $x_1, x_2, \dots x_{i-1}$ fehlen, so wird:

$$|F_{ik}| = F_{11}.F_{22}\dots F_{nn}.$$

Wenn endlich für $i = 1, 2, \dots n$:

$$F_i(x_1, x_2, \dots x_{2n}) = -x_{n+i} + f_i(x_i, x_{i+1}, \dots x_{n+i-1})$$

ist, so hat man überdies:

$$|F_{i,n+k}| = (-1)^n,$$

und die Formel (*A.*) reducirt sich für diesen Fall auf:

$$\left|\frac{\partial x_{n+i}}{\partial x_k}\right| = F_{11}.F_{22}\dots F_{nn},$$

wie pag. 120 Ihres Buches.

§. 2.

An Stelle des Art. 3 §. 12 Ihres Buches möchte ich Ihnen folgende Entwickelung vorschlagen. Es seien $f_1, f_2, \dots f_m$ eindeutig definirte Functionen der n Variabeln: $x_1, x_2, \dots x_n$ und $n > m$. Die Functionen f seien so beschaffen, dass nicht sämmtliche aus den $m.n$ Ableitungen:

$$f_{rk} \quad \text{d. i.} \quad \frac{\partial f_r}{\partial x_k} \qquad (r < m,\ k < n)$$

zu bildenden Determinanten m^{ter} Ordnung verschwinden. Alsdann lassen sich natürlich $(n-m)$ Functionen: $f_{m+1}, f_{m+2}, \dots f_n$ hinzunehmen, so dass die Functionaldeterminante der n Functionen f von Null verschieden ist. Bezeichnet man die Unterdeterminanten derselben mit: Δ_{ik}, so ist:

$$\sum_i f_{hi}.\Delta_{ik} = \delta_{hk}.|f_{hk}| \qquad (h, i, k = 1, 2, \dots n).$$

Wenn nun eine Function $f_0(x_1, x_2, \dots x_n)$ die Eigenschaft hat, dass sämmtliche aus den $n(m+1)$ Ableitungen:

$$f_{0i}, f_{1i}, \dots f_{mi} \qquad (i = 1, 2, \dots n)$$

zu bildenden Determinanten $(m+1)^{\text{ster}}$ Ordnung verschwinden, so ist die Functionaldeterminante der n Functionen:

$$f_0, f_1, \dots f_{m+\mu-1}, f_{m+\mu+1}, \dots f_n \qquad (\mu = 1, 2, \dots (n-m))$$

gleich Null, also:

$$(B.) \qquad \sum_{i=1}^{i=n} f_{0i}.\Delta_{i,m+\mu} = 0.$$

Denkt man sich an Stelle der Variabeln: x neue Variabeln: y eingeführt, die durch die Gleichungen:

$$y_i = f_i(x_1, x_2, \dots x_n) \qquad (i = 1, 2, \dots n)$$

bestimmt sind, so erhält man für die Differentialien die Relation:

$$|f_{hk}|.dx_i = \sum_k \Delta_{ik}.dy_k \qquad (h, i, k = 1, 2, \dots n).$$

Für das vollständige Differential von f_0 gilt hiernach die Gleichung:

$$(C.) \qquad |f_{hk}|.df_0 = \sum_i \sum_k f_{0i}.\Delta_{ik}.dy_k,$$

in welcher die auf k bezügliche Summation vermöge der Gleichung (*B.*) auf die Werthe: $k \leqq m$ beschränkt werden kann. Es ist also $f_0(x_1, x_2, \dots x_n)$, als Function der Variabeln y betrachtet, nur von den ersten m Variabeln y abhängig, von den $(n-m)$ folgenden aber unabhängig; und dies ist — wie sich aus dem Vorstehenden ergiebt — eine ***nothwendige*** Eigenschaft der Function f_0, während es evident ist, dass dieselbe Eigenschaft auch ***hinreicht***, um die über f_0 gemachte Voraussetzung zu erfüllen.

Die hier angegebene lediglich formale Aenderung der *Jacobi*schen Deduction (*Jacobi* de determinantibus functionalibus §. 6 und 7) führt nur zu dem Resultat: ***wenn*** sich eine Function: $f_0(x_1, x_2, \dots x_n)$, für welche sämmtliche aus den $n(m+1)$ Ableitungen:

$$f_{0i}, \quad f_{1i}, \quad \dots \quad f_{mi} \qquad (i = 1, 2, \dots n)$$

zu bildenden Determinanten $(m+1)^{\text{ster}}$ Ordnung verschwinden, als Function der durch die Gleichungen:

$$y_i = f_i(x_1, x_2, \dots x_n) \qquad (i = 1, 2, \dots n)$$

definirten Variabeln y ausdrücken lässt, so gehen in diesen Ausdruck die $(n-m)$ letzten Variabeln: $y_{m+1}, y_{m+2}, \dots y_n$ nicht ein. Der hier vorausgesetzte Umsatz der Variabeln x in die Variabeln y, welcher einer wirklichen Elimination der n Grössen x aus den $(n+1)$ Gleichungen:

$$y_h = f_h(x_1, x_2, \dots x_n) \qquad (h = 0, 1, 2, \dots n)$$

gleichkommt, ist aber nicht immer statthaft. Denn es giebt Beziehungen zwischen Grössen, welche durch Beziehungen zu andern Grössen vermittelt sind, und bei deren Definition eine solche Vermittelung unvermeidlich ist, d. h. also, es giebt Fälle, in denen eine Elimination unmöglich ist, wie das einfache Beispiel der beiden Gleichungen:

$$x = \sin v, \qquad y = \sin av$$

zeigt, aus denen v — wenn a einen irrationalen Werth hat — nicht wirklich eliminirt werden kann. Die obige aus dem Verschwinden der $n(m+1)$ Ableitungen:

$$f_{0i}, \quad f_{1i}, \quad \dots \quad f_{mi} \qquad (i = 1, 2, \dots n)$$

hergeleitete Folgerung ist also nicht vollkommen allgemein, und es ist deshalb eine neue, für *alle Fälle* passende Formulirung des Resultates zu geben, deren Auseinandersetzung die folgende, mehr auf das Wesen der Sache eingehende Deduction gewidmet ist.

§. 3.

Es seien $\mathfrak{f}_{m+1}, \mathfrak{f}_{m+2}, \ldots \mathfrak{f}_n$ irgend welche eindeutige Functionen der n Variabeln x, jedoch, so dass die Functionaldeterminante der n Functionen:

$$f_1, \; f_2, \; \ldots \; f_m, \; \mathfrak{f}_{m+1}, \; \ldots \; \mathfrak{f}_n$$

nicht identisch verschwindet. Ferner sei für irgend ein specielles Werthsystem (ξ):

$$\mathfrak{f}_{m+1}(\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n) = \varphi_{m+1}, \quad \ldots, \quad \mathfrak{f}_n(\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n) = \varphi_n.$$

Ich führe nun — unter Beibehaltung der Variabeln $y_{m+1}, y_{m+2}, \ldots y_n$ — an Stelle der m Variabeln $y_1, y_2, \ldots y_m$ die durch folgende Gleichungen definirten Variabeln z ein:

$$f_1(z_1, z_2, \ldots z_n) = y_1, \quad f_2(z_1, z_2, \ldots z_n) = y_2, \quad \ldots \; f_m(z_1, z_2, \ldots z_n) = y_m;$$
$$\mathfrak{f}_{m+1}(z_1, z_2, \ldots z_n) = \varphi_{m+1}, \; \mathfrak{f}_{m+2}(z_1, z_2, \ldots z_n) = \varphi_{m+2}, \ldots \; \mathfrak{f}_n(z_1, z_2, \ldots z_n) = \varphi_n.$$

Die n Variabeln z vertreten wegen der zwischen ihnen bestehenden $(n-m)$ Gleichungen nur die Stelle von m unabhängigen Variabeln, und die Formel $(C.)$ des vorigen Paragraphen zeigt, dass das vollständige Differential von f_0 nur die Differentiale: dz, nicht aber die Differentiale:

$$dy_{m+1}, \quad dy_{m+2}, \quad \ldots \quad dy_n$$

enthält. Dieselbe Eigenschaft kommt also auch dem vollständigen Differentiale des Ausdrucks:

$$f_0(x_1, x_2, \ldots x_n) - f_0(z_1, z_2, \ldots z_n)$$

zu, welchen ich einstweilen mit f bezeichnen will. Diese Function f, welche gleich Null ist, sobald das System (x) mit einem System (z) zusammenfällt, bleibt demnach gleich Null, wenn man von einem solchen System (x) ausgehend zu einem andern System (x') übergeht und aber dabei die Werthe der m Functionen:

$$f_1(x_1, x_2, \ldots x_n), \quad f_2(x_1, x_2, \ldots x_n), \quad \ldots \quad f_m(x_1, x_2, \ldots x_n)$$

festhält. Da man nun ein beliebiges System (x) unter Festhaltung der Werthe der Functionen $f_1, f_2, \ldots f_m$ in ein System (z) stetig übergehen lassen kann,

d. h. in ein solches, für welches:

$$f_{m+1} = \varphi_{m+1}, \quad f_{m+2} = \varphi_{m+2}, \quad \ldots \quad f_n = \varphi_n$$

wird, so giebt es für jedes beliebige System (x) auch ein System (z), für welches die Gleichungen:

$$f_1(x_1, x_2, \ldots x_n) = f_1(z_1, z_2, \ldots z_n), \quad \ldots \quad f_m(x_1, x_2, \ldots x_n) = f_m(z_1, z_2, \ldots z_n)$$

und:

$$f_0(x_1, x_2, \ldots x_n) = f_0(z_1, z_2, \ldots z_n)$$

erfüllt sind. Der Zusammenhang, welcher zwischen den $(m+1)$ Functionen von n Variabeln x:

$$f_0(x_1, x_2, \ldots x_n), \quad f_1(x_1, x_2, \ldots x_n), \quad \ldots \quad f_m(x_1, x_2, \ldots x_n)$$

unter der Voraussetzung besteht, dass sämmtliche aus den $n(m+1)$ Ableitungen:

$$f_{0i}, \; f_{1i}, \; \ldots \; f_{mi} \qquad (i=1,2,\ldots n)$$

zu bildenden Determinanten $(m+1)^{\text{ster}}$ Ordnung verschwinden, lässt sich also vollständig dadurch charakterisiren, dass derselbe Zusammenhang bestehen bleibt, wenn man zwischen den n Variabeln x irgend welche $(n-m)$ Gleichungen, wie z. B.

$$f_{m+1}(x_1, x_2, \ldots x_n) = \varphi_{m+1}, \quad \ldots \quad f_n(x_1, x_2, \ldots x_n) = \varphi_n$$

festsetzt.

Die vorstehenden Erörterungen lassen sich für den Fall: $n=3$, $m=2$ geometrisch anschaulich machen. Wenn nämlich

$$\xi = f_0(x, y, z), \quad \eta = f_1(x, y, z), \quad \zeta = f_2(x, y, z)$$

gesetzt wird, so wird dadurch der Raum (ξ, η, ζ) auf den Raum (x, y, z) bezogen. Ist nun aber die Functionaldeterminante von (f_0, f_1, f_2) gleich Null, so erhält man — sämmtlichen Punkten (x, y, z) entsprechend — nicht den ganzen Raum (ξ, η, ζ), sondern nur eine Fläche darin, diese aber unendlich oft. Eben dieselbe Fläche erhält man aber schon, wenn man nur diejenigen Punkte (x, y, z) nimmt, zwischen deren Coordinaten eine beliebige Gleichung besteht, d. h. also wenn man nur die auf einer beliebigen Fläche liegenden Punkte (x, y, z) nimmt und die diesen entsprechenden Punkte (ξ, η, ζ) aufsucht.

III.

Während in den meisten Lehrbüchern der analytischen Geometrie zuvörderst die Punktcoordinaten und erst nachher die in der Gleichung der Ebene

vorkommenden Coefficienten als Ebenencoordinaten definirt werden, dürfte es angemessener erscheinen, von vorn herein — wie ich es in meinen Universitätsvorlesungen gethan habe — die beiden Arten von Coordinaten gleichzeitig einzuführen, geometrisch zu erläutern und damit zu einer zwiefachen Interpretation homogener Gleichungen mit vier Variabeln zu gelangen.

§. 1.

Wenn die vier Eckpunkte eines Tetraeders mit 1, 2, 3, 4 und die gegenüberliegenden Ebenen resp. mit I, II, III, IV bezeichnet werden, und wenn ferner:

$$(1\,\mathrm{V}),\quad (2\,\mathrm{V}),\quad (3\,\mathrm{V}),\quad (4\,\mathrm{V})$$

die kürzesten Abstände irgend einer Ebene: V von den vier Tetraederecken und:

$$(\mathrm{I}\,5),\quad (\mathrm{II}\,5),\quad (\mathrm{III}\,5),\quad (\mathrm{IV}\,5)$$

die kürzesten Abstände irgend eines Punktes: 5 von den vier Tetraederflächen bedeuten, so können die Quotienten:

$$\frac{(\mathrm{I}\,5)}{(\mathrm{I}\,1)},\quad \frac{(\mathrm{II}\,5)}{(\mathrm{II}\,2)},\quad \frac{(\mathrm{III}\,5)}{(\mathrm{III}\,3)},\quad \frac{(\mathrm{IV}\,5)}{(\mathrm{IV}\,4)}$$

die Punktcoordinaten des Punktes: 5 und ebenso die Quotienten:

$$\frac{(1\,\mathrm{V})}{(1\,\mathrm{I})},\quad \frac{(2\,\mathrm{V})}{(2\,\mathrm{II})},\quad \frac{(3\,\mathrm{V})}{(3\,\mathrm{III})},\quad \frac{(4\,\mathrm{V})}{(4\,\mathrm{IV})}$$

die Ebenencoordinaten der Ebene: V genannt werden. Die Vorzeichen der Abstände werden bestimmt, indem für jede Ebene eine positive und negative Seite unterschieden wird. *)

Da der Abstand eines variabeln Punktes: 5 von einer festen Ebene: V eine lineare homogene Function der vier Punktcoordinaten des Punktes: 5 sein muss, so hat man die Gleichung:

$$A_1\cdot\frac{(\mathrm{I}5)}{(\mathrm{I}1)}+A_2\cdot\frac{(\mathrm{II}5)}{(\mathrm{II}2)}+A_3\cdot\frac{(\mathrm{III}5)}{(\mathrm{III}3)}+A_4\cdot\frac{(\mathrm{IV}5)}{(\mathrm{IV}4)} = (\mathrm{V}\,5),$$

in welcher die Constanten: A am einfachsten dadurch bestimmt werden, dass

*) Man kann auch statt der obigen Quotienten die Abstände eines Punktes von den vier Tetraederflächen selbst als Coordinaten desselben einführen und dabei statt der kürzesten Abstände auch solche nehmen, welche in vier bestimmten Richtungen zu messen sind, ebenso können die in vier vorgeschriebenen Richtungen gemessenen Abstände einer Ebene von den vier Tetraederecken als Ebenencoordinaten erklärt werden; aber die obige Definition homogener Punkt- und Ebenen-Coordinaten ist für die folgenden Ausführungen bequemer.

man successive den Punkt: 5 mit den vier Tetraederecken zusammenfallen lässt. Auf diese Weise ergiebt sich die Fundamentalformel:

$$(\mathfrak{A}.)\qquad \frac{(\mathrm{I}5).(\mathrm{V}1)}{(\mathrm{I}1).(\mathrm{V}5)}+\frac{(\mathrm{II}5).(\mathrm{V}2)}{(\mathrm{II}2).(\mathrm{V}5)}+\frac{(\mathrm{III}5).(\mathrm{V}3)}{(\mathrm{III}3).(\mathrm{V}5)}+\frac{(\mathrm{IV}5).(\mathrm{V}4)}{(\mathrm{IV}4).(\mathrm{V}5)} = 1,$$

welche, wenn man die Coordinaten des Punktes: 5 resp. mit: u_0, u_1, u_2, u_3, die der Ebene V resp. mit: U_0, U_1, U_2, U_3 und die vier Tetraederhöhen mit: h_0, h_1, h_2, h_3 bezeichnet, in:

$$(\mathfrak{A}'.)\qquad \Sigma h_k u_k U_k = (\mathrm{V}5) \qquad (k=0,1,2,3)$$

übergeht. In dieser Gleichung wird, sobald der Punkt: 5 in der Ebene: V liegt, die rechte Seite gleich Null, und dieselbe stellt dann ebensowohl die Gleichung der Ebene: V in Punktcoordinaten als die Gleichung des Punktes: 5 in Ebenencoordinaten dar, während die Coefficienten, welche im ersteren Falle: hU und im letzteren: hu sind, ihre unmittelbare geometrische Bedeutung haben. — Lässt man in der Formel ($\mathfrak{A}$.) die Ebene: V ins Unendliche rücken, so erhält man die für die vier Coordinaten eines beliebigen Punktes bestehende, nicht homogene, lineare Relation:

$$(\mathfrak{B}.)\qquad \Sigma u_k = 1 \qquad (k=0,1,2,3).$$

Es besteht nun in analoger Weise für die vier Coordinaten einer beliebigen Ebene eine nicht homogene Gleichung zweiten Grades, zu deren Herleitung folgende Entwickelungen dienen mögen.

Wenn man die Fundamentalformel ($\mathfrak{A}$.) mit: (V5) multiplicirt, alsdann darin statt des Punktes: 5 einen andern Punkt: 6 substituirt und die beiden hierdurch entstehenden Formeln von einander subtrahirt, so erhält man vermöge der Gleichungen:

$$(\mathfrak{B}'.)\qquad (\mathrm{I}5)-(\mathrm{I}6)=(56).\cos(\mathrm{I\,VI}),\quad (\mathrm{II}5)-(\mathrm{II}6)=(56).\cos(\mathrm{II\,VI}),\quad \dots$$

die Relation:

$$(\mathfrak{C}.)\qquad \frac{(\mathrm{V}1)}{(\mathrm{I}1)}\cos(\mathrm{I\,VI})+\frac{(\mathrm{V}2)}{(\mathrm{II}2)}\cos(\mathrm{II\,VI})+\cdots+\frac{(\mathrm{V}4)}{(\mathrm{IV}4)}\cos(\mathrm{IV\,VI})=\cos(\mathrm{V\,VI}).$$

Hier bedeutet (56) den absoluten Werth der Entfernung der beiden eingeklammerten Punkte und: VI eine zu der Richtung (56) normale Ebene. Für die unter dem Zeichen: *cos* stehenden Winkel sind stets die „*inneren*“ Winkel zu nehmen, d. h. diejenigen, welche von der positiven Seite der einen Ebene mit der negativen der andern gebildet werden, und welche demnach den für das Product beider Ebenen negativen „inneren“ Raum ausfüllen. Bei der durch die Relationen ($\mathfrak{B}'$) eingeführten Ebene: VI ist die positive und negative

Seite gemäss einer dieser Relationen zu bestimmen, aber in der Gleichung ($\mathfrak{C}$.) kann man von diesem Ursprunge der Ebene VI abstrahiren und diese Ebene selbst so wie ihre positive und negative Seite ganz beliebig annehmen.

Bezeichnet man die vier Tetraederflächen mit: φ_0, φ_1, φ_2, φ_3, ferner die Ebenen: V und VI resp. mit f und $\mathfrak{f}$, so erhält die Gleichung ($\mathfrak{C}$.) folgende Gestalt:

$$(\mathfrak{C}'.) \qquad \sum_k U_k \cos(\mathfrak{f}\varphi_k) = \cos(\mathfrak{f}f) \qquad (k=0,1,2,3).$$

Wendet man diese Gleichung auf zwei parallele Ebenen f und f' an, zwischen deren Coordinaten: U, U' die Beziehungen:

$$\varphi_k(U_i - U_i') = \varphi_i(U_k - U_k') \qquad (i,k=0,1,2,3)$$

statthaben, so resultirt die speciellere Formel:

$$\sum_k \varphi_k \cos(\mathfrak{f}\varphi_k) = 0 \qquad (k=0,1,2,3).$$

Wird endlich in ($\mathfrak{C}'$.) für: $\mathfrak{f}$ successive: f, φ_0, φ_1, φ_2, φ_3 gesetzt, so kommt:

$$\Sigma U_k \cos(f\varphi_k) = 1, \quad \Sigma U_k \cos(\varphi_0\varphi_k) = \cos(f\varphi_0), \quad \ldots, \quad \Sigma U_k \cos(\varphi_3\varphi_k) = \cos(f\varphi_3),$$

und indem man in der ersten dieser fünf Gleichungen für: $\cos(f\varphi_k)$ die aus den vier folgenden Gleichungen entnommenen Werthe substituirt:

$$(\mathfrak{D}.) \qquad \Sigma U_i U_k \cos(\varphi_i\varphi_k) = 1 \qquad (i,k=0,1,2,3).$$

Diese für die Ebenencoordinaten U bestehende Relation lässt sich noch auf eine andere Form bringen. Legt man nämlich durch eine der vier Tetraederecken — z. B. durch den Punkt: 1 — eine mit f parallele Ebene, so sind deren Coordinaten:

$$U_k - \frac{\varphi_k}{\varphi_0} \cdot U_0 \qquad (k=0,1,2,3),$$

da nach den eingeführten Bezeichnungen: $h_i\varphi_i = h_k\varphi_k$ ist. Es kann also statt der Relation ($\mathfrak{D}$.) auch die folgende genommen werden:

$$\Sigma(\varphi_0 U_r - \varphi_r U_0)(\varphi_0 U_s - \varphi_s U_0)\cos(\varphi_r\varphi_s) = \varphi_0^2 \qquad (r,s=1,2,3),$$

welche auf die Tetraederebene: I selbst angewendet, deren Coordinaten: $U_0 = 1$, $U_1 = U_2 = U_3 = 0$ sind, die Formel:

$$\Sigma \varphi_r \varphi_s \cos(\varphi_r\varphi_s) = \varphi_0^2 \qquad (r,s=1,2,3)$$

ergiebt.

Die Relation ($\mathfrak{D}$.) hat auch ihre Bedeutung für die Darstellung der Kugel in Ebenencoordinaten. Sind nämlich: u_0, u_1, u_2, u_3 die Coordinaten des Mittelpunkts, so findet für die Coordinaten: U' jeder durch denselben

gehenden Ebene die Gleichung:

$$\Sigma h_k u_k U'_k = 0 \qquad (k=0,1,2,3)$$

statt, während die Coordinaten: U jeder Tangentialebene der Kugel mit dem Radius: R durch die Gleichungen:

$$h_k(U_k - U'_k) = R \qquad (k=0,1,2,3)$$

gegeben sind. Hiernach wird:

$$\Sigma h_k u_k U_k = R \qquad (k=0,1,2,3)$$

die Gleichung der Kugel in Ebenencoordinaten, welche nun mit Hülfe der Relation ($\mathfrak{D}$.) auf die erforderliche homogene Form zu bringen ist:

$$\Sigma h_i h_k u_i u_k U_i U_k = R^2 . \Sigma U_i U_k \cos(\varphi_i \varphi_k),$$

in welcher sämmtliche Summationen auf die Werthe: $i, k = 0, 1, 2, 3$ zu erstrecken sind.

§. 2.

Die im vorigen Paragraphen entwickelten Formeln finden ihre Anwendung bei den Ausführungen, welche im §. 15 Ihres Lehrbuchs enthalten sind. Wird der Kürze halber die aus den sechszehn Abständen von vier Ebenen (I, II, III, IV) und vier Punkten (5, 6, 7, 8) gebildete Determinante mit:

$$\begin{vmatrix} \text{I}, & \text{II}, & \text{III}, & \text{IV} \\ 5, & 6, & 7, & 8 \end{vmatrix}$$

bezeichnet, und setzt man in der oben im §. 1 aufgestellten Formel ($\mathfrak{A}$.) successive die Punkte: 6, 7, 8 an Stelle des Punktes: 5, so wie die Ebenen: VI, VII, VIII an Stelle der Ebene: V, so erhält man sechszehn Formeln, aus denen unmittelbar die folgende Determinanten-Gleichung resultirt:

$$(a.)\quad \begin{vmatrix} \text{I}, & \text{II}, & \text{III}, & \text{IV} \\ 5, & 6, & 7, & 8 \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} \text{V}, & \text{VI}, & \text{VII}, & \text{VIII} \\ 1, & 2, & 3, & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \text{I}, & \text{II}, & \text{III}, & \text{IV} \\ 1, & 2, & 3, & 4 \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} \text{V}, & \text{VI}, & \text{VII} & \text{VIII} \\ 5, & 6, & 7, & 8 \end{vmatrix},$$

worin übrigens:

$$\begin{vmatrix} \text{I}, & \text{II}, & \text{III}, & \text{IV} \\ 1, & 2, & 3, & 4 \end{vmatrix} = (\text{I}1).(\text{II}2).(\text{III}3).(\text{IV}4)$$

ist, weil die Punkte 1, 2, 3, 4 die vier Durchschnittspunkte der Ebenen I, II, III, IV sind. Nimmt man überdies die Punkte 5, 6, 7, 8 als die vier Durchschnittspunkte der Ebenen V, VI, VII, VIII, so kommt:

$$\begin{vmatrix} \text{I}, & \text{II}, & \text{III}, & \text{IV} \\ 5, & 6, & 7, & 8 \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} \text{V}, & \text{VI}, & \text{VII}, & \text{VIII} \\ 1, & 2, & 3, & 4 \end{vmatrix} = (\text{I}1)(\text{II}2)(\text{III}3)(\text{IV}4).(\text{V}5)(\text{VI}6)(\text{VII}7)(\text{VIII}8).$$

Wenn man aber die Ebenen V, VI, VII als rechtwinklige Coordinatenebenen annimmt und die Ebene VIII ins Unendliche rücken lässt, so erhält man aus (*a.*)

$$(b.)\qquad \begin{vmatrix} \mathrm{I}, & \mathrm{II}, & \mathrm{III}, & \mathrm{IV} \\ 5, & 6, & 7, & 8 \end{vmatrix} = \frac{(5678)}{(1234)}\cdot(\mathrm{I}1)(\mathrm{II}2)(\mathrm{III}3)(\mathrm{IV}4),$$

wo (1234) und (5678) resp. die Inhalte der aus den eingeklammerten Punkten gebildeten Tetraeder bedeuten. Da nun im §. 1 die Quotienten:

$$\frac{(\mathrm{I}5)}{(\mathrm{I}1)},\quad \frac{(\mathrm{II}5)}{(\mathrm{II}2)},\quad \frac{(\mathrm{III}5)}{(\mathrm{III}3)},\quad \frac{(\mathrm{IV}5)}{(\mathrm{IV}4)}$$

als die homogenen auf das Fundamental-Tetraeder (1234) bezogenen Coordinaten des Punktes: 5 bezeichnet worden sind, so besagt die Gleichung (*b.*), dass die aus den sechszehn homogenen Coordinaten der vier Punkte: 5, 6, 7, 8 gebildete Determinante dem Quotienten:

$$\frac{(5678)}{(1234)}$$

gleich ist, oder also, dass jene Determinante das Verhältniss des Tetraeder-Inhalts: (5678) zu dem Inhalte des Fundamental-Tetraeders: (1234) darstellt.

Wie in der Formel (*b.*) der Inhalt eines Tetraeders (5678) durch die Abstände der vier Eckpunkte von vier festen Ebenen: I, II, III, IV ausgedrückt erscheint, so lässt sich derselbe auch durch die Abstände der vier Seitenflächen von vier festen Punkten d. h., also auch durch deren Ebenen-Coordinaten einfach ausdrücken.

Die Formel ($\mathfrak{A}$.) des §. 1 lässt sich mit Hülfe der Relation ($\mathfrak{B}$.) auf folgende Gestalt bringen:

$$\frac{(\mathrm{I}5)}{(\mathrm{I}1)}((\mathrm{V}1)-(\mathrm{V}5))+\frac{(\mathrm{II}5)}{(\mathrm{II}2)}((\mathrm{V}2)-(\mathrm{V}5))+\frac{(\mathrm{III}5)}{(\mathrm{III}3)}((\mathrm{V}3)-(\mathrm{V}5))+\frac{(\mathrm{IV}5)}{(\mathrm{IV}4)}((\mathrm{V}4)-(\mathrm{V}5))=0.$$

Wenn man daher der Horizontalreihe:

$$(\mathrm{V}1)-(\mathrm{V}5),\quad (\mathrm{V}2)-(\mathrm{V}5),\quad (\mathrm{V}3)-(\mathrm{V}5),\quad (\mathrm{V}4)-(\mathrm{V}5)$$

drei fernere anfügt, in welchen resp. drei neue Ebenen: VI, VII, VIII an Stelle der Ebene: V getreten sind, so erhält man vier Reihen von je vier Elementen, deren Determinante identisch verschwindet. Lässt man den Punkt: 5 mit dem Durchschnittspunkte der Ebenen: VI, VII, VIII zusammenfallen, so besteht hiernach die Gleichung:

$$D = (\mathrm{V}5).D_1,$$

in welcher D die Determinante:

$$\begin{vmatrix} \mathrm{V}, & \mathrm{VI}, & \mathrm{VII}, & \mathrm{VIII} \\ 1, & 2, & 3, & 4 \end{vmatrix}$$

und D_1 diejenige Determinante bedeutet, welche aus: D entsteht, wenn man darin die erste Horizontalreihe:

$$(\mathrm{V}\,1),\quad (\mathrm{V}\,2),\quad (\mathrm{V}\,3),\quad (\mathrm{V}\,4)$$

durch die Reihe:

$$1,\quad 1,\quad 1,\quad 1$$

ersetzt. Wenn nun D_2, D_3, D_4 ganz analog definirt und die drei übrigen Eckpunkte des aus den Ebenen V, VI, VII, VIII gebildeten Tetraeders durch die Ziffern: 6, 7, 8 bezeichnet werden, so gelten die vier Relationen:

$$D = (\mathrm{V}\,5).D_1 = (\mathrm{VI}\,6).D_2 = (\mathrm{VII}\,7).D_3 = (\mathrm{VIII}\,8).D_4,$$

und da vermöge der Gleichung ($b.$):

$$(5678).D = (1234).(\mathrm{V}\,5)(\mathrm{VI}\,6)(\mathrm{VII}\,7)(\mathrm{VIII}\,8)$$

ist, so resultirt schliesslich die Formel:

$$(c.)\qquad (5678) = (1234)\cdot\frac{D^3}{D_1 D_2 D_3 D_4},$$

in welcher die Determinanten-Ausdrücke: D, D_1, D_2, D_3, D_4 nur die sechszehn Abstände der Ebenen: V, VI, VII, VIII von den Punkten: 1, 2, 3, 4 enthalten.

Die Determinanten-Ausdrücke D lassen sich auf eine übersichtlichere Form bringen, wenn man von einer Ecke des Fundamental-Tetraeders, z. B. vom Punkte (4.) ausgehend, die drei anliegenden Kanten:

$$(14) = x,\quad (24) = y,\quad (34) = z$$

und die Abstände von den Ebenen V, VI, VII, VIII:

$$(\mathrm{V}\,4) = p_1,\quad (\mathrm{VI}\,4) = p_2,\quad (\mathrm{VII}\,4) = p_3,\quad (\mathrm{VIII}\,4) = p_4$$

setzt. Alsdann gelten nämlich die Gleichungen:

$$(\mathrm{V}\,1)-(\mathrm{V}\,4) = x\cos(p_1 x),\quad (\mathrm{V}\,2)-(\mathrm{V}\,4) = y\cos(p_1 y),\quad (\mathrm{V}\,3)-(\mathrm{V}\,4) = z\cos(p_1 z),$$

so wie die analogen Gleichungen für die Ebenen: VI, VII, VIII. Hiernach wird:

$$\frac{D}{xyz} = \begin{vmatrix} \cos(p_1 x), & \cos(p_1 y), & \cos(p_1 z), & p_1 \\ \cos(p_2 x), & \cos(p_2 y), & \cos(p_2 z), & p_2 \\ \cos(p_3 x), & \cos(p_3 y), & \cos(p_3 z), & p_3 \\ \cos(p_4 x), & \cos(p_4 y), & \cos(p_4 z), & p_4 \end{vmatrix},$$

und wenn die Determinante rechts gleich R und: $\frac{\partial R}{\partial p_k} = R_k$ gesetzt wird, so

nimmt die Gleichung (c.) folgende Form an:

$$(c'.) \qquad (5678) = \frac{(1234)}{(14)(24)(34)} \cdot \frac{R^3}{R_1 R_2 R_3 R_4},$$

übereinstimmend mit dem pag. 185 Ihres Lehrbuchs entwickelten Resultat. Hierbei ist zu bemerken, dass die Determinanten-Ausdrücke (R) eine einfache geometrische Bedeutung haben, indem nach pag. 189 Ihres Buches:

$$R_1 = \sin(xyz).\sin(5'), \quad R_2 = \sin(xyz).\sin(6'), \quad R_3 = \sin(xyz).\sin(7'),$$
$$R_4 = \sin(xyz).\sin(8'),$$
$$R = \sin(xyz).(p_1 \sin(5') + p_2 \sin(6') + p_3 \sin(7') + p_4 \sin(8'))$$

wird, wenn man unter: 5', 6', 7', 8', die zu den vier Tetraeder-Ecken: 5, 6, 7, 8 polaren Ecken versteht. Die Formel (c'.) verwandelt sich hiernach in folgende:

$$(5678).\sin(5').\sin(6').\sin(7').\sin(8') = \tfrac{1}{6}(p_1 \sin(5') + p_2 \sin(6') + p_3 \sin(7') + p_4 \sin(8'))^3,$$

und lässt sich in dieser Gestalt unmittelbar verificiren, wenn man berücksichtigt, dass jeder der hier vorkommenden sinus der polaren Ecken gleich ist dem neunfachen Quadrat des Tetraeder-Inhalts dividirt durch das doppelte Product der drei an der entsprechenden Tetraeder-Ecke liegenden Seitenflächen.

§. 3.

Die im §. 1 entwickelten Gleichungen ($\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \mathfrak{D}$) lassen sich als Determinanten-Formeln auffassen und als solche verallgemeinern. Um diese allgemeineren Formeln elegant darstellen zu können, führe ich die folgenden dem Zwecke entsprechend gewählten Bezeichnungen ein:

$$|\xi_{ik}| = \Delta, \quad |x_{ik}| = D, \quad |\mathfrak{x}_{ik}| = \mathfrak{D},$$
$$\frac{\partial \Delta}{\partial \xi_{ik}} = \Delta_{ki}, \quad \frac{\partial D}{\partial x_{ik}} = D_{ki}, \quad \frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial \mathfrak{x}_{ik}} = \mathfrak{D}_{ki},$$
$$\sum_h x_{gh} \Delta_{hk} = \Delta_g^{(k)}, \quad \sum_i \xi_{ki} D_{ig} = D_g^{(k)},$$
$$\sum_r \Delta_{ri} \Delta_{rk} = \theta_{ik}^2, \quad \sum_r D_{rg}^2 = S_g^2, \quad \sum_r \mathfrak{D}_{rg}^2 = \mathfrak{S}_g^2.$$

Die Indices: g, h, i, k nehmen überall die Werthe: 0, 1, 2, ... n an, aber die in Beziehung auf den Index: r auszuführenden Summationen können auf irgend welche derselben ($n+1$) Werthe beschränkt werden. Hiernach bestehen die Gleichungen:

$$\sum_i \xi_{hi} \Delta_{ik} = \sum_i \Delta_{hi} \xi_{ik} = \delta_{hk} \Delta,$$

und die analogen für die mit lateinischen und deutschen Buchstaben bezeichneten Grössen. Ferner sind: $\varDelta_g^{(k)}$ und $D_g^{(k)}$ Determinanten, welche resp. aus den Determinanten $\varDelta$ und D entstehen, wenn man die Horizontalreihen:

$$\xi_{k0},\quad \xi_{k1},\quad \xi_{k2},\quad \ldots\quad \xi_{kn}$$
$$x_{g0},\quad x_{g1},\quad x_{g2},\quad \ldots\quad x_{gn}$$

mit einander vertauscht. Endlich ist zu bemerken, dass, wenn man dem Summationsbuchstaben: r die *sämmtlichen* Werthe von Null bis n beilegt, die Grössen θ_{ik} die Unterdeterminanten eines Systems werden, welches aus der Zusammensetzung des Systems (ξ_{ik}) mit sich selber entspringt. Denn das adjungirte System (γ_{ik}) eines aus den Systemen (a_{ik}) und (b_{ik}) zusammengesetzten Systems (c_{ik}) entsteht selbst durch Zusammensetzung zweier Systeme (α_{ik}) und (β_{ik}), welche resp. zu (a_{ik}) und (b_{ik}) adjungirt sind. Wird nämlich:

$$c_{hi} = \sum_g a_{ig} b_{hg},\quad \gamma_{ik} = \sum_l \alpha_{li}\beta_{lk} \qquad (g, h, i, k, l = 0, 1, 2, \ldots n)$$

gesetzt, so ergiebt sich unmittelbar die Richtigkeit der die adjungirten Elemente: (γ_{ik}) bestimmenden Formel:

$$\sum_i c_{hi}\gamma_{ik} = \delta_{hk}.|a_{gi}|.|b_{gh}|.$$

Mit Hülfe der eingeführten Bezeichnungen lässt sich die der Fundamental-Formel ($\mathfrak{A}$.) entsprechende allgemeinere Gleichung in folgender einfacher Weise darstellen:

$$(A.)\qquad \sum_k \varDelta_g^{(k)} D_g^{(k)} = \varDelta D.$$

Die Richtigkeit dieser Gleichung ergiebt sich unmittelbar, wenn man die Werthe von: $\varDelta_g^{(k)}$ und $D_g^{(k)}$ auf der linken Seite einsetzt. Denn man erhält auf diese Weise den Ausdruck:

$$\sum_{h,i,k} x_{gh}\xi_{ki}\varDelta_{hk}D_{ig} \quad \text{oder also:} \quad \varDelta.\sum_{h,i}\delta_{hi}x_{gh}D_{ig},$$

welcher vermöge der Bedeutung von: δ_{hi} sich auf:

$$\varDelta.\sum_i x_{gi}D_{ig},$$

d. h. also auf: $\varDelta D$ reducirt. Genau auf dieselbe Weise wird die Formel:

$$\sum_k \xi_{kh}\varDelta_g^{(k)} = x_{gh}.\varDelta$$

durch Substitution des Werthes von: $\varDelta_g^{(k)}$ verificirt. Diese Formel geht aber für: $h = 0$, wenn $x_{g0} = 1$ und für *jeden* Werth von: k auch: $\xi_{k0} = 1$ gesetzt wird, in die Gleichung:

$$(B.)\qquad \sum_k \varDelta_g^{(k)} = \varDelta$$

über, welche der obigen Formel ($\mathfrak{B}$.) entspricht.

Die der Relation ($\mathfrak{C}$.) analoge allgemeinere Gleichung:

$$(C.)\qquad \sum_k D_g^{(k)}.\sum_r \varDelta_{rk}\mathfrak{D}_{rg} = \varDelta.\sum_r D_{rg}\mathfrak{D}_{rg}$$

ist, wie die beiden vorhergehenden Formeln, durch blosse Substitution des Werthes von: $D_g^{(k)}$ zu verificiren. Die auf: r bezüglichen Summationen sind hierbei auf dieselben Werthe zu erstrecken, wie in den Summen, durch welche: θ, S, $\mathfrak{S}$ definirt wurden. Lässt man nun die in: $\mathfrak{D}_{rg}$ enthaltenen n Horizontalreihen der Grössen: $\mathfrak{x}$ mit den n Horizontalreihen der Grössen: ξ zusammenfallen, welche nach Ausschluss der Reihe: $\xi_{i0}, \xi_{i1}, \dots \xi_{in}$ verbleiben, so geht: $\mathfrak{D}_{rg}$ über in $\varDelta_{ri}$ und also die Formel (C.) in:

$$\sum_k \theta_{ik}^2 D_g^{(k)} = \varDelta.\sum_r \varDelta_{ri} D_{rg}.$$

Lässt man ferner die Grössen: $\mathfrak{x}$ mit den Grössen: x zusammenfallen, so verwandelt sich die Gleichung (C.) in:

$$\sum_i D_g^{(i)}.\sum_r \varDelta_{ri} D_{rg} = \varDelta.S_g^2.$$

Multiplicirt man diese Gleichung mit: $\varDelta$ und setzt auf der linken Seite derselben für die auf: r bezügliche Summe den Werth ein, welcher sich aus der vorhergehenden Gleichung ergiebt, so resultirt schliesslich die Formel:

$$(D.)\qquad \sum \theta_{ik}^2 D_g^{(i)} D_g^{(k)} = \varDelta^2 S_g^2,$$

welche der obigen Formel ($\mathfrak{D}$.) vollkommen entspricht.

§. 4.

Um die Analogie der im §. 3 entwickelten vier Formeln mit denen des §. 1 in Evidenz zu setzen, nehme ich sämmtliche Werthe von: ξ, x, $\mathfrak{x}$, deren zweiter Index Null ist, der positiven Einheit gleich und betrachte die je n übrigen Grössen: ξ, x, $\mathfrak{x}$, welche einen und denselben vorderen Index haben, als je einen Punkt einer $n$fachen Mannigfaltigkeit definirend. Durch n solcher Punkte ist eine ebene $(n-1)$fache Mannigfaltigkeit bestimmt; so durch die Punkte:

$$(\xi_{k1}, \xi_{k2}, \dots \xi_{kn}) \qquad (k=0,1,\dots i-1, i+1,\dots n)$$

eine $(n-1)$fache Mannigfaltigkeit von Punkten $(x_1, x_2, \dots x_n)$, welche durch die Gleichung:

$$\sum_k x_k \varDelta_{ki} = 0 \qquad (k=0,1,\dots n)$$

gegeben ist und mit: φ_i bezeichnet werden soll. Ebenso wird durch die Punkte:

$$(x_{r1}, x_{r2}, \dots x_{rn}) \qquad (r=1,2,\dots n)$$

eine Mannigfaltigkeit f und durch die Punkte:

$$(\mathfrak{x}_{r1}, \mathfrak{x}_{r2}, \dots \mathfrak{x}_{rn}) \qquad (r=1,2,\dots n)$$

eine Mannigfaltigkeit $\mathfrak{f}$ bestimmt. Wird ferner, um die geometrische Analogie festzuhalten, für irgend zwei durch die Gleichungen:

$$\Sigma c_r x_r = c_0, \qquad \Sigma c_r^2 = 1 \qquad (r=1,2,\dots n)$$

$$\Sigma c_r' x_r = c_0', \qquad \Sigma c_r'^2 = 1 \qquad (r=1,2,\dots n)$$

definirte $(n-1)$ fache ebene Mannigfaltigkeiten f und f' die Bezeichnung:

$$\Sigma c_r c_r' = \cos(ff')$$

eingeführt, so ist für $i, k = 0, 1, \dots n$:

$$\theta_{ii}\theta_{kk}.\cos(\varphi_i\varphi_k) = \theta_{ik}^2, \qquad S_0\mathfrak{S}_0.\cos(\mathfrak{f}f) = \sum_r D_{r0}\mathfrak{D}_{r0},$$

$$S_0\theta_{kk}.\cos(f\varphi_k) = \sum_r \Delta_{rk}D_{r0}, \qquad \mathfrak{S}_0\theta_{kk}.\cos(\mathfrak{f}\varphi_k) = \sum_r \Delta_{rk}\mathfrak{D}_{r0},$$

wo überall die Summationen auf: $r = 1, 2, \dots n$ zu erstrecken sind. Wenn nun endlich:

$$u_{0k} = \frac{\Delta_0^{(k)}}{\Delta}, \qquad U_{0k} = \frac{\theta_{kk}D_0^{(k)}}{\Delta S_0}$$

genommen wird, so können die $(n+1)$ Grössen u_{0k} als homogene Coordinaten eines Punktes $(x_{01}, x_{02}, \dots x_{0n})$ aufgefasst werden — die $(n+1)$ Punkte (ξ) als *fest* betrachtet — und ebenso die Grössen U als homogene Coordinaten der $(n-1)$fachen Mannigfaltigkeit f. Bei Einführung dieser Coordinaten u und U gehen die vier mit (A, B, C, D) bezeichneten Gleichungen des vorigen Paragraphen in folgende über:

$$\sum_{k=0}^{k=n} \frac{u_{0k}U_{0k}}{\theta_{kk}} = \frac{D}{\Delta S_0}, \qquad \sum_{k=0}^{k=n} u_{0k} = 1,$$

$$\sum_{k=0}^{k=n} U_{0k}\cos(\mathfrak{f}\varphi_k) = \cos(\mathfrak{f}f), \qquad \sum_{i=0}^{i=n}\sum_{k=0}^{k=n} U_{0i}U_{0k}\cos(\varphi_i\varphi_k) = 1,$$

welche mit den Formeln $(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \mathfrak{D})$ des §. 1 identisch werden, wenn man $n = 3$ nimmt und die Grössen ξ, x, $\mathfrak{x}$ als rechtwinklige Raumcoordinaten auffasst. — Führt man den Grössen u_{0k}, U_{0k} analog die Grössen u_{ik}, U_{ik} ein, so lässt sich durch dieselben — den Formeln des §. 2 entsprechend — das Verhältniss der Determinanten D und Δ ausdrücken, indem:

$$\frac{D}{\Delta} = |u_{ik}|, \qquad \frac{D}{\Delta} = \frac{V^n}{V_0 V_1 \dots V_n}$$

wird, wenn man für $i, k = 0, 1, \dots n$:

$$|U_{ik}| = V, \quad \sum_k \frac{\theta_{kk}}{\theta_{ii}} \cdot \frac{\partial V}{\partial U_{ik}} = V_i$$

setzt. Die erste jener beiden Formeln ergiebt sich unmittelbar aus der Bedeutung der Grössen u, während die zweite aus den Gleichungen:

$$\sum_k \frac{u_{gk}\,U_{hk}}{\theta_{kk}} = \delta_{gh}\cdot\frac{D}{\varDelta S_g},\quad \sum_k u_{gk} = 1 \qquad (g,h,k = 0,1,\ldots n)$$

herzuleiten ist; denn es folgt hieraus, dass für $g = 0, 1, \ldots n$ die $(n+1)$ Determinanten:

$$\left| U_{hk} - \delta_{gh}\cdot\frac{D\theta_{kk}}{\varDelta S_g}\right|$$

gleich Null werden, dass also nach den eingeführten Bezeichnungen für $g = 0, 1, \ldots n$ die Gleichungen:

$$\frac{V}{V_g} = \frac{D\theta_{gg}}{\varDelta S_g}$$

stattfinden, aus denen mit Berücksichtigung des Werthes der Determinante V nämlich:

$$|U_{ik}| = \frac{D^n}{\varDelta^n}\cdot\frac{\theta_{00}\,\theta_{11}\ldots\theta_{nn}}{S_0\,S_1\ldots S_n}$$

der oben angegebene Ausdruck von: $\frac{D}{\varDelta}$ resultirt.

Ueber die aus den Coordinaten von $(n+1)$ Punkten gebildeten Determinanten ist noch eine Bemerkung hinzuzufügen. Für die zu den Punkten (ξ) gehörige Determinante $\varDelta$ und deren Unterdeterminanten gelten vermöge der Gleichungen $\xi_{k0} = 1$ die Relationen:

$$\sum_k \varDelta_{hk} = \delta_{0h}\cdot\varDelta \qquad (h,k = 0,1,\ldots n).$$

Setzt man daher:

$$-\frac{1}{\varDelta}\sum_h x_h\varDelta_{hk} = \Phi_k(x_1, x_2, \ldots x_n) \qquad (h,k = 0,1\ldots n),$$

wo links $x_0 = 1$ zu nehmen ist, so hat man die beiden Gleichungen:

$$\sum_{k=0}^{k=n}\Phi_k = -1,\quad \sum_{k=0}^{k=n}\left(\Phi_k + \frac{\varDelta_{0k}}{\varDelta}\right) = 0,$$

von denen die erstere zeigt, dass für jeden Punkt (x) wenigstens eine der Functionen Φ negativ ist, während aus der letzteren hervorgeht, dass für unendlich entfernte Punkte (x) nicht sämmtliche Functionen Φ negativ sein können. Die Gesammtheit der Functionen Φ scheidet also, den $(2^{n+1}-1)$ zulässigen Zeichencombinationen entsprechend, eine gleiche Anzahl Gebiete aus der ganzen $n$fachen Mannigfaltigkeit aus, von denen nur *eines* keine unendlich entfernten Punkte enthält. Dieses eine Gebiet ist dadurch charakterisirt, dass für alle darin liegenden Punkte (x) die Werthe der sämmtlichen $(n+1)$

Functionen Φ negativ sind, und das über eben dasselbe endliche Gebiet erstreckte Integral:

$$\int dx_1 . dx_2 \dots dx_n,$$

multiplicirt mit dem Product: $1.2\dots n$ ist gleich Δ, d. h. also gleich der aus den Coordinaten der $(n+1)$ Punkte (ξ) gebildeten Determinante $|\xi_{ik}|$, welche deshalb füglich als „Inhaltsdeterminante" bezeichnet werden kann.

IV.

Sowohl die Sätze über Producte von Dreiecksflächen und Tetraedervolumen als die polygonometrischen Relationen, welche in den §§. 16 und 17 Ihres Lehrbuchs aufgestellt sind, lassen sich grossentheils aus gemeinschaftlicher Quelle systematisch herleiten, wenn man zuvörderst allgemeine Determinanten n^{ter} Ordnung behandelt und erst nachher zu denjenigen speciellen Determinanten übergeht, welche die Fläche des Dreiecks und das Volumen des Tetraeders ausdrücken.

Es seien x_{lk}, ξ_{lk} für $l = 0, 1, 2, \dots n$ und $k = 1, 2, \dots n$ je $n(n+1)$ Grössen, welche den Bedingungen:

$$\sum_k (x_{ik} - x_{0k})^2 = r^2, \qquad \sum_k (\xi_{ik} - \xi_{0k})^2 = \varrho^2 \qquad (i, k = 1, 2, \dots n)$$

genügen. Ferner seien die Grössen s_{lm} und c_{hi} durch die Gleichungen:

$$\sum_k (x_{lk} - \xi_{mk})^2 = s_{lm}^2, \qquad \sum_k (x_{hk} - \xi_{0k})(\xi_{ik} - x_{0k}) = s_{h0}\, s_{0i}\, c_{hi}$$

bestimmt, wobei — wie stets im Folgenden — die Indices l, m die Werthe 0, 1, 2, ... n und die Indices i, k nur die Werthe 1, 2, ... n annehmen sollen. Wenn nun die Determinante:

$$\begin{vmatrix} u, & 1, & 1, & \dots & 1 \\ 1, & s_{11}^2, & s_{12}^2, & \dots & s_{1n}^2 \\ 1, & s_{21}^2, & s_{22}^2, & \dots & s_{2n}^2 \\ \vdots & & & & \\ 1, & s_{n1}^2, & s_{n2}^2, & \dots & s_{nn}^2 \end{vmatrix}$$

mit: $D(u)$ bezeichnet wird, so lässt sich die durch Multiplication der aus den je n^2 Grössen $(x_{ik} - \xi_{0k})$ und $(\xi_{ik} - x_{0k})$ gebildeten Determinanten entstehende Gleichung:

$$(1.) \qquad |x_{ik} - \xi_{0k}| . |\xi_{ik} - x_{0k}| = |s_{i0} . s_{0k} . c_{ik}|$$

auf die Form bringen:

$$(2.)\qquad (-2)^n|x_{ik}-\xi_{0k}|.|\xi_{ik}-x_{0k}| = p.D\left(\frac{1}{p}\right),$$

wo zur Abkürzung: $r^2+\varrho^2-s_{00}^2=p$ gesetzt ist. Denn wenn man in der Determinante auf der rechten Seite die erste Vertikalreihe mit p multiplicirt und von jeder folgenden subtrahirt, so werden sämmtliche Glieder der ersten Horizontalreihe mit Ausnahme des ersten gleich Null, irgend eines der inneren Glieder aber verwandelt sich in:

$$s_{ik}^2-r^2-\varrho^2+s_{00}^2,\quad \text{also in:}\quad -2s_{i0}s_{0k}c_{ik}.$$

Da nun, wenn man kurzweg D für: $D(0)$ setzt:

$$D(u) = u.|s_{ik}^2|+D$$

wird, so resultirt die Hauptformel:

$$(2^*.)\qquad (-2)^n|x_{ik}-\xi_{0k}|.|\xi_{ik}-x_{0k}| = (r^2+\varrho^2-s_{00}^2).D+|s_{ik}^2|.$$

Setzt man $r=\varrho$ und $x_{0k}=\xi_{0k}=0$ für alle Indices k, ferner: $x_{ig}=x'_{ig}$, $\xi_{ig}=\xi'_{ig}$ für alle Indices i und für $g=1, 2, \ldots (n-1)$, endlich aber:

$$x_{in}=r+\frac{a_i}{r},\quad \xi_{in}=r+\frac{\alpha_i}{r},$$

so behalten die durch die Gleichungen:

$$\sum_g x_{ig}^2+2a_i+\frac{a_i^2}{r^2}=0,\quad \sum_g \xi_{ig}^2+2\alpha_i+\frac{\alpha_i^2}{r^2}=0$$

definirten Grössen a und α auch für ein unendlich grosses r noch endliche Werthe, die Differenzen: $(x_{in}-\xi_{in})$ verschwinden also für diesen Fall, und es wird demnach:

$$\sum_g (x'_{hg}-\xi'_{ig})^2 = s_{hi}^2 \qquad (g=1,2,\ldots n-1).$$

Andrerseits reduciren sich für $r=\infty$ die durch r dividirten Glieder der letzten Vertikalreihen in den Determinanten $|x_{ik}|$, $|\xi_{ik}|$ sämmtlich auf ***Eins***, und es ist also — wenn der Gleichförmigkeit wegen $x'_{in}=\xi'_{in}=1$ gesetzt wird — für $r=\infty$:

$$\frac{1}{r}.|x_{ik}|=|x'_{ik}|,\quad \frac{1}{r}.|\xi_{ik}|=|\xi'_{ik}|.$$

Die Hauptformel (2.) geht somit in folgende über:

$$(3.)\qquad -(-2)^{n-1}|x'_{ik}|.|\xi'_{ik}| = D,$$

deren Gültigkeit einzig und allein an die Bedingungen:

$$x'_{in}=\xi'_{in}=1,\quad s_{hi}^2=\sum_g (x'_{hg}-\xi'_{ig})^2$$

geknüpft ist.

Bei den vorstehenden Entwickelungen wurde aus der mit (2.) bezeichneten Formel die Gleichung (3.) als eine speziellere hergeleitet; aber man kann auch diese letztere Gleichung direct verificiren und alsdann durch Spezialisirung derselben zu der ersteren gelangen, so dass beide Formeln den gleichen Grad von Allgemeinheit haben. Um zuvörderst die Uebereinstimmung der linken Seite der Gleichung (3.) mit der Determinante D in Evidenz zu setzen, hat man nur die zweite Horizontalreihe derselben von jeder der folgenden zu subtrahiren und alsdann auch die zweite Vertikalreihe von jeder folgenden Vertikalreihe abzuziehen. Um ferner aus der Gleichung (3.) die Formel (2.) abzuleiten, hat man $(n+1)$ statt n und:

$$x'_{ik} = x_{ik}, \quad \xi'_{ik} = \xi_{ik}, \quad x'_{n+1,k} = \xi_{0k}, \quad \xi'_{n+1,k} = x_{0k}$$

für $i, k = 1, 2, \ldots n$ zu setzen. Hierdurch verwandelt sich die Formel (3.) in folgende:

$$-(-2)^n |x_{ik} - \xi_{0k}| \cdot |\xi_{ik} - x_{0k}| = \begin{vmatrix} 0, & 1, & \ldots & 1, & 1 \\ 1, & s_{11}^2, & \ldots & s_{1n}^2, & r^2 \\ \vdots & & & & \\ 1, & s_{n1}^2, & \ldots & s_{nn}^2, & r^2 \\ 1, & \varrho^2, & \ldots & \varrho^2, & s_{00}^2 \end{vmatrix},$$

und die Determinante auf der rechten Seite erhält dieselbe Form wie in der Gleichung (2.), nämlich:

$$-(r^2 + \varrho^2 - s_{00}^2) . D\left(\frac{1}{r^2 + \varrho^2 - s_{00}^2}\right),$$

wenn man von der ersten Horizontalreihe die durch: ϱ^2 dividirte letzte Horizontalreihe abzieht und alsdann die mit $(\varrho^2 - s_{00}^2)$ multiplicirte erste Vertikalreihe der letzten hinzufügt.

Führt man die Bedingung ein, dass die aus den Grössen x und ξ zusammengesetzten Ausdrücke: s_{ik}^2 ihrem Werthe nach mit denjenigen übereinstimmen, welche aus den Grössen x' und ξ' gebildet sind, so kann man in der Gleichung (2*.) für: D den Werth substituiren, welcher sich aus der Gleichung (3.) ergiebt. Aber man kann diese beiden Gleichungen auch nach vorheriger Spezialisation der ersteren mit einander combiniren. Werden nämlich x_{ln} und ξ_{ln} für sämmtliche $(n+1)$ Werthe des Index l gleich *Eins* angenommen, so verschwinden die beiden Determinanten auf der linken Seite der Gleichung (2*.), und es resultirt die speziellere Relation:

$$(4.)\qquad (r^2+\varrho^2-s_{00}^2)D+|s_{ik}^2| = 0.$$

Die hierin enthaltenen Grössen x_{ig}, ξ_{ig} $(i=1,2,\dots n;\ g=1,2,\dots,n-1)$ sind ganz beliebig; aus diesen sind die Grössen s_{ik} mittels der Gleichungen:

$$s_{ik}^2 = \sum_g (x_{ig}-\xi_{kg})^2 \qquad (g=1,2,\dots n-1)$$

zu bestimmen, die Grössen x_{0g}, ξ_{0g} aber durch die Bedingung, dass sowohl der Werth von $\sum_g (x_{ig}-x_{0g})^2$ als der von $\sum_g (\xi_{ig}-\xi_{0g})^2$ für die verschiedenen Indices i unverändert bleiben soll; diese Werthe sind resp. durch r^2 und ϱ^2 und endlich der Werth von $\sum_g (x_{0g}-\xi_{0g})^2$ durch s_{00} zu bezeichnen. Nimmt man nun zu den je $n(n-1)$ Grössen x_{ig}, ξ_{ig} noch je n Grössen x_{in}, ξ_{in} hinzu, deren Werth gleich Eins ist, so kann man in der Gleichung (4.) die Grösse D durch denjenigen Ausdruck ersetzen, welcher die linke Seite der Gleichung (3.) bildet, und man erhält alsdann die Formel:

$$(5.)\qquad (-2)^{n-1}(r^2+\varrho^2-s_{00}^2).|x_{ik}|.|\xi_{ik}| = |s_{ik}^2|.$$

Lässt man die Grössen x und ξ mit einander zusammenfallen, so gelten die spezielleren aus (3.) und (4.) hervorgehenden Formeln:

$$(6.)\qquad (-2)^{n-1}|x_{ik}|^2 = -D,\quad |s_{ik}^2| = -2r^2 D.$$

Wenn endlich in den Gleichungen (3.) und (5.) für sämmtliche Werthe von i die Grössen $x_{i,n-1}$ und $\xi_{i,n-1}$ gleich Null gesetzt werden, so erhält man die beiden Relationen:

$$(7.)\qquad D=0,\quad |s_{ik}^2|=0,$$

in denen die Elemente (s_{hi}^2) der beiden Determinanten durch die Gleichungen:

$$s_{hi}^2 = \sum_f (x_{hf}-\xi_{if})^2 \qquad (f=1,2,\dots n-2)$$

definirt sind. Dabei sind die Grössen x_{hf} und ξ_{hf} in der ersteren Relation ganz beliebig, während die letztere nur dann gilt, wenn sich Grössen x_{0f} und ξ_{0f} bestimmen lassen, für welche die beiden Ausdrücke:

$$\sum_f (x_{if}-x_{0f})^2,\qquad \sum_f (\xi_{if}-\xi_{0f})^2$$

constante, d. h. vom Index i unabhängige Werthe annehmen.

Die sämmtlichen hier entwickelten Relationen können geometrisch interpretirt werden, wenn man die drei ersten Grössen x und ξ jeder Horizontalreihe, d. h. also x_{l1}, x_{l2}, x_{l3} und ξ_{l1}, ξ_{l2}, ξ_{l3} für alle Werthe von l als irgend welche Raumcoordinaten auffasst und die übrigen Grössen x und ξ gleich Null

setzt. Ich werde mich aber darauf beschränken, die ersten drei Grössen x und ξ jeder Horizontalreihe als *rechtwinklige* Coordinaten zu betrachten. Alsdann repräsentiren die Grössen x_{l1}, x_{l2}, x_{l3} und ξ_{l1}, ξ_{l2}, ξ_{l3} für $l = 0, 1, 2, \ldots n$ zwei Gruppen von je $(n+1)$ Punkten im Raume: (x_l) und (ξ_l), und die Grössen s_{lm} bedeuten die Strecken, welche je einen Punkt (x) mit je einem Punkte (ξ) verbinden, während die Grössen c_{ik} die Cosinus der Winkel sind, welche die Strecken s_{i0} und s_{0k} mit einander bilden. Die je n Punkte (x_i) und (ξ_i) liegen auf Kugeloberflächen, deren Mittelpunkte resp. die Punkte (x_0) und (ξ_0) und deren Radien beziehungsweise r und ϱ sind; die Entfernung der beiden Mittelpunkte ist mit s_{00} bezeichnet. Wenn nun $n > 3$ angenommen wird, so verschwindet — vermöge der Festsetzung: $x_{l4} = \xi_{l4} = 0$ — die linke Seite der Gleichung (1.), und man erhält also für die Grössen c_{ik}, d. h. für die Cosinus der n^2 durch zwei Gruppen von je n Richtungen bestimmten Winkel die Relation:

$$|c_{ik}| = 0.$$

Wird aber $n = 3$ angenommen, so enthält die Gleichung (1.) eine Darstellung des Products der beiden Tetraeder-Volumen: (ξ_0, x_1, x_2, x_3), $(x_0, \xi_1, \xi_2, \xi_3)$ durch die je drei an den Ecken (ξ_0) und (x_0) anliegenden Kanten und durch die Cosinus der neun von diesen je drei Kanten mit einander gebildeten Winkel. Ebendasselbe Product der Rauminhalte jener beiden speziellen Tetraeder wird mittels der Formel (2*.) durch die Quadrate der Strecken dargestellt, welche die je vier Eckpunkte des einen mit denen des andern verbinden, da die Grössen r, ϱ, s_{00} resp. die Strecken $(x_i x_0)$, $(\xi_i \xi_0)$, $(x_0 \xi_0)$ bedeuten. Ferner aber liefert, wenn $n = 4$ gesetzt wird, die Gleichung (3.) das Product zweier *beliebiger* Tetraeder-Volumen durch die sechszehn Entfernungen ihrer beiderseitigen Eckpunkte ausgedrückt, und die Gleichung (5.) giebt eine Darstellung desselben Products durch eben diese sechszehn Entfernungen unter Hinzunahme der Grösse: $r^2 + \varrho^2 - s_{00}^2$, welche die Radien r und ϱ der den beiden Tetraedern umschriebenen Kugeln und die Entfernung s_{00} ihrer beiden Mittelpunkte enthält. Eben diese Grösse: $r^2 + \varrho^2 - s_{00}^2$ findet sich in der Gleichung (4.) in Form eines Quotienten zweier Determinanten dargestellt, deren Elemente die Quadrate der die beiderseitigen Tetraeder-Ecken verbindenden Strecken sind. Endlich können für $n = 4$ auch noch die beiden spezielleren Formeln (6.) geometrisch interpretirt werden, und zwar so, dass in der ersteren das Volumen eines beliebigen Tetraeders, in der letzteren aber der Radius der demselben umschriebenen Kugel durch die sechs Kanten

ausgedrückt erscheint. — Für die räumlich geometrische Deutung der mit (7.) bezeichneten Formeln ist $n > 4$ zu nehmen. Die erstere von beiden ist dann als eine Relation aufzufassen, welche zwischen den n^2 Entfernungen zweier Gruppen von je n beliebigen Punkten besteht, und welche die *Carnot*sche Relation für fünf Punkte im Raum als speziellen Fall enthält, die letztere der beiden Formeln aber liefert eine Gleichung zwischen denselben n^2 Entfernungen unter der besonderen Voraussetzung, dass die n Punkte jeder Gruppe auf einer Kugeloberfläche liegen.

Berlin, im November 1869.

Algebraische Untersuchungen aus der Theorie der elliptischen Functionen.

(Von Herrn *Koenigsberger* in Heidelberg.)

Ausser den Modulargleichungen liefert die Transformationstheorie der elliptischen Functionen noch eine Reihe anderer Gleichungen, welche für zahlentheoretische und algebraische Untersuchungen von derselben Wichtigkeit, und deren genaue Kenntniss vor allen Dingen zur Bestimmung der Integralmoduln der complexen Multiplication erforderlich ist; es sind dies die Gleichungen für das Product des transformirten Moduls in dessen complementären und die für die Multiplicatoren der Transformation. Für beide Gattungen von Gleichungen hat Herr *Joubert* zwei Eigenschaften, die sich auf die Vertauschung des Integralmoduls beziehen, mitgetheilt, sowie die Formen für den Fall der Transformation dritten, fünften und siebenten Grades aufgestellt und Herr *Hermite* diejenigen für die Transformation dritten Grades zur Auflösung der Gleichungen vierten Grades mit Hülfe der elliptischen Functionen benutzt *). Ich beabsichtige im Nachfolgenden die allgemeine Theorie dieser Gleichungen zu entwickeln, so wie ich es für die Modulargleichungen in meiner Arbeit über die Transformation der elliptischen Functionen gethan **) und will zu dem Zwecke im ersten Paragraphen kurz die dort gebrauchten Bezeichnungen sowie einen Theil der erhaltenen Resultate zusammenstellen, die ich den folgenden Untersuchungen zu Grunde lege.

---

*) *Joubert,* sur diverses équations analogues aux équations modulaires dans la théorie des fonctions elliptiques, comptes rendus 47.
Hermite, sur la résolution de l'équation du quatrième degré.
Hermite, sur quelques théorèmes d'algèbre et la résolution de l'équation du quatrième degré.

**) Die Transformation, die Multiplication und die Modulargleichungen der elliptischen Functionen (*Teubner* 1868); ich werde in der vorliegenden Arbeit die genannte Schrift kurz mit „Transf." bezeichnen.

Erster Abschnitt.

§. 1.

Zusammenstellung der Transformationsformeln für einen unpaaren Transformationsgrad.

Die für die rationale Lösung der Differentialgleichung

$$(1.)\quad \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-c^2x^2)}} = \frac{a.dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}}$$

nothwendigen Bedingungen zwischen den Perioden

$$(2.)\quad \begin{cases} C = a_0 aK + a_1 aiK', \\ iC' = b_0 aK + b_1 aiK', \end{cases}$$

welche für die Moduln der zugehörigen ϑ-Functionen in die folgenden übergehen

$$(3.)\quad \tau = \frac{b_0 + b_1\tau'}{a_0 + a_1\tau'} \quad \text{oder} \quad \tau' = \frac{b_0 - a_0\tau}{a_1\tau - b_1},$$

sind auch, wenn

$$(4.)\quad a_0 b_1 - a_1 b_0 = n$$

eine positive ganze Zahl ist, die hinreichenden; n wird der Grad der Transformation und eine zu $n = 1$ gehörige Transformation eine lineare genannt.

Sei nun ein bestimmtes System von Transformationszahlen gegeben, welches zum Grade n gehört, so sollen alle diejenigen Systeme, welche durch Anwendung sämmtlicher linearen Transformationen aus diesem entstehen, mit dem ersten zu einer *Klasse* gehören; die Anzahl der in einer Klasse liegenden Zahlensysteme ist dann unendlich gross, die Anzahl der Klassen eine endliche, und als Repräsentanten der nicht äquivalenten Klassen sollen für ungradzahlige n die nach dem Schema

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 \\ b_0 & b_1 \end{vmatrix}$$

gebildeten Zahlensysteme

$$\begin{vmatrix} t & 0 \\ 16\xi & t' \end{vmatrix}$$

eintreten, deren es in jeder Klasse nur eins giebt, wenn t einen jeden positiven Theiler von n vorstellt, $t' = \frac{n}{t}$ ist, und ξ der Reihe nach die Werthe $0, 1, 2, \dots t'-1$ beigelegt werden, so dass die Repräsentanten der nicht

äquivalenten Klassen für einen Primzahlgrad der Transformation durch die Schemata dargestellt werden:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & n \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 16.1 & n \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 16.2 & n \end{vmatrix} \cdots\cdots \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 16(n-1) & n \end{vmatrix} \begin{vmatrix} n & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Für die Lösung des allgemeinen Transformationsproblems ist es daher nur nöthig, diejenigen Transformationen zu entwickeln, deren Transformationszahlen durch die Repräsentanten der nicht äquivalenten Klassen bestimmt sind, indem jede andere zu demselben Grade gehörige durch eine lineare Transformation aus einem dieser Repräsentanten hergeleitet werden kann.

Ich stelle nunmehr die linearen Transformationsformeln zusammen, deren es je nach den Resten, welche die Transformationszahlen nach dem Modul 2 lassen, sechs wesentlich von einander verschiedene giebt, indem ich mich der von Herrn *Hermite* gebrauchten Bezeichnungen bediene.

Setzt man nämlich:

$$(5.)\quad \varphi(\tau) = \sqrt[4]{c} = \sqrt{2}\,.\,q^{\frac{1}{8}}.\frac{(1+q^2)(1+q^4)(1+q^6)\ldots}{(1+q)(1+q^3)(1+q^5)\ldots} = \sqrt{2}\,.\,q^{\frac{1}{8}}\{(1+q^2)(1+q^4)\ldots\}^2(1-q)(1-q^3)\ldots,$$

$$(6.)\quad \psi(\tau) = \sqrt[4]{c_1} = \frac{(1-q)(1-q^3)(1-q^5)\ldots}{(1+q)(1+q^3)(1+q^5)\ldots} = \{(1+q^2)(1+q^4)\ldots\}\,\{(1-q)(1-q^3)\ldots\}^2,$$

so ergeben sich die nachfolgenden Formeln:

(7.) I. $a_0 \equiv 1,\ a_1 \equiv 0,\ b_0 \equiv 0,\ b_1 \equiv 1 \quad (\text{mod. } 2)$

$$y = e^{\frac{i\pi}{2}(a_0-1)}x, \qquad \sqrt{1-y^2} = \sqrt{1-x^2},$$

$$\sqrt{1-k^2y^2} = \sqrt{1-c^2x^2},$$

$$\sqrt{k} = e^{\frac{-i\pi a_0 b_0}{4}}\sqrt{c}, \qquad \sqrt{k_1} = e^{\frac{i\pi a_0 a_1}{4}}\sqrt{c_1}.$$

$$\varphi\left(\frac{b_0 - a_0\tau}{a_1\tau - b_1}\right) = \varphi(\tau)\,e^{-\frac{i\pi}{8}a_0 b_0}\left(\frac{2}{a_0}\right).$$

II. $a_0 \equiv 0,\ a_1 \equiv 1,\ b_0 \equiv 1,\ b_1 \equiv 0 \quad (\text{mod. } 2)$

$$y = e^{\frac{i\pi}{2}(a_0+b_0-2)}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad \sqrt{1-y^2} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$\sqrt{1-k^2y^2} = \frac{\sqrt{1-c^2x^2}}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$\sqrt{k} = e^{\frac{-i\pi a_0 a_1}{4}}\sqrt{c_1}, \qquad \sqrt{k_1} = e^{\frac{-i\pi}{4}(a_0 a_1 + a_0 b_0 + a_1 b_1)}\sqrt{c},$$

$$\varphi\left(\frac{b_0 - a_0\tau}{a_1\tau - b_1}\right) = \psi(\tau)\,e^{\frac{i\pi}{8}a_0 b_0}\left(\frac{2}{b_0}\right).$$

III. $a_0 \equiv 1,\ a_1 \equiv 1,\ b_0 \equiv 0,\ b_1 \equiv 1 \pmod{2}$

$$y = e^{\frac{-i\pi}{2}(a_0 b_0 + a_0 - 1)} cx, \quad \sqrt{1-y^2} = \sqrt{1-c^2x^2},$$

$$\sqrt{1-k^2y^2} = \sqrt{1-x^2},$$

$$\sqrt{k} = e^{\frac{i\pi a_0 b_0}{4}} \frac{1}{\sqrt{c}}, \quad \sqrt{k_1} = e^{\frac{i\pi}{4}(a_1+b_0)a_0} \frac{\sqrt{c_1}}{\sqrt{c}},$$

$$\varphi\left(\frac{b_0 - a_0\tau}{a_1\tau - b_1}\right) = \frac{1}{\varphi(\tau)} e^{\frac{i\pi}{8}a_0 b_0}\left(\frac{2}{a_0}\right).$$

IV. $a_0 \equiv 1,\ a_1 \equiv 1,\ b_0 \equiv 1,\ b_1 \equiv 0 \pmod{2}$

$$y = e^{\frac{-i\pi}{2}(a_0 b_0 + a_0 - 1)} \frac{cx}{\sqrt{1-c^2x^2}}, \quad \sqrt{1-y^2} = \frac{1}{\sqrt{1-c^2x^2}},$$

$$\sqrt{1-k^2y^2} = \frac{\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-c^2x^2}},$$

$$\sqrt{k} = e^{\frac{i\pi a_0 b_0}{4}} \frac{\sqrt{c_1}}{\sqrt{c}}, \quad \sqrt{k_1} = e^{\frac{i\pi}{4}(a_1+b_0)a_0} \frac{1}{\sqrt{c}},$$

$$\varphi\left(\frac{b_0 - a_0\tau}{a_1\tau - b_1}\right) = \frac{\psi(\tau)}{\varphi(\tau)} e^{\frac{i\pi}{8}a_0 b_0}.$$

V. $a_0 \equiv 1,\ a_1 \equiv 0,\ b_0 \equiv 1,\ b_1 \equiv 1 \pmod{2}$

$$y = e^{\frac{-i\pi}{2}(a_0 - 1)} \frac{c_1 x}{\sqrt{1-c^2x^2}}, \quad \sqrt{1-y^2} = \frac{\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-c^2x^2}},$$

$$\sqrt{1-k^2y^2} = \frac{1}{\sqrt{1-c^2x^2}},$$

$$\sqrt{k} = e^{\frac{-i\pi a_0 b_0}{4}} \frac{\sqrt{c}}{\sqrt{c_1}}, \quad \sqrt{k_1} = e^{\frac{i\pi a_0 a_1}{4}} \frac{1}{\sqrt{c_1}},$$

$$\varphi\left(\frac{b_0 - a_0\tau}{a_1\tau - b_1}\right) = \frac{\varphi(\tau)}{\psi(\tau)} e^{\frac{-i\pi}{8}a_0 b_0}.$$

VI. $a_0 \equiv 0,\ a_1 \equiv 1,\ b_0 \equiv 1,\ b_1 \equiv 1 \pmod{2}$

$$y = e^{\frac{-i\pi}{2}(a_0 b_1 - a_0 a_1 - a_0 - b_0 + 2)} \frac{c_1 x}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \sqrt{1-y^2} = \frac{\sqrt{1-c^2x^2}}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$\sqrt{1-k^2y^2} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$\sqrt{k} = e^{\frac{-i\pi a_0 a_1}{4}} \frac{1}{\sqrt{c_1}}, \quad \sqrt{k_1} = e^{\frac{-i\pi}{4}(a_0 a_1 + a_0 b_0 + a_1 b_1 - 2a_0 b_1)} \frac{\sqrt{c}}{\sqrt{c_1}},$$

$$\varphi\left(\frac{b_0 - a_0\tau}{a_1\tau - b_1}\right) = \frac{1}{\psi(\tau)} e^{\frac{-i\pi}{8}a_0 b_0}\left(\frac{2}{b_0}\right).$$

Sei nun n eine beliebige ungerade Zahl, den Fall jedoch ausgeschlossen *), dass die vier Transformationszahlen einen gemeinsamen Theiler haben, so mag, wenn zwei Zahlen p und q so bestimmt worden, dass

$$pa_1 - qa_0,\quad pb_1 - qb_0$$

relativ prime Zahlen sind,

$$(8.)\qquad \omega = pb_1 - qb_0 - (pa_1 - qa_0)\tau,$$

oder wenn n eine Primzahl ist, für die Repräsentanten der n ersten nicht äquivalenten Klassen

$$\omega = \tau - 16\xi,$$

für den der letzten Klasse $\omega = 1$ gesetzt werden; dann ergeben sich die nachfolgenden Transformationsformeln, in denen m eine beliebige zu n relativ prime Zahl bedeutet und $2C\omega = \varpi$ gesetzt ist:

$$(9.)\qquad y = \frac{x}{a}\,\frac{\left\{1 - \frac{x^2}{sn^2\left(\frac{m\varpi}{n}\right)}\right\}\left\{1 - \frac{x^2}{sn^2\left(\frac{2m\varpi}{n}\right)}\right\}\cdots\left\{1 - \frac{x^2}{sn^2\left(\frac{n-1}{2}\cdot\frac{m\varpi}{n}\right)}\right\}}{\left\{1 - c^2x^2sn^2\left(\frac{m\varpi}{n}\right)\right\}\left\{1 - c^2x^2sn^2\left(\frac{2m\varpi}{n}\right)\right\}\cdots\left\{1 - c^2x^2sn^2\left(\frac{n-1}{2}\cdot\frac{m\varpi}{n}\right)\right\}},$$

$$(10.)\qquad \sqrt{1-y^2} = \sqrt{1-x^2}\,\frac{\left\{1 - \frac{x^2}{snc^2\left(\frac{m\varpi}{n}\right)}\right\}\left\{1 - \frac{x^2}{snc^2\left(\frac{2m\varpi}{n}\right)}\right\}\cdots\left\{1 - \frac{x^2}{snc^2\left(\frac{n-1}{2}\cdot\frac{m\varpi}{n}\right)}\right\}}{\left\{1 - c^2x^2sn^2\left(\frac{m\varpi}{n}\right)\right\}\left\{1 - c^2x^2sn^2\left(\frac{2m\varpi}{n}\right)\right\}\cdots\left\{1 - c^2x^2sn^2\left(\frac{n-1}{2}\cdot\frac{m\varpi}{n}\right)\right\}},$$

$$(11.)\qquad \sqrt{1-k^2y^2} = \sqrt{1-c^2x^2}\,\frac{\left\{1 - c^2x^2snc^2\left(\frac{m\varpi}{n}\right)\right\}\left\{1 - c^2x^2snc^2\left(\frac{2m\varpi}{n}\right)\right\}\cdots\left\{1 - c^2x^2snc^2\left(\frac{n-1}{2}\cdot\frac{m\varpi}{n}\right)\right\}}{\left\{1 - c^2x^2sn^2\left(\frac{m\varpi}{n}\right)\right\}\left\{1 - c^2x^2sn^2\left(\frac{2m\varpi}{n}\right)\right\}\cdots\left\{1 - c^2x^2sn^2\left(\frac{n-1}{2}\cdot\frac{m\varpi}{n}\right)\right\}},$$

$$(12.)\qquad \sqrt{k} = (\sqrt{c})^n\left\{snc\left(\frac{m\varpi}{n}\right)snc\left(\frac{2m\varpi}{n}\right)\cdots snc\left(\frac{n-1}{2}\cdot\frac{m\varpi}{n}\right)\right\}^2,$$

$$(13.)\qquad \sqrt{k'} = \frac{(\sqrt{c_1})^n}{\left\{dn\left(\frac{m\varpi}{n}\right)dn\left(\frac{2m\varpi}{n}\right)\cdots dn\left(\frac{n-1}{2}\cdot\frac{m\varpi}{n}\right)\right\}^2},$$

$$(14.)\qquad a = (-1)^{\frac{n-1}{2}}\left\{\frac{snc\left(\frac{m\varpi}{n}\right)snc\left(\frac{2m\varpi}{n}\right)\cdots snc\left(\frac{n-1}{2}\cdot\frac{m\varpi}{n}\right)}{sn\left(\frac{m\varpi}{n}\right)sn\left(\frac{2m\varpi}{n}\right)\cdots sn\left(\frac{n-1}{2}\cdot\frac{m\varpi}{n}\right)}\right\}^2.$$

*) Die Ausschliessung dieses Falles ist keine Beschränkung der Allgemeinheit, da die Behandlung desselben mit Hülfe der obigen Ausdrücke und des Multiplicationsproblems unmittelbar ermöglicht ist.

Endlich sind, wenn

$$\sqrt[4]{k} = v, \qquad \sqrt[4]{c} = u,$$

$$n = \nu_1 \nu_2 \ldots \nu_\varrho$$

und

$$\nu = (\nu_1+1)(\nu_2+1) \;.\;.\;.\;.\;. \; (\nu_\varrho+1)$$

gesetzt wird, die durch den Ausdruck:

$$(15.) \qquad v = u^n\, snc\left(\frac{2\varpi}{n}\right) snc\left(\frac{4\varpi}{n}\right) \ldots snc\left(\frac{(n-1)\varpi}{n}\right) = \left(\frac{2}{t}\right)\varphi\left(\frac{t\tau - 16\xi}{t'}\right)$$

dargestellten Werthe die Lösungen einer irreductibeln Gleichung ν^{ten} Grades (der Modulargleichung) von der Form

$$(16.) \quad v^\nu + v^{\nu-1} u^{m_1}(a_0 + a_1 u^8 + a_2 u^{16} + \cdots) + v^{\nu-2} u^{m_2}(b_0 + b_1 u^8 + b_2 u^{16} + \cdots) + \cdots \pm u^\nu = 0,$$

in welcher

$$(17.) \quad \begin{cases} m_1 + n(\nu-1) \equiv \nu & (\text{mod. } 8) \\ m_2 + n(\nu-2) \equiv \nu & (\text{mod. } 8) \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & \\ m_{\nu-1} + n.1 \quad \equiv \nu & (\text{mod. } 8)\;^{*}), \end{cases}$$

die höchste Potenz von u die ν^{te} ist und deren wesentlichste Eigenschaften darin bestehen, dass

1) dieselbe unverändert bleibt, wenn v statt u und $\left(\frac{2}{n}\right)u$ statt v gesetzt wird,

2) wenn $\frac{1}{u}$ statt u gesetzt wird, jede der Lösungen der Modulargleichung in einen Ausdruck von der Form

$$\frac{1}{\left(\frac{2}{s}\right)\varphi\left(\frac{s\tau - 16x}{s'}\right)}$$

d. h. in den reciproken Werth einer andern Wurzel der Modulargleichung übergeht, und

3) wenn u in $u_1 = \sqrt[4]{c_1}$ verwandelt wird, diese Lösungen in

$$\left(\frac{2}{s'}\right)\psi\left(\frac{s\tau - 16x}{s'}\right),$$

d. h. bis auf das Zeichen in die ψ-Function für einen andern Repräsentanten der nicht äquivalenten Klassen übergeführt werden **).

---

*) Zur Ergänzung dieser Exponentenbestimmung verweise ich auf den Paragraphen der vorliegenden Arbeit, der von der Bildung der (V, U)-Gleichung handelt.

**) In Betreff der Bestimmung der s, s', x, sowie der Bedeutung dieser Sätze überhaupt muss ich auf die oben genannte Schrift: „Transf." verweisen.

Zweiter Abschnitt.

Die Theorie der Gleichungen zwischen $\sqrt[4]{kk_1}$ und $\sqrt[4]{cc_1}$.

§. 2.

Werthbestimmung der χ-Function für die lineare Transformation.

Bekanntlich ist *)

$$(1.)\qquad \sqrt{cc_1} = \frac{2\sqrt[4]{q}}{\{(1+q)(1+q^3)(1+q^5)\ldots\}^6} = 2\sqrt[4]{q}\{(1-q)(1+q^2)(1-q^3)(1+q^4)\ldots\}^6$$

und daher einer der Werthe von $\sqrt[4]{cc_1}$ durch den Ausdruck gegeben:

$$(2.)\qquad \sqrt[4]{cc_1} = \sqrt{2}\,.\,q^{\frac{1}{8}}.\{(1-q)(1+q^2)(1-q^3)(1+q^4)\ldots\}^3.$$

Wird nun dieser Werth von $\sqrt[4]{cc_1}$ mit $\chi(\tau)$ bezeichnet **), so dass

$$(3.)\qquad \chi(\tau) = \sqrt{2}\,.\,q^{\frac{1}{8}}\{(1-q)(1+q^2)(1-q^3)(1+q^4)\ldots\}^3$$

ist, so sieht man aus den Formeln (5.) und (6.) des § 1, dass

$$(4.)\qquad \chi(\tau) = \varphi(\tau).\psi(\tau),$$

und es wird sich vor Allem darum handeln, für diese Function die linearen Transformationsausdrücke zu entwickeln.

Nun ist aber, da

$$\varphi\left(-\frac{1}{\tau}\right) = \psi(\tau),\quad \psi\left(-\frac{1}{\tau}\right) = \varphi(\tau),$$

$$\varphi(\tau+1) = e^{\frac{i\pi}{8}}\frac{\varphi(\tau)}{\psi(\tau)},\quad \psi(\tau+1) = \frac{1}{\psi(\tau)}\ ^{***}),$$

wie unmittelbar zu sehen,

$$(5.)\qquad \chi(\tau+1) = e^{\frac{i\pi}{8}}\frac{\chi(\tau)}{\psi(\tau)^3} = e^{\frac{i\pi}{8}}\frac{\varphi(\tau)^3}{\chi(\tau)^2},$$

$$(6.)\qquad \chi\left(-\frac{1}{\tau}\right) = \chi(\tau),$$

---

*) s. *Jacobi,* fundamenta. S. 89, Gl. 4.

**) Ich will bemerken, dass Herr *Hermite* in der oben citirten Arbeit „sur la résolution de l'équation du quatrième degré" mit $\chi(\tau)$ die dritte Wurzel aus dem Product $\varphi(\tau).\psi(\tau)$ bezeichnet hat, welche sich in Beziehung auf τ als der vollständig bestimmte Ausdruck:

$$\sqrt[6]{2}.q^{\frac{1}{24}}(1-q)(1+q^2)(1-q^3)(1+q^4)\ldots$$

ergiebt; es finden sich auch dort die Resultate der linearen Transformation für die so definirte χ-Function.

***) s. Transf. §. 11.

und hieraus ergeben sich für die sechs Fälle der linearen Transformation die folgenden Beziehungen *):

I. $a_0 \equiv 1, \quad a_1 \equiv 0, \quad b_0 \equiv 0, \quad b_1 \equiv 1 \qquad (\text{mod. } 2)$

$$\chi\left(\frac{b_0 - a_0\tau}{a_1\tau - b_1}\right) = \chi(\tau)\left(\frac{2}{a_0 b_1}\right)e^{-\frac{i\pi}{8}(a_0 b_0 - a_1 b_1)},$$

II. $a_0 \equiv 0, \quad a_1 \equiv 1, \quad b_0 \equiv 1, \quad b_1 \equiv 0 \qquad (\text{mod. } 2)$

$$\chi\left(\frac{b_0 - a_0\tau}{a_1\tau - b_1}\right) = \chi(\tau)\left(\frac{2}{a_1 b_0}\right)e^{\frac{i\pi}{8}(a_0 b_0 - a_1 b_1)},$$

III. $a_0 \equiv 1, \quad a_1 \equiv 1, \quad b_0 \equiv 0, \quad b_1 \equiv 1 \qquad (\text{mod. } 2)$

$$\chi\left(\frac{b_0 - a_0\tau}{a_1\tau - b_1}\right) = \frac{\chi(\tau)}{\varphi(\tau)^3}\left(\frac{2}{a_0}\right)e^{\frac{i\pi}{8}(a_1 b_1 + a_0 b_0)},$$

IV. $a_0 \equiv 1, \quad a_1 \equiv 1, \quad b_0 \equiv 1, \quad b_1 \equiv 0 \qquad (\text{mod. } 2)$

$$\chi\left(\frac{b_0 - a_0\tau}{a_1\tau - b_1}\right) = +\frac{\chi(\tau)}{\varphi(\tau)^3}\left(\frac{2}{a_1}\right)e^{\frac{i\pi}{8}(a_1 b_1 + a_0 b_0)},$$

V. $a_1 \equiv 1, \quad a_1 \equiv 0, \quad b_0 \equiv 1, \quad b_1 \equiv 1 \qquad (\text{mod. } 2)$

$$\chi\left(\frac{b_0 - a_0\tau}{a_1\tau - b_1}\right) = +\frac{\chi(\tau)}{\psi(\tau)^3}\left(\frac{2}{b_1}\right)e^{-\frac{i\pi}{8}(a_1 b_1 + a_0 b_0)},$$

---

*) Ich will an der ersten dieser Formeln zeigen, wie dieselben auch aus den Formeln (7.) des §. 1 abgeleitet werden können. Da nämlich

$$\psi(\tau) = \varphi\left(-\frac{1}{\tau}\right),$$

so wird man, wenn statt τ die Grösse

$$\frac{b_0 - a_0\tau}{a_1\tau - b_1}$$

substituirt wird, worin

$$a_0 \equiv 1, \quad a_1 \equiv 0, \quad b_0 \equiv 0, \quad b_1 \equiv 1$$

ist, nach (7.) II. des § 1 die folgende Beziehung erhalten

$$\psi\left(\frac{b_0 - a_0\tau}{a_1\tau - b_1}\right) = \varphi\left(\frac{b_1 - a_1\tau}{b_0 - a_0\tau}\right) = \psi(\tau)\, e^{\frac{i\pi}{8}a_1 b_1}\left(\frac{2}{b_1}\right).$$

Ferner ist nach (7.) I.:

$$\varphi\left(\frac{b_0 - a_0\tau}{a_1\tau - b_1}\right) = \varphi(\tau)\, e^{\frac{-i\pi}{8}a_0 b_0}\left(\frac{2}{a_0}\right),$$

und daraus folgt:

$$\chi\left(\frac{b_0 - a_0\tau}{a_1\tau - b_1}\right) = \varphi\left(\frac{b_0 - a_0\tau}{a_1\tau - b_1}\right)\psi\left(\frac{b_0 - a_0\tau}{a_1\tau - b_1}\right) = \chi(\tau)\, e^{\frac{-i\pi}{8}(a_0 b_0 - a_1 b_1)}\left(\frac{2}{a_0 b_1}\right).$$

Zur unmittelbaren Herleitung der obigen Ausdrücke verweise ich auf meine Notiz in den mathematischen Annalen von *Clebsch* und *Neumann*: die linearen Transformationen der *Hermite*schen φ-Function.

VI. $a_0 \equiv 0, \quad a_1 \equiv 1, \quad b_0 \equiv 1, \quad b_1 \equiv 1 \quad (\text{mod. } 2)$

$$\chi\left(\frac{b_0 - a_0\tau}{a_1\tau - b_1}\right) = \frac{\chi(\tau)}{\psi(\tau)^3}\left(\frac{2}{b_0}\right) e^{-\frac{i\pi}{8}(a_1 b_1 + a_0 b_0)}.$$

§. 3.

Vergleichung der Grösse $\chi(\tau)$ und der Transformationsausdrücke $\sqrt[4]{kk_1}$, wenn der Grad der Transformation eine Primzahl ist.

Aus den Formeln (12.) und (13.) des §. 1 folgt durch Multiplication

$$(1.) \quad \sqrt{kk_1} = (\sqrt{cc_1})^n \left\{ \frac{snc\left(\frac{m\varpi}{n}\right) snc\left(\frac{2m\varpi}{n}\right) \cdots snc\left(\frac{n-1}{2} \cdot \frac{m\varpi}{n}\right)}{dn\left(\frac{m\varpi}{n}\right) dn\left(\frac{2m\varpi}{n}\right) \cdots dn\left(\frac{n-1}{2} \cdot \frac{m\varpi}{n}\right)} \right\}^2,$$

oder wenn $m = 2$ gesetzt wird, was erlaubt ist, da m jede zu n relativ prime Zahl bedeuten durfte,

$$(2.) \quad V = \sqrt[4]{kk_1} = (\sqrt[4]{cc_1})^n \cdot \frac{snc\left(\frac{2\varpi}{n}\right) snc\left(\frac{4\varpi}{n}\right) \cdots snc\left(\frac{(n-1)\varpi}{n}\right)}{dn\left(\frac{2\varpi}{n}\right) dn\left(\frac{4\varpi}{n}\right) \cdots dn\left(\frac{(n-1)\varpi}{n}\right)},$$

worin $\sqrt[4]{cc_1}$ die durch den Ausdruck $\chi(\tau)$ vollständig bestimmte Function von τ darstellen soll. Wir wollen nun diesen Werth V mit dem durch die eindeutige Function des transformirten ϑ-Moduls gegebenen Werthe von $\sqrt[4]{kk_1}$ vergleichen, wobei von vornherein (aus den für die transformirten ϑ-Functionen aufgestellten Ausdrücken) ersichtlich ist, dass ein Werthunterschied dieser beiden Ausdrücke nur in dem verschiedenen Vorzeichen statthaben kann. Bevor wir jedoch diese Vergleichung anstellen, ist eine wesentliche Bemerkung in Betreff der Wahl des ω hinzuzufügen. Während es nämlich für die Aufstellung der Transformationsformeln gleichgültig war, welchen der unendlich vielen möglichen Werthe des ω man wählte, ist es hier, wenn auch der Werth von $\sqrt{k}$ für alle ω derselbe bleibt, doch fraglich, ob sich nicht bei einer verschiedenen Wahl des ω das Vorzeichen des V ändert. Nun war aber der allgemeine Ausdruck von $\frac{\omega}{n}$ in der Form enthalten:

$$\frac{\omega}{n} = \frac{pn - 16\xi q + q\tau}{n} = p + q \cdot \frac{\tau - 16\xi}{n},$$

wenn die Zahlen

$$pn - 16\xi q \quad \text{und} \quad q$$

zu einander relativ prim waren. Es folgt hieraus, wenn λ eine der elliptischen Functionen cn, dn, snc bedeutet:

$$\lambda\left(\frac{2\varpi}{n}\right)=\lambda\left(4Cp+q.4C\frac{\tau-16\xi}{n}\right)=\lambda\left(q.4C\frac{\tau-16\xi}{n}\right),$$

$$\lambda\left(\frac{4\varpi}{n}\right)=\lambda\left(8Cp+q.8C\frac{\tau-16\xi}{n}\right)=\lambda\left(q.8C\frac{\tau-16\xi}{n}\right),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\lambda\left(\frac{(n-1)\varpi}{n}\right)=\lambda\left(2(n-1)Cp+q.2(n-1)C\frac{\tau-16\xi}{n}\right)=\lambda\left(q.2(n-1)C\frac{\tau-16\xi}{n}\right),$$

und daher

$$\lambda\left(\frac{2\varpi}{n}\right)\lambda\left(\frac{4\varpi}{n}\right)\cdots\lambda\left(\frac{(n-1)\varpi}{n}\right)$$

$$=\lambda\left(q.4C\frac{\tau-16\xi}{n}\right)\lambda\left(q.8C\frac{\tau-16\xi}{n}\right)\cdots\lambda\left(q.2(n-1)C\frac{\tau-16\xi}{n}\right).$$

Da nun der Voraussetzung nach q zu n relativ prim ist, und daher die Multipla von q

$$1.q,\quad 2.q,\quad 3.q,\quad \ldots\quad \frac{n-1}{2}.q$$

nach dem Modul n genommen, wenn man vom Zeichen absieht (was für die drei genannten elliptischen Functionen geschehen darf), die $\frac{n-1}{2}$ verschiedenen Reste

$$1,\quad 2,\quad 3,\quad \ldots\quad \frac{n-1}{2}$$

lassen, so wird

$$\lambda\left(\frac{2\varpi}{n}\right)\lambda\left(\frac{4\varpi}{n}\right)\cdots\lambda\left(\frac{(n-1)\varpi}{n}\right)$$

$$=\lambda\left(4C\frac{\tau-16\xi}{n}\right)\lambda\left(8C\frac{\tau-16\xi}{n}\right)\cdots\lambda\left(2(n-1)C\frac{\tau-16\xi}{n}\right),$$

es bleibt somit der Werth des V unverändert, welchen der unendlich vielen Werthe für ω man auch wählen mag.

Da sich nun $\chi(\tau)$ aus dem Producte von $\varphi(\tau)$ und $\psi(\tau)$ zusammensetzt, so wird es, wie unmittelbar zu sehen, nur darauf ankommen, die beiden folgenden Paare von Ausdrücken

$$(3.)\quad v=\varphi(\tau)^{n}.snc\left(\frac{2\varpi}{n}\right)snc\left(\frac{4\varpi}{n}\right)\cdots snc\left(\frac{(n-1)\varpi}{n}\right)\quad\text{und}\quad\varphi(\tau'),$$

$$(4.)\quad v_1=\frac{\psi(\tau)^{n}}{dn\left(\frac{2\varpi}{n}\right)dn\left(\frac{4\varpi}{n}\right)\cdots dn\left(\frac{(n-1)\varpi}{n}\right)}\quad\text{und}\quad\psi(\tau')$$

in Bezug auf ihr Zeichen mit einander zu vergleichen *).

---

*) Ich betrachte v und v_1 besonders, um die Vergleichung jener Ausdrücke an dem Producte der *snc* vorzunehmen, deren Durchführung sowohl zur Aufstellung der

Untersuchen wir zuerst zur Vergleichung der Ausdrücke (3.) die durch das Schema

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 16\xi & n \end{vmatrix}$$

dargestellten Repräsentanten, so ergiebt sich, wenn

$$\omega = \tau - 16\xi$$

(n ist eine Primzahl) gesetzt wird,

$$v = \varphi(\tau)^n . snc\frac{4C}{n}(\tau-16\xi)\, snc\frac{8C}{n}(\tau-16\xi)\ \ldots\ snc\frac{2(n-1)C}{n}(\tau-16\xi),$$

oder da

$$snc\frac{2C(\tau-16\xi)}{n} = snc\frac{2C(n-1)(\tau-16\xi)}{n},$$

$$snc\frac{6C(\tau-16\xi)}{n} = snc\frac{2C(n-3)(\tau-16\xi)}{n}$$

u. s. w.,

$$(5.)\qquad v = \varphi(\tau)^n . snc\frac{2C}{n}(\tau-16\xi)\, snc\frac{4C}{n}(\tau-16\xi)\ \ldots\ snc\frac{(n-1)C}{n}(\tau-16\xi),$$

während der diesen Repräsentanten entsprechende Werth von $\varphi(\tau')$, wenn

$$\tau' = \frac{\tau-16\xi}{n},\quad q' = e^{\pi i\tau'}$$

gesetzt wird, durch die Gleichung

$$(6.)\qquad \varphi(\tau') = \sqrt{2}.e^{\frac{\pi i\tau'}{8}}.\frac{(1+q'^2)(1+q'^4)(1+q'^6)\ldots}{(1+q')(1+q'^3)(1+q'^5)\ldots}$$

bestimmt wird.

Da nun die Ausdrücke (5.) und (6.) vom Vorzeichen abgesehen, für jedes τ identisch sein müssen, so wird man nur nöthig haben, dieselben für ein specielles c mit einander zu vergleichen und aus dem Quotienten dieser beiden Ausdrücke jenes Vorzeichen herzuleiten. Wählt man zu dem Ende c unendlich klein, so dass

$$C = \frac{\pi}{2},\quad C' = \infty,$$

$$\lim q = \lim e^{\pi\tau i} = \lim e^{-\frac{\pi C'}{C}} = 0,$$

$$\lim q' = \lim e^{\pi\tau' i} = \lim e^{\frac{\pi i(\tau-16\xi)}{n}} = 0$$

---

* Modulargleichungen, wie ich es in der früher erwähnten Arbeit gezeigt, als auch anderer in der Transformationstheorie vorkommenden Gleichungen nothwendig ist; in dem obigen Falle könnte man $snc = \frac{cn}{dn}$ setzen und hätte sich dann nur mit dem Producte der cn zu beschäftigen.

ist, so wird sich aus der bekannten Gleichung

$$snc\frac{2Cx}{\pi} = \frac{2}{\sqrt{c}}\sqrt[4]{q}\cos x \prod_{n=1\dots\infty}\frac{1+2q^{2n}\cos 2x+q^{4n}}{1+2q^{2n-1}\cos 2x+q^{4n-2}}$$

für unsere Annahme die Beziehung

$$\lim snc\frac{2Cx}{\pi} = \lim\frac{2}{\sqrt{c}}\sqrt[4]{q}\cos x$$

ergeben und hieraus, wenn der Reihe nach statt x die Grössen

$$\pi\left(\frac{\tau-16\xi}{n}\right),\quad 2\pi\left(\frac{\tau-16\xi}{n}\right),\quad \dots\quad \frac{n-1}{2}\pi\left(\frac{\tau-16\xi}{n}\right)$$

gesetzt, und die so entstehenden Ausdrücke mit einander multiplicirt werden, die Gleichung folgen

$$\lim snc\,2C\left(\frac{\tau-16\xi}{n}\right)snc\,4C\left(\frac{\tau-16\xi}{n}\right)\cdots snc\,(n-1)\,C\left(\frac{\tau-16\xi}{n}\right)$$

$$= \lim\frac{2^{\frac{n-1}{2}}\sqrt[4]{q^{\frac{n-1}{2}}}}{\sqrt{c^{\frac{n-1}{2}}}}\cdot P,$$

wenn

$$\lim\cos\pi\left(\frac{\tau-16\xi}{n}\right)\cos 2\pi\left(\frac{\tau-16\xi}{n}\right)\dots\cos\frac{n-1}{2}\pi\left(\frac{\tau-16\xi}{n}\right)\quad \text{mit}\quad P$$

bezeichnet wird.

Da nun ferner $\varphi(\tau)$ für die obige Annahme durch den Ausdruck

$$\lim\varphi(\tau) = 2^{\frac{1}{2}}\lim e^{\frac{\pi i\tau}{8}}$$

gegeben ist, und ausserdem aus der Gleichung

$$\sqrt{c} = \frac{\vartheta_2}{\vartheta_3}$$

leicht folgt, dass

$$\lim\frac{2^{\frac{n-1}{2}}(\sqrt[4]{q})^{\frac{n-1}{2}}}{(\sqrt{c})^{\frac{n-1}{2}}} = 1,$$

so ergiebt sich:

$$(7.)\qquad v = \lim 2^{\frac{n}{2}}.e^{\frac{n\pi\tau i}{8}}.P,$$

während der als eindeutige Function von τ' definirte Werth von $\sqrt[4]{k}$ durch den Ausdruck bestimmt ist

$$(8.)\qquad \varphi(\tau') = \lim 2^{\frac{1}{2}}.e^{\frac{\pi i(\tau-16\xi)}{8n}}.$$

Zur Vergleichung der beiden Werthe v und $\varphi(\tau')$ ist es nöthig, den Werth von P oder den Grenzwerth jenes Cosinusproductes zu ermitteln.

Nun ist aber

$$\lim \cos m\pi\left(\frac{\tau-16\xi}{n}\right) = \lim \frac{e^{m\pi\left(\frac{\tau-16\xi}{n}\right)i}+e^{-m\pi\left(\frac{\tau-16\xi}{n}\right)i}}{2}$$

$$= \lim \frac{e^{-m\pi\left(\frac{\tau-16\xi}{n}\right)i}}{2}\left\{1+e^{2m\pi\left(\frac{\tau-16\xi}{n}\right)i}\right\} = \lim \tfrac{1}{2}e^{-m\pi\left(\frac{\tau-16\xi}{n}\right)i},$$

also

$$P = \lim \frac{1}{2^{\frac{n-1}{2}}}\cdot e^{-\pi i\left(1+2+3+\dots\frac{n-1}{2}\right)\left(\frac{\tau-16\xi}{n}\right)} = \lim \frac{e^{-\left(\frac{n^2-1}{8}\right)\left(\frac{\tau-16\xi}{n}\right)\pi i}}{2^{\frac{n-1}{2}}},$$

und es geht daher die Gleichung (7.) in

$$(9.)\qquad v = \lim 2^{\frac{1}{4}} e^{\frac{n\pi\tau i}{8}}\, e^{-\left(\frac{n^2-1}{8n}\right)\tau\pi i}\, e^{2\left(\frac{n^2-1}{n}\right)\xi\pi i} = \lim 2^{\frac{1}{4}} e^{\frac{\pi\tau i}{8n}}\, e^{\frac{-2\xi\pi i}{n}}$$

über, woraus, wenn man den Quotienten aus (8.) und (9.) bildet, sich die Gleichung ergiebt:

$$\lim \frac{v}{\varphi(\tau')} = \lim \frac{2^{\frac{1}{4}}\, e^{\frac{\pi\tau i}{8n}}\, e^{\frac{-2\xi\pi i}{n}}}{2^{\frac{1}{4}}\,.e^{\pi i\left(\frac{\tau-16\xi}{n}\right)}} = 1.$$

Es ist somit ersichtlich, dass der durch die Gleichung (5.) dargestellte Werth von v, wie er unmittelbar aus der Transformationstheorie hervorgegangen, für die Repräsentanten der nicht äquivalenten Klassen, welche durch das Schema

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 16\xi & n \end{vmatrix}$$

dargestellt sind, denjenigen Werth von $\sqrt[4]{k}$ liefert, welchen $\varphi(\tau')$ hat, dass also für diesen Fall

$$(10.)\qquad v = \varphi\left(\frac{\tau-16\xi}{n}\right)$$

ist. Was nunmehr den durch das Schema

$$\begin{vmatrix} n & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

gegebenen Repräsentanten der nicht äquivalenten Klassen betrifft, so werden für $\omega = 1$*) die beiden mit einander zu vergleichenden Grössen durch die

*) Es ist auch hier wie oben zu bemerken, dass der allgemeine Werth von $\frac{\omega}{n}$:

$$\frac{p+qn\tau}{n} = q\tau+\frac{p}{n},$$

worin p und qn zu einander relativ prim sind, für v denselben Werth liefert, wie wenn für $\frac{\omega}{n}$ der eine in dieser Form enthaltene Werth $\frac{1}{n}$ gesetzt wird.

Gleichungen bestimmt sein:

$$v = (\sqrt[4]{c})^n snc\frac{4C}{n} snc\frac{8C}{n} \cdots snc\frac{2(n-1)C}{n},$$

$$\varphi(\tau') = \sqrt{2}\, q'^{\frac{1}{8}} \frac{(1+q'^2)(1+q'^4)\ldots}{(1+q')\,(1+q'^3)\ldots},$$

worin

$$q' = e^{\pi\tau' i} = e^{n\pi\tau i}$$

zu setzen ist.

Um wie vorher für unendlich kleine c den Werth des Quotienten

$$\frac{v}{\varphi(\tau')}$$

zu finden, leitet man aus dem Ausdrucke

$$\lim snc\frac{2Cx}{\pi} = \lim\frac{2}{\sqrt{c}} \sqrt[4]{q} \cos x,$$

indem man darin der Reihe nach für x die Werthe

$$\frac{2\pi}{n},\ \frac{4\pi}{n},\ \ldots\ \frac{(n-1)\pi}{n}$$

einsetzt, die folgende Gleichung ab:

$$\lim snc\frac{4C}{n} snc\frac{8C}{n} \cdots snc\frac{2(n-1)C}{n}$$

$$= \lim\frac{2^{\frac{n-1}{2}}(\sqrt[4]{q})^{\frac{n-1}{2}}}{(\sqrt{c})^{\frac{n-1}{2}}} \cdot \cos\frac{2\pi}{n} \cos\frac{4\pi}{n} \cdots \cos\frac{(n-1)\pi}{n},$$

und erhält, da bekanntlich

$$\cos\frac{2\pi}{n} \cos\frac{4\pi}{n} \cdots \cos\frac{(n-1)\pi}{n} = \left(\frac{2}{n}\right) \cdot \frac{1}{2^{\frac{n-1}{2}}}$$

ist, für v den Ausdruck

$$(11.)\qquad \lim v = \left(\frac{2}{n}\right) 2^{\frac{1}{2}} \lim q^{\frac{n}{8}},$$

während sich für $\varphi(\tau')$ der Werth ergiebt:

$$(12.)\qquad \lim\varphi(\tau') = 2^{\frac{1}{2}} \lim e^{\frac{n\pi\tau i}{8}},$$

woraus die Beziehung folgt:

$$(13.)\qquad v = \left(\frac{2}{n}\right)\varphi(n\tau).$$

Da nun n eine Primzahl, so sind die durch die Schemata

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 16\xi & n \end{vmatrix} \begin{vmatrix} n & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

dargestellten Repräsentanten der nicht äquivalenten Klassen die allein existirenden, und man sieht somit, dass sich für einen primzahligen Transformationsgrad die durch den Ausdruck

$$v = \varphi(\tau)^n snc\frac{2\varpi}{n} snc\frac{4\varpi}{n} \cdots snc\frac{(n-1)\varpi}{n}$$

gegebenen Werthe des v für alle Repräsentanten auch in der Form

$$\varphi\left(\frac{\tau-16\xi}{n}\right), \quad \left(\frac{2}{n}\right)\varphi(n\tau)$$

darstellen lassen.

Was nun die Vergleichung des Ausdruckes

$$(14.) \qquad v_1 = \frac{\psi(\tau)^n}{dn\frac{2\varpi}{n} dn\frac{4\varpi}{n} \cdots dn\frac{(n-1)\varpi}{n}}$$

mit dem durch die Grösse

$$\psi(\tau')$$

gegebenen Werthe angeht, so wird man, um diesen Fall auf den vorigen zu reduciren, von der bekannten Gleichung

$$dn(u, c) = \frac{1}{snc(iu, c_1)}$$

Gebrauch machen können, in Folge deren der Ausdruck (14.) in den folgenden übergeht:

$$(15.) \qquad v_1 = \psi(\tau)^n snc\left(\frac{2i\varpi}{n}, c_1\right) snc\left(\frac{4i\varpi}{n}, c_1\right) \cdots snc\left(\frac{(n-1)i\varpi}{n}, c_1\right).$$

Man könnte nun diesen Ausdruck genau in der vorher angegebenen Weise, da er dieselbe Form wie v hat, mit $\psi(\tau')$ vergleichen, ich ziehe es jedoch vor, hier einen andern Weg einzuschlagen, der uns kürzer zum Resultate führt.

Der Ausdruck (14.) zeigt nämlich, dass, wenn man in derselben Weise verfährt, wie es in der Theorie der Modulargleichungen geschieht, die v_1 Lösungen einer Gleichung $n+1^{ten}$ Grades sind, deren Coefficienten ganze rationale Functionen von u_1 sind; nun ist diese Gleichung aber nothwendig irreductibel, weil, wenn sie es nicht wäre, auch die aus ihr abgeleitete Gleichung, welche entsteht, wenn u statt u_1, $\pm v$ statt v_1 gesetzt wird, also die Modulargleichung, zerlegbar sein müsste, und es wird daher jede andere Gleichung $n+1^{ten}$ Grades dieser Art zwischen u_1 und v_1 die obige sein. Setzt

man nun in die Modulargleichung statt u die Grösse u_1, so sind, wie ich gezeigt habe *), die Lösungen der Modulargleichung $n+1^{\text{ten}}$ Grades

$$\left(\frac{2}{n}\right)\psi\left(\frac{\tau-16\xi}{n}\right) \quad \text{und} \quad \psi(n\tau),$$

und wir schliessen somit, dass sich für einen primzahligen Transformationsgrad

---

*) Transf. §. 39. Ich füge zu den dortigen Auseinandersetzungen noch die folgende Bemerkung als wesentliche Ergänzung hinzu. Ich habe nämlich gezeigt, dass, wenn in der Modulargleichung $\sqrt[4]{c}$ in $\sqrt[4]{c_1}$ oder τ in $-\frac{1}{\tau}$ verwandelt wird, die durch den Ausdruck

$$\left(\frac{2}{t}\right)\varphi\left(\frac{t\tau-16\xi}{t'}\right)$$

definirte Wurzel der Modulargleichung in

$$\left(\frac{2}{u'}\right)\psi\left(\frac{u\tau-16x}{u'}\right)$$

übergeht, worin u, u', x durch die Gleichungen gegeben sind

$$u\alpha = 16\xi,$$
$$16x\alpha + u'\gamma = -t,$$
$$u\beta = t',$$
$$16x\beta + u'\delta = 0,$$

wenn α, β, γ, δ die Transformationszahlen einer linearen Transformation sind. Setzt man nun hierin $t = 1$, $t' = n$, so wird u als grösster gemeinsamer Theiler zwischen 16ξ und n die Einheit, also $u' = n$, $\alpha = 16\xi$, $\beta = n$ sein, und es bleiben daher nur noch die beiden Gleichungen zu befriedigen:

$$16x.16\xi + n\gamma = -1 \quad \text{und} \quad 16x + \delta = 0;$$

hieraus geht aber hervor, dass, wenn $x = \xi$ sein soll, d. h. wenn die resultirende ψ-Function zu demselben Repräsentanten gehören soll, dem die zu Grunde gelegte φ-Function angehört,

$$(16\xi)^2 + n\gamma = -1 \quad \text{oder} \quad 1 + (16\xi)^2 \equiv 0 \pmod{n}$$

sein muss, d. h. es muss -1 Rest von n, also $n = 4m+1$ und 16ξ die Auflösung der Congruenz

$$z^2 \equiv -1 \pmod{n}$$

sein; da diese Congruenz jedoch, wenn n eine Primzahl ist, nur zwei incongruente Auflösungen z_1 und $-z_1$ hat, so werden nur zwei Werthe von ξ, nämlich diejenigen, welche den beiden Gleichungen

$$16\xi = z_1 + k.n \quad \text{und} \quad 16\xi = -z_1 + k.n$$

genügen und zugleich $< n$ sind, so beschaffen sein, dass $x = \xi$, $u = 1$, $u' = n$ wird, dass also die Lösung

$$\varphi\left(\frac{\tau-16\xi}{n}\right)$$

übergeht in

$$\left(\frac{2}{n}\right)\psi\left(\frac{\tau-16\xi}{n}\right) = \psi\left(\frac{\tau-16\xi}{n}\right),$$

da n von der Form $4m+1$ sein musste.

die durch den Ausdruck

$$v_1 = \frac{\psi(\tau)^n}{dn\left(\frac{2\varpi}{n}\right) dn\left(\frac{4\varpi}{n}\right) \dots dn\left(\frac{(n-1)\varpi}{n}\right)}$$

gegebenen Werthe des v_1 für alle Repräsentanten der nicht äquivalenten Klassen auch in der Form

$$\left(\frac{2}{n}\right)\psi\left(\frac{\tau - 16\xi}{n}\right), \qquad \psi(n\tau)$$

darstellen lassen, und die Zusammensetzung dieses und des vorher erhaltenen Resultates ergiebt somit den Satz, dass, wenn der Transformationsgrad eine Primzahl ist, die durch den Ausdruck

$$V = \chi(\tau)^n \frac{snc\left(\frac{2\varpi}{n}\right) snc\left(\frac{4\varpi}{n}\right) \dots snc\left(\frac{(n-1)\varpi}{n}\right)}{dn\left(\frac{2\varpi}{n}\right) dn\left(\frac{4\varpi}{n}\right) \dots dn\left(\frac{(n-1)\varpi}{n}\right)}$$

gegebenen Werthe von V für alle Repräsentanten der nicht äquivalenten Klassen auch in der Form

$$\left(\frac{2}{n}\right)\chi\left(\frac{\tau - 16\xi}{n}\right), \quad \left(\frac{2}{n}\right)\chi(n\tau)$$

darstellbar sind. Wir werden daher im Folgenden für die neu zu bildenden Gleichungen in V und U den Ausdruck

$$(16.) \qquad V = \left(\frac{2}{n}\right)\chi(\tau)^n \frac{snc\left(\frac{2\varpi}{n}\right) snc\left(\frac{4\varpi}{n}\right) \dots snc\left(\frac{(n-1)\varpi}{n}\right)}{dn\left(\frac{2\varpi}{n}\right) dn\left(\frac{4\varpi}{n}\right) \dots dn\left(\frac{(n-1)\varpi}{n}\right)}$$

zu Grunde legen und somit als Wurzeln jener Gleichungen die Grössen

$$\chi\left(\frac{\tau - 16\xi}{n}\right), \quad \chi(n\tau)$$

ansehen dürfen; die Gleichungen in dem ursprünglichen V werden, wenn 2 quadratischer Rest von n ist, dieselben, wenn dagegen Nichtrest, aus jenen zu erhalten sein, wenn man den Coefficienten der ungeraden Potenzen von V das entgegengesetzte Zeichen giebt.

§. 4.

Vergleichung der Grösse $\chi(\tau')$ und des Transformationsausdruckes für $\sqrt[4]{kk_1}$, wenn der Grad der Transformation ein beliebiger ungrader ist.

Ist n eine beliebig zusammengesetzte ungrade Zahl, so werden zu den eben betrachteten Repräsentanten nicht äquivalenter Klassen von der Form

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 16\xi & n \end{vmatrix}\begin{vmatrix} n & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

noch andere hinzutreten, welche durch das Schema

$$(\alpha.)\quad \begin{vmatrix} t & 0 \\ 16\xi & t' \end{vmatrix}$$

dargestellt werden, worin t ein Divisor von n, $t' = \frac{n}{t}$, und ξ eine der Zahlen $0, 1, 2, \ldots t'-1$ bedeutet, jedoch der Beschränkung unterworfen, dass t, 16ξ, t' keinen gemeinsamen Theiler haben; es sollen nun auch für diese Repräsentanten die Werthe, welche der Ausdruck

$$V = \chi(\tau)^n \cdot \frac{snc\left(\frac{2\varpi}{n}\right)snc\left(\frac{4\varpi}{n}\right)\ldots snc\left(\frac{(n-1)\varpi}{n}\right)}{dn\left(\frac{2\varpi}{n}\right)dn\left(\frac{4\varpi}{n}\right)\ldots dn\left(\frac{(n-1)\varpi}{n}\right)}$$

liefert, mit den Werthen von $\chi(\tau')$ verglichen werden.

Statt nun diese Transformation $(\alpha.)$ unmittelbar anzuwenden, wollen wir nach einander die beiden durch die Schemata

$$\begin{vmatrix} t & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 16\xi & t' \end{vmatrix}$$

repräsentirten Transformationen ausführen, wobei wir für einen Augenblick annehmen, dass ξ und t keinen gemeinsamen Theiler haben, dass also das ω, welches zur Transformation

$$\begin{vmatrix} t & 0 \\ 16\xi & t' \end{vmatrix}$$

gehört, in der Form $\omega = t\tau - 16\xi$ darstellbar ist.

Die Anwendung der ersten Transformation

$$\begin{vmatrix} t & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

giebt, wenn $\omega = 1$ gesetzt, und der dem obigen V analoge Werth des Transformationsausdruckes mit W bezeichnet wird, die Gleichung

$$W = \chi(\tau)^n \cdot \frac{snc\left(\frac{4C}{t}, c\right)snc\left(\frac{8C}{t}, c\right)\ldots snc\left(\frac{2(t-1)C}{t}, c\right)}{dn\left(\frac{4C}{t}, c\right)dn\left(\frac{8C}{t}, c\right)\ldots dn\left(\frac{2(t-1)C}{t}, c\right)} = \left(\frac{2}{t}\right)\chi(t\tau).$$

Bezeichnet man nun das zwischen den Grenzen 0 und 1 genommene transformirte Integral mit C_1, den zugehörigen Integralmodul mit λ und den ϑ-Modul mit τ_1, so wird die nunmehr anzuwendende Transformation

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 16\xi & t' \end{vmatrix}$$

für den durch die eindeutige Function des ϑ-Moduls definirten Werth von $\sqrt[4]{kk_1}$ den folgenden in der Form des früheren V sich darstellenden Ausdruck ergeben, den wir mit V_1 bezeichnen wollen:

$$V_1 = \left(\frac{2}{t'}\right)\left[\left(\frac{2}{t}\right)W\right]^{t'} \cdot \frac{snc\left[4C_1\left(\frac{\tau_1-16\xi}{t'}\right),\lambda\right]\dots snc\left[2(t'-1)C_1\left(\frac{\tau_1-16\xi}{t'}\right),\lambda\right]}{dn\left[4C_1\left(\frac{\tau_1-16\xi}{t'}\right),\lambda\right]\dots dn\left[2(t'-1)C_1\left(\frac{\tau_1-16\xi}{t'}\right),\lambda\right]}$$

oder, da nach §. 1:

$$\tau_1 = t\tau, \quad t\,t' = n, \quad C = t\,a\,C_1,$$

worin a den Multiplicator der ersten Transformation bedeutet, die Gleichung:

$$V_1 = \left(\frac{2}{n}\right)\chi(\tau)^n \left\{\frac{snc\left(\frac{4C}{t},c\right)snc\left(\frac{8C}{t},c\right)\dots snc\left(\frac{2(t-1)C}{t},c\right)}{dn\left(\frac{4C}{t},c\right)dn\left(\frac{8C}{t},c\right)\dots dn\left(\frac{2(t-1)C}{t},c\right)}\right\}^{t'} \times$$

$$\frac{snc\left[\frac{4C}{a}\left(\frac{t\tau-16\xi}{n}\right),\lambda\right]snc\left[\frac{8C}{a}\left(\frac{t\tau-16\xi}{n}\right),\lambda\right]\dots snc\left[\frac{2(t'-1)C}{a}\left(\frac{t\tau-16\xi}{n}\right),\lambda\right]}{dn\left[\frac{4C}{a}\left(\frac{t\tau-16\xi}{n}\right),\lambda\right]dn\left[\frac{8C}{a}\left(\frac{t\tau-16\xi}{n}\right),\lambda\right]\dots dn\left[\frac{2(t'-1)C}{a}\left(\frac{t\tau-16\xi}{n}\right),\lambda\right]},$$

und daher, wie man leicht mit Benutzung der Transformationsformeln des §. 1 sieht,

$$V_1 = \left(\frac{2}{n}\right)\chi(\tau)^n \cdot \prod_{\varrho=1,2,3,\dots\frac{n-1}{2}} \frac{snc\left[4\varrho C\left(\frac{t\tau-16\xi}{n}\right),c\right]}{dn\left[4\varrho C\left(\frac{t\tau-16\xi}{n}\right),c\right]}.$$

Da nämlich

$$\frac{snc\left[\frac{4kC}{a}\left(\frac{t\tau-16\xi}{n}\right),\lambda\right]}{dn\left[\frac{4kC}{a}\left(\frac{t\tau-16\xi}{n}\right),\lambda\right]} = \frac{cn\left[\frac{4kC}{a}\left(\frac{t\tau-16\xi}{n}\right),\lambda\right]}{dn^2\left[\frac{4kC}{a}\left(\frac{t\tau-16\xi}{n}\right),\lambda\right]} =$$

$$\frac{cn\left[4kC\left(\frac{t\tau-16\xi}{n}\right),c\right]}{dn^2\left[4kC\left(\frac{t\tau-16\xi}{n}\right),c\right]}\prod_{p=1,2,\dots\frac{t-1}{2}} \frac{\left\{1-\frac{sn^2\left[4kC\left(\frac{t\tau-16\xi}{n}\right),c\right]}{snc^2\left(\frac{4pC}{t},c\right)}\right\}\left\{1-c^2sn^2\left[4kC\left(\frac{t\tau-16\xi}{n}\right),c\right]sn^2\left[\frac{4pC}{t},c\right]\right\}}{\left\{1-c^2sn^2\left[4kC\left(\frac{t\tau-16\xi}{n}\right),c\right]snc^2\left[\frac{4pC}{t},c\right]\right\}^2}$$

und nach bekannten Additionsformeln

$$\frac{snc^2\frac{4pC}{t}-sn^2 4kC\left(\frac{t\tau-16\xi}{n}\right)}{1-c^2snc^2\frac{4pC}{t}sn^2 4kC\left(\frac{t\tau-16\xi}{n}\right)} = snc\left[4C\left(k\frac{t\tau-16\xi}{n}+\frac{p}{t}\right)\right]snc\left[4C\left(k\frac{t\tau-16\xi}{n}-\frac{p}{t}\right)\right]$$

und

$$\frac{1-c^2snc^2\frac{4pC}{t}sn^2 4kC\left(\frac{t\tau-16\xi}{n}\right)}{1-c^2sn^2\frac{4pC}{t}sn^2 4kC\left(\frac{t\tau-16\xi}{n}\right)} = \frac{1}{dn^2\frac{4pC}{t}}dn\left[4C\left(k\frac{t\tau-16\xi}{n}+\frac{p}{t}\right)\right]dn\left[4C\left(k\frac{t\tau-16\xi}{n}-\frac{p}{t}\right)\right],$$

so geht der obige Ausdruck über in:

$$V_1 = \left(\frac{2}{n}\right)\chi(\tau)^n \cdot \frac{snc\left[\frac{4C}{t},c\right]snc\left[\frac{8C}{t},c\right]\cdots snc\left[\frac{2(t-1)C}{t},c\right]}{dn\left[\frac{4C}{t},c\right]dn\left[\frac{8C}{t},c\right]\cdots dn\left[\frac{2(t-1)C}{t},c\right]}\times$$

$$\frac{snc\left[4C\left(\frac{t\tau-16\xi}{n}\right),c\right]snc\left[8C\left(\frac{t\tau-16\xi}{n}\right),c\right]\cdots snc\left[2(t'-1)C\left(\frac{t\tau-16\xi}{n}\right),c\right]}{dn\left[4C\left(\frac{t\tau-16\xi}{n}\right),c\right]dn\left[8C\left(\frac{t\tau-16\xi}{n}\right),c\right]\cdots dn\left[2(t'-1)C\left(\frac{t\tau-16\xi}{n}\right),c\right]}\times$$

$$\prod_{p=1,2,\ldots\frac{t-1}{2};\; k=1,2,\ldots\frac{t'-1}{2}}\prod \frac{snc\left[4C\left(k\frac{t\tau-16\xi}{n}+\frac{p}{t}\right),c\right]snc\left[4C\left(k\frac{t\tau-16\xi}{n}-\frac{p}{t}\right),c\right]}{dn\left[4C\left(k\frac{t\tau-16\xi}{n}+\frac{p}{t}\right),c\right]dn\left[4C\left(k\frac{t\tau-16\xi}{n}-\frac{p}{t}\right),c\right]},$$

woraus unmittelbar der oben angegebene Werth folgt, wenn man erwägt, dass ξ und t relativ prim und, wenn ϱ ein Vielfaches von t' bedeutet, die Argumente von der Form $\frac{4pC}{t}$ sind.

Lässt man nun die oben gemachte Beschränkung fallen, dass ξ zu t relativ prim (wodurch sich das ω des transformirten Moduls in seiner einfachsten Form $t\tau-16\xi$ ergab), so wird das Resultat dadurch nicht geändert. Denn lässt man das der ersten Transformation

$$\begin{vmatrix} t & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

entsprechende ω unverändert in der Form $\omega=1$, setzt dagegen für das zur zweiten Transformation

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 16\xi & t' \end{vmatrix}$$

gehörige, wie es nach den eben gemachten Auseinandersetzungen gestattet ist,

$$q\tau_1+pt'-q.16\xi,$$

worin

$$pt'-q.16\xi \quad \text{und} \quad qt$$

relativ prim sind, so wird in dem vorher erhaltenen Ausdrucke für V_1 das Argument der elliptischen Functionen folgendermassen lauten:

$$4C\left(k.\frac{qt\tau+pt'-q.16\xi}{n}\pm\frac{p'}{t}\right),$$

und V_1 wie oben in die Form

$$V_1 = \left(\frac{2}{n}\right)\chi(\tau)^n . \prod_{\varrho=1,2,\ldots\frac{n-1}{2}} \frac{snc\,4\varrho C\left(\frac{qt\tau+pt'-q.16\xi}{n}\right)}{dn\,4\varrho C\left(\frac{qt\tau+pt'-q.16\xi}{n}\right)}$$

$$= \left(\frac{2}{n}\right)\chi(\tau)^n . \frac{snc\frac{2\varpi}{n}snc\frac{4\varpi}{n}\ldots snc\frac{(n-1)\varpi}{n}}{dn\frac{2\varpi}{n}dn\frac{4\varpi}{n}\ldots dn\frac{(n-1)\varpi}{n}}$$

umgesetzt werden können, worin

$$\omega = qt\tau+pt'-q.16\xi$$

und

$$pt'-q.16\xi, \quad qt$$

zu einander relativ prim sind. Hieraus folgt, da

$$V_1 = \chi\left(\frac{t\tau-16\xi}{t'}\right),$$

dass, wenn

$$V = \chi(\tau)^n \frac{snc\frac{2\varpi}{n}snc\frac{4\varpi}{n}\ldots snc\frac{(n-1)\varpi}{n}}{dn\frac{2\varpi}{n}dn\frac{4\varpi}{n}\ldots dn\frac{(n-1)\varpi}{n}}$$

gesetzt wird, für jeden durch das Schema

$$\begin{vmatrix} t & 0 \\ 16\xi & t' \end{vmatrix}$$

dargestellten Repräsentanten der nicht äquivalenten Klassen die Beziehung statthat:

$$V = \left(\frac{2}{n}\right)\chi\left(\frac{t\tau-16\xi}{t'}\right),$$

weshalb wir auch für zusammengesetzte ungrade n als Wurzeln der zu bildenden Gleichungen die Ausdrücke:

$$\left(\frac{2}{n}\right)V = \chi\left(\frac{t\tau-16\xi}{t'}\right)$$

zu Grunde legen wollen.

§. 5.

Existenz einer Gleichung $n+1^{\text{ten}}$ Grades zwischen V und U, wenn der Transformationsgrad eine Primzahl ist.

Um die Existenz von Gleichungen zwischen den Grössen $\sqrt[4]{kk_1}$ und $\sqrt[4]{cc_1}$ nachzuweisen, gehe ich zuerst von den Transformationen aus, deren Grad eine Primzahl ist, da die Aufstellung dieser Gleichungen für den Fall, dass der Transformationsgrad eine beliebige ungrade Zahl ohne quadratische Theiler ist, unmittelbar aus den Primzahlgleichungen wird abgeleitet werden können, und es soll also nunmehr gezeigt werden, dass, wenn n eine Primzahl, die zu sämmtlichen Repräsentanten der nicht äquivalenten Klassen gehörigen V von der Form

$$(1.)\qquad V = \left(\frac{2}{n}\right)U^n\cdot\frac{snc\frac{2\varpi}{n}\,snc\frac{4\varpi}{n}\dots snc\frac{(n-1)\varpi}{n}}{dn\frac{2\varpi}{n}\,dn\frac{4\varpi}{n}\dots dn\frac{(n-1)\varpi}{n}},$$

worin U durch den Ausdruck:

$$(2.)\qquad U = \chi(\tau) = \sqrt{2}\,q^{\frac{1}{8}}\{(1-q)(1+q^2)(1-q^3)(1+q^4)\dots\}^3$$

definirt ist, die Lösungen einer Gleichung $n+1^{\text{ten}}$ Grades sind, in welcher der Coefficient des höchsten Gliedes 1 und die Coefficienten der andern Glieder ganze rationale Functionen von U sind.

Setzt man nämlich V in die folgende Form

$$(3.)\qquad V = \left(\frac{2}{n}\right)U^n\cdot\frac{cn\frac{2\varpi}{n}\,cn\frac{4\varpi}{n}\dots cn\frac{(n-1)\varpi}{n}}{\left(c_1^2+c^2cn^2\frac{2\varpi}{n}\right)\left(c_1^2+c^2cn^2\frac{4\varpi}{n}\right)\dots\left(c_1^2+c^2cn^2\frac{(n-1)\varpi}{n}\right)}$$

und bemerkt, dass nach bekannten Multiplicationsformeln

$$cn\frac{4\varpi}{n},\quad cn\frac{6\varpi}{n},\quad \dots\quad cn\frac{(n-1)\varpi}{n}$$

als rationale Functionen von $cn\frac{2\varpi}{n}$ ausdrückbar sind, so kann man V in die Form setzen

$$(4.)\qquad V = U^n f\left(cn\frac{2\varpi}{n}\right),$$

worin f eine rationale Function bedeutet, und es werden sich dann, wenn man mit

$$\omega_1,\quad \omega_2,\quad \omega_3,\quad \dots\quad \omega_{n+1}$$

die allen Repräsentanten der nicht äquivalenten Klassen entsprechenden Werthe von ω bezeichnet, die zugehörigen Werthe von V in der folgenden Form darstellen lassen:

$$V_1 = U^n f\left(cn\frac{2\varpi_1}{n}\right), \quad V_2 = U^n f\left(cn\frac{2\varpi_2}{n}\right), \quad \dots \quad V_{n+1} = U^n f\left(cn\frac{2\varpi_{n+1}}{n}\right).$$

Beachtet man ferner, dass nach den Auseinandersetzungen des vorigen §. der Werth des V unverändert bleibt, wenn man in seinem allgemeinen Ausdrucke

$$V = U^n\cdot\frac{snc\frac{2m\varpi}{n}\, snc\frac{4m\varpi}{n}\dots snc\frac{(n-1)m\varpi}{n}}{dn\frac{2m\varpi}{n}\, dn\frac{4m\varpi}{n}\dots dn\frac{(n-1)m\varpi}{n}}$$

dem m irgend einen zu n relativ primen Werth beilegt, dass sich also für V_ϱ die folgenden gleichbedeutenden Formen ergeben

$$V_\varrho = U^n\cdot\frac{snc\frac{2\varpi_\varrho}{n}\dots snc\frac{(n-1)\varpi_\varrho}{n}}{dn\frac{2\varpi_\varrho}{n}\dots dn\frac{(n-1)\varpi_\varrho}{n}},$$

$$V_\varrho = U^n\cdot\frac{snc\frac{4\varpi_\varrho}{n}\dots snc\frac{(n-1)2\varpi_\varrho}{n}}{dn\frac{4\varpi_\varrho}{n}\dots dn\frac{(n-1)2\varpi_\varrho}{n}},$$

. . . .

$$V_\varrho = U^n\cdot\frac{snc2\left(\frac{n-1}{2}\right)\frac{\varpi_\varrho}{n}\dots snc(n-1)\left(\frac{n-1}{2}\right)\frac{\varpi_\varrho}{n}}{dn2\left(\frac{n-1}{2}\right)\frac{\varpi_\varrho}{n}\dots dn(n-1)\left(\frac{n-1}{2}\right)\frac{\varpi_\varrho}{n}},$$

so erhält man offenbar mit Beibehaltung der Bezeichnung der rationalen Function die nachfolgenden Gleichungen:

$$V_1 = U^n f\left(cn\frac{2\varpi_1}{n}\right) = U^n f\left(cn\frac{4\varpi_1}{n}\right)\dots = U^n f\left(cn\frac{(n-1)\varpi_1}{n}\right),$$

$$V_2 = U^n f\left(cn\frac{2\varpi_2}{n}\right) = U^n f\left(cn\frac{4\varpi_2}{n}\right)\dots = U^n f\left(cn\frac{(n-1)\varpi_2}{n}\right),$$

. . . .

$$V_{n+1} = U^n f\left(cn\frac{2\varpi_{n+1}}{n}\right) = U^n f\left(cn\frac{4\varpi_{n+1}}{n}\right)\dots = U^n f\left(cn\frac{(n-1)\varpi_{n+1}}{n}\right),$$

oder, wenn r eine positive ganze Zahl bedeutet,

$$\frac{V_1^r + V_2^r + \dots + V_{n+1}^r}{U^{nr}} = \frac{2}{n-1}\sum_{s,a}\left\{f\left(cn\frac{2s\varpi_a}{n}\right)\right\}^r,$$

worin s die Werthe $1, 2, \ldots \frac{n-1}{2}$, α die Werthe $1, 2, \ldots n+1$ annimmt*).

Da nun mit Berücksichtigung der Werthe

$$\omega = \tau - 16\xi, \quad \omega = 1$$

leicht zu sehen, dass die Grössen

$$\frac{2s\varpi_\alpha}{n},$$

deren Anzahl $\frac{n^2-1}{2}$ ist, nicht bloss um ganze Vielfache von $2C$ und $2iC'$ von einander verschieden sind, so folgt, dass die Grössen

$$cn\left(\frac{2s\varpi_\alpha}{n}\right)$$

in verschiedener Aufeinanderfolge übereinstimmen mit den Grössen

$$cn\left(\frac{4mC+4m'iC'}{n}\right),$$

deren Anzahl ebenfalls $\frac{n^2-1}{2}$ ist, indem den m und m' die folgenden Werthecombinationen beigelegt werden:

$$m = 1, 2, 3, \ldots \frac{n-1}{2} \qquad m : 0,$$

$$m' : 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \pm\left(\frac{n-1}{2}\right) \qquad m' : 1, 2, 3, \ldots \frac{n-1}{2}.$$

Da nun die Argumente ω der cn so beschaffen sind, dass für ihre n-fachen Multipla

$$cn(n\omega) = 1$$

ist, so muss sich $1 - cn(n\omega)$ in eine Form bringen lassen, deren Zähler nach $cn\,\omega$ entwickelt zum Theil aus dem Producte der wesentlich von einander verschiedenen Factoren

$$cn\,\omega - cn\left(\frac{4mC+4m'iC'}{n}\right),$$

worin m und m' die oben angegebenen Werthe erhalten, zusammengesetzt ist. Da aber

$$\frac{d\,cn(n\omega)}{d\omega} = -n\,sn(n\omega)\,dn(n\omega)$$

für diejenigen ω verschwindet, welche $sn(n\omega)$ zu Null machen, und

*) s. *Sohnke,* aequationes modulares pro transformatione functionum ellipticarum, dieses Journal Bd. XVI.

$$sn(n\omega) = n\,sn\,\omega\,\Pi\left\{\frac{1-\dfrac{sn^2\omega}{sn^2\left(\dfrac{2Cm+2C'm'i}{n}\right)}}{1-c^2sn^2\omega\,sn^2\left(\dfrac{2Cm+2C'm'i}{n}\right)}\right\}$$

$$= (-1)^{\frac{n-1}{2}}c^{\frac{n^2-1}{2}}sn\,\omega\,\Pi\left\{\frac{cn^2\omega-cn^2\left(\dfrac{2Cm+2C'm'i}{n}\right)}{1-c^2sn^2\omega\,sn^2\left(\dfrac{2Cm+2C'm'i}{n}\right)}\right\}^{*)}$$

für alle $cn\omega$ von der oben angegebenen Form Null wird, so kommen die oben aufgestellten Factoren in $1-cn(n\omega)$ doppelt vor, und da deren Anzahl $\frac{n^2-1}{2}$ ist, so wird mit Hinzuziehung des Factors

$$1-cn\,\omega$$

der Zähler von $1-cn(n\omega)$ in der Form

$$(1-cn\,\omega)\,\Pi\left(cn\,\omega-cn\left(\frac{4mC+4m'iC'}{n}\right)\right)^2$$

gefunden sein.

Nun ist aber bekanntlich

$$(-1)^{\frac{n-1}{2}}cn(n\omega) = n\frac{cn\,\omega+\overset{1}{B}cn^3\omega+\overset{2}{B}cn^5\omega+\cdots+\overset{m}{B}cn^{2m+1}\omega}{1+\overset{1}{D}cn^2\omega+\overset{2}{D}cn^4\omega+\cdots+\overset{m}{D}cn^{2m}\omega},$$

worin

$$m = \frac{n^2-1}{2}$$

eine grade Zahl und die Coefficienten rationale Functionen von c^2 sind, welche durch die folgenden Gleichungen mit einander verbunden sind:

$$\overset{m}{D} = (-1)^{\frac{m}{2}}n\left(\frac{c}{c_1}\right)^m, \qquad \overset{m}{B} = (-1)^{\frac{m}{2}}\frac{1}{n}\left(\frac{c}{c_1}\right)^m,$$

$$\overset{m-1}{D} = (-1)^{\frac{m-2}{2}}n\left(\frac{c}{c_1}\right)^{m-2}\overset{1}{B}, \qquad \overset{m-1}{B} = (-1)^{\frac{m-2}{2}}\frac{1}{n}\left(\frac{c}{c_1}\right)^{m-2}\overset{1}{D},$$

$$\overset{m-2}{D} = (-1)^{\frac{m-4}{2}}n\left(\frac{c}{c_1}\right)^{m-4}\overset{2}{B}, \qquad \overset{m-2}{B} = (-1)^{\frac{m-4}{2}}\frac{1}{n}\left(\frac{c}{c_1}\right)^{m-4}\overset{2}{D},$$

$$\overset{m-3}{D} = (-1)^{\frac{m-6}{2}}n\left(\frac{c}{c_1}\right)^{m-6}\overset{3}{B}, \qquad \overset{m-3}{B} = (-1)^{\frac{m-6}{2}}\frac{1}{n}\left(\frac{c}{c_1}\right)^{m-6}\overset{1}{D},$$

. . . .

---

*) nach der bekannten Relation:

$$n = (-1)^{\frac{n-1}{2}}c^{\frac{n^2-1}{2}}\Pi\,sn^2\left(\frac{2Cm+2C'm'i}{n}\right).$$

Wird daher aus dem obigen Ausdrucke

$$1-cn(n\omega)$$

hergeleitet, so ergiebt sich der Zähler als eine Function $n^{2\text{ten}}$ Grades in Bezug auf $cn\omega$ mit Coefficienten, welche ganze rationale Functionen von c^2 sind, wenn man sich zuvor den Zähler und Nenner des obigen Ausdruckes mit c_1^m multiplicirt denkt. Nimmt man nunmehr, was möglich ist, den Factor $1-cn\omega$ heraus, so wird der übrige Theil des Zählers nach den vorher gemachten Auseinandersetzungen das Quadrat einer ganzen rationalen Function von $cn\omega$ sein müssen, von der nur noch nachzuweisen ist, dass ihre Coefficienten rationale Functionen von c^2 sind. Dies ergiebt sich jedoch unmittelbar aus der Bemerkung, dass das höchste Glied des von dem Factor

$$\pm(1-cn\omega)$$

befreiten Zählers die Einheit ist, und dass, wenn ein Polynom von der Form

$$(cn^{\frac{n^2-1}{2}}\omega+Acn^{\frac{n^2-3}{2}}\omega+Bcn^{\frac{n^2-5}{2}}\omega+\cdots)^2$$

Coefficienten besitzt, welche rationale Functionen von u^8 sind, auch $A, B, \ldots$ rationale Functionen dieser Grösse sein müssen.

Aus der Identität der beiden für

$$1-cn(n\omega)$$

aufgestellten Ausdrücke ergiebt sich nun, dass jede rationale symmetrische Function der Grössen

$$cn\left(\frac{4mC+4m'iC'}{n}\right)$$

als rationale Function von u^8 sich ausdrücken lässt.

Es ist somit nachgewiesen, dass sich für jedes ganzzahlige r der Ausdruck

$$\frac{V_1^r+V_2^r+\cdots+V_{n+1}^r}{U^{nr}}$$

als rationale Function von $u^8=c^2$ darstellt, und dass daher die Grössen

$$\frac{V_1}{U^n},\ \frac{V_2}{U^n},\ \ldots\ \frac{V_{n+1}}{U^n}$$

sich als die Lösungen einer Gleichung $n+1^{\text{ten}}$ Grades betrachten lassen, deren Coefficienten rationale Functionen von $u^8=c^2$ sind.

Nun lässt sich aber die Grösse V noch in eine andere Form setzen; da nämlich:

$$snc\left(\frac{k\varpi}{n}, c\right) = \frac{1}{dn\left(\frac{ik\varpi}{n}, c_1\right)}$$

und

$$dn\left(\frac{k\varpi}{n}, c\right) = \frac{1}{snc\left(\frac{ik\varpi}{n}, c_1\right)} = \frac{dn\left(\frac{ik\varpi}{n}, c_1\right)}{cn\left(\frac{ik\varpi}{n}, c_1\right)},$$

so geht der Ausdruck (1.) für V über in

$$(5.)\quad \begin{cases} V = \left(\frac{2}{n}\right) U^n \cdot \dfrac{cn\left(\frac{2i\varpi}{n}, c_1\right) cn\left(\frac{4i\varpi}{n}, c_1\right) \dots cn\left(\frac{(n-1)i\varpi}{n}, c_1\right)}{dn^2\left(\frac{2i\varpi}{n}, c_1\right) dn^2\left(\frac{4i\varpi}{n}, c_1\right) \dots dn^2\left(\frac{(n-1)i\varpi}{n}, c_1\right)} \\ \quad = \left(\frac{2}{n}\right) U^n \cdot \dfrac{cn\left(\frac{2i\varpi}{n}, c_1\right) cn\left(\frac{4i\varpi}{n}, c_1\right) \dots cn\left(\frac{(n-1)i\varpi}{n}, c_1\right)}{\left(c^2 + c_1^2 cn^2\left(\frac{2i\varpi}{n}, c_1\right)\right)\left(c^2 + c_1^2 cn^2\left(\frac{4i\varpi}{n}, c_1\right)\right) \dots \left(c^2 + c_1^2 cn^2\left(\frac{(n-1)i\varpi}{n}, c_1\right)\right)}, \end{cases}$$

und es folgt nunmehr durch Vergleichung der Ausdrücke (3.) und (5.)*), dass $\frac{V}{U^n}$ derselben oben gefundenen Gleichung genügt, in der nur statt u^8 die Grösse

$$u_1^8 = 1 - u^8 = c_1^2$$

zu setzen ist, mit andern Worten, dass die obige Gleichung unverändert bleibt, wenn $1 - u^8$ an Stelle von u^8 tritt.

Da sich nun aber eine rationale Function von x, wenn sie die Eigenschaft hat, dass sie unverändert bleibt, wenn $1-x$ an Stelle von x gesetzt wird, als rationale Function von $x(1-x)$ darstellen lässt, so schliesst man, dass die Coefficienten der oben gefundenen Gleichung nur von der Grösse

$$u^8 u_1^8 = U^8$$

abhängen, so dass, wenn man die Gleichung mit

$$U^{n(n+1)}$$

*) mit Rücksicht auf den vorher gegebenen Nachweis, dass die Werthe von der Form $\frac{2s\varpi_\alpha}{n}$ sich von den durch den Ausdruck

$$\frac{4mC + 4m'iC'}{n}$$

dargestellten Werthen nicht unterscheiden.

multiplicirt, sich eine Gleichung von der Form ergiebt

$$V^{n+1}+C_1 V^n+C_2 V^{n-1}+\cdots+C_n V+C_{n+1} = 0,$$

in der $C_1, C_2, \ldots C_{n+1}$ rationale Functionen von U sind, und deren Lösungen durch die Ausdrücke

$$\chi\left(\frac{\tau-16\xi}{n}\right),\quad \chi(n\tau)$$

dargestellt werden.

§. 6.

Existenz einer Gleichung zwischen V und U, wenn der Grad der Transformation eine beliebige ungrade Zahl ohne quadratische Theiler ist.

Sei p eine Primzahl und die zu dem Transformationsgrade p gehörige Gleichung $p+1^{\text{ten}}$ Grades zwischen W und U:

$$(1.)\qquad W^{p+1}+C_1 W^p+C_2 W^{p-1}+\cdots+C_p W+C_{p+1} = 0,$$

deren Lösuugen durch die Grössen

$$\chi\left(\frac{\tau-16\xi}{p}\right),\quad \chi(p\tau)$$

dargestellt werden, so erhält man, wenn man auf jede dieser Lösungen sämmtliche durch die folgenden Schemata repräsentirten Transformationen

$$\begin{vmatrix}1 & 0\\ 16\xi & q\end{vmatrix}\quad \begin{vmatrix}q & 0\\ 0 & 1\end{vmatrix}$$

anwendet, in denen q eine Primzahl ist, für die χ, welche aus der Zusammensetzung dieser Transformationen mit irgend einer der den obigen Lösungen entsprechenden Transformationen hervorgehen, die folgende Gleichung:

$$(2.)\qquad V^{q+1}+B_1 V^q+B_2 V^{q-1}+\cdots+B_q V+B_{q+1} = 0,$$

in der $B_1, B_2, \ldots B_{q+1}$ rationale Functionen von W sind, und W eine jede der Lösungen der Gleichung (1.) bedeutet. Eliminirt man nun zwischen (1.) und (2.) die Grösse W, indem man, wenn

$$W_1,\quad W_2,\quad \ldots\quad W_{p+1}$$

die Lösungen der Gleichung (1.) und

$$B_1^{(\alpha)},\quad B_2^{(\alpha)},\quad \ldots\quad B_{q+1}^{(\alpha)}$$

die der Lösung W_α entsprechenden Coefficienten der Gleichung (2.) bezeichnen, das folgende Product bildet:

$$(V^{q+1}+B_1^{(1)} V^q+\cdots+B_q^{(1)} V+B_{q+1}^{(1)})(V^{q+1}+B_1^{(2)} V^q+\cdots+B_q^{(2)} V+B_{q+1}^{(2)})\ldots$$
$$\ldots(V^{q+1}+B_1^{(p+1)} V^q+\cdots+B_q^{(p+1)} V+B_{q+1}^{(p+1)}) = 0,$$

so wird die resultirende Gleichung

$$(3.)\qquad V^{(p+1)(q+1)} + A_1 V^{(p+1)(q+1)-1} + \cdots + A_{(p+1)(q+1)-1} V + A_{(p+1)(q+1)} = 0,$$

in der die Grössen

$$A_1, \quad A_2, \quad \ldots \quad A_{(p+1)(q+1)}$$

als symmetrische rationale Functionen der W rationale Functionen von U bedeuten, zu Lösungen die χ-Functionen für diejenigen Argumente haben, welche den aus den beiden Transformationssystemen

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 16\xi_1 & p \end{vmatrix} \begin{vmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 16\xi_2 & q \end{vmatrix} \begin{vmatrix} q & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

zusammengesetzten Transformationen entsprechen, also die Lösungen

$$\chi\left(\frac{\tau-16x_1}{pq}\right), \quad \chi\left(\frac{p\tau-16x_2}{q}\right), \quad \chi\left(\frac{q\tau-16x_3}{p}\right), \quad \chi(pq\tau),$$

oder, wie oben gezeigt, die in dem folgenden Ausdrucke enthaltenen Werthe:

$$V = \left(\frac{2}{n}\right) U^n \frac{snc\frac{2\varpi}{n}\, snc\frac{4\varpi}{n} \cdots snc\frac{(n-1)\varpi}{n}}{dn\frac{2\varpi}{n}\, dn\frac{4\varpi}{n} \cdots dn\frac{(n-1)\varpi}{n}},$$

wenn $n = pq$ gesetzt wird.

Schliesst man in derselben Weise weiter, indem man eine dritte, vierte Primzahl u. s. w. zu Hülfe nimmt, so gelangt man zu dem Resultat, dass einem beliebigen unpaaren Transformationsgrad ohne quadratische Theiler

$$n = pqr \ldots t,$$

wo $p, q, r, \ldots t$ verschiedene Primzahlen bedeuten, eine Gleichung vom Grade

$$\nu = (p+1)(q+1)(r+1)\ldots(t+1)$$

entspricht von der Form

$$V^\nu + C_1 V^{\nu-1} + C_2 V^{\nu-2} + \cdots + C_{\nu-1} V + C_\nu = 0,$$

in der $C_1, C_2, \ldots C_\nu$ rationale Functionen von U bedeuten, und deren Lösungen dargestellt werden durch

$$V = \left(\frac{2}{n}\right) U^n \frac{snc\frac{2\varpi}{n}\, snc\frac{4\varpi}{n} \cdots snc\frac{(n-1)\varpi}{n}}{dn\frac{2\varpi}{n}\, dn\frac{4\varpi}{n} \cdots dn\frac{(n-1)\varpi}{n}},$$

worin ϖ der Reihe nach die den einzelnen Repräsentanten entsprechenden Werthe annimmt, oder durch

$$\chi\left(\frac{t\tau - 16\xi}{t'}\right),$$

worin für t ein jeder Divisor von n, $t' = \frac{n}{t}$ und für ξ eine jede Zahl aus der Reihe

$$0, \; 1, \; 2, \; \ldots \; t'-1$$

zu setzen ist.

§. 7.

Bestimmung des letzten Gliedes der (V, U) Gleichung.

Nachdem die Existenz der (V, U) Gleichung für einen beliebigen unpaaren Transformationsgrad (ohne quadratischen Theiler) nachgewiesen, und deren Lösungen in doppelter Form dargestellt worden, gehen wir dazu über, die Eigenschaften dieser Gleichungen zu untersuchen und beginnen mit der Herleitung des von der Grösse V freien Gliedes.

Ist p eine Primzahl, so werden die Lösungen der Gleichung

$$V^{p+1} + C_1 V^p + C_2 V^{p-1} + \cdots + C_p V + C_{p+1} = 0$$

in der Form darstellbar sein

$$V = \left(\frac{2}{p}\right) U^p \frac{snc\frac{2\varpi}{p}\, snc\frac{4\varpi}{p} \ldots snc\frac{(p-1)\varpi}{p}}{dn\frac{2\varpi}{p}\, dn\frac{4\varpi}{p} \ldots dn\frac{(p-1)\varpi}{p}},$$

so dass das von V freie Glied der Gleichung durch den Ausdruck bestimmt wird:

$$C_{p+1} = U^{p(p+1)} \Pi \frac{snc\left(\frac{4mC + 4m'iC'}{p}\right)}{dn\left(\frac{4mC + 4m'iC'}{p}\right)},$$

worin den m und m' die folgenden Werthecombinationen beizulegen sind:

$$m : 1, \; 2, \; 3, \; \ldots \; \frac{p-1}{2} \qquad\qquad m : 0$$

$$m' : 0, \; \pm 1, \; \pm 2, \; \ldots \; \pm\frac{p-1}{2} \qquad\qquad m' : 1, \; 2, \; 3, \; \ldots \; \frac{p-1}{2}.$$

Da nun aber, wie bekannt:

$$\Pi\, cn\left(\frac{4mC + 4m'iC'}{p}\right) = \pm\left(\frac{c_1}{c}\right)^{\frac{p^2-1}{4}}$$

$$\Pi\, dn\left(\frac{4mC + 4m'iC'}{p}\right) = \pm c_1^{\frac{p^2-1}{4}},$$

so nimmt das letzte Glied die Gestalt an

$$C_{p+1} = \varepsilon\, U^{p(p+1)} \frac{c_1^{\frac{p^2-1}{4}}}{c^{\frac{p^2-1}{4}} c_1^{\frac{p^2-1}{2}}} = \varepsilon \frac{U^{p(p+1)}}{U^{p^2-1}} = \varepsilon\, U^{p+1},$$

worin ε die positive oder negative Einheit bedeutet.

Stellt man jedoch das letzte Glied durch das Product aller χ-Functionen dar, so ergiebt sich, da die Repräsentanten der nicht äquivalenten Klassen bekanntlich den folgenden Werthen von q entsprechen:

$$q^{\frac{1}{p}}, \quad \alpha q^{\frac{1}{p}}, \quad \alpha^2 q^{\frac{1}{p}}, \quad \ldots \quad \alpha^{p-1} q^{\frac{1}{p}}, \quad q^p,$$

wenn $\alpha^p = 1$, der nachstehende Werth für C_{p+1}:

$$\begin{aligned} C_{p+1} = (\sqrt{2})^{p+1} q^{\frac{p+1}{8}} & \left\{\left(1-q^{\frac{1}{p}}\right)\left(1+q^{\frac{2}{p}}\right)\left(1-q^{\frac{3}{p}}\right)\ldots\right\}^3 \times \\ & \left\{\left(1-\alpha q^{\frac{1}{p}}\right)\left(1+\alpha^2 q^{\frac{2}{p}}\right)\left(1-\alpha^3 q^{\frac{3}{p}}\right)\ldots\right\}^3 \times \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots \\ & \left\{\left(1-\alpha^{p-1} q^{\frac{1}{p}}\right)\left(1+\alpha^{2(p-1)} q^{\frac{2}{p}}\right)\left(1-\alpha^{3(p-1)} q^{\frac{3}{p}}\right)\ldots\right\}^3 \times \\ & \{(1-q^p)(1+q^{2p})(1-q^{3p})\ldots\}^3, \end{aligned}$$

aus dem das obige ε zu bestimmen ist. Lässt man aber u, also auch q sich der Null nähern, so wird

$$\lim U = \lim \sqrt{2}\, q^{\frac{1}{8}},$$

also

$$C_{p+1} = (\sqrt{2})^{p+1} q^{\frac{p+1}{8}} . \varepsilon$$

und nach dem zweiten Ausdrucke

$$C_{p+1} = (\sqrt{2})^{p+1} q^{\frac{p+1}{8}},$$

also $\varepsilon = 1$, und es lautet somit die (V, U) Gleichung für primzahlige Transformationsgrade

$$V^{p+1} + C_1 V^p + C_2 V^{p-1} + \cdots + C_p V + U^{p+1} = 0.$$

Es ergiebt sich hieraus unmittelbar nach den Auseinandersetzungen des vorigen Paragraphen, dass für einen beliebigen unpaaren Transformationsgrad

$$n = pqr\ldots t,$$

wenn

$$\nu = (p+1)(q+1)(r+1)\ldots(t+1)$$

gesetzt wird, die zugehörige (V, U) Gleichung die Form hat:

$$V^\nu + C_1 V^{\nu-1} + C_2 V^{\nu-2} + \cdots + C_{\nu-1} V + U^\nu = 0.$$

§. 8.

Ueber die Vertauschung von V und U in der (V, U) Gleichung.

Bevor wir die Eigenschaften der Coefficienten unserer Gleichungen weiter verfolgen, ist es nöthig, zu sehen, was aus den Lösungen derselben wird, wenn V statt der Grösse U gesetzt wird, oder zu untersuchen, welche Werthe in diesem Falle für eine Transformation n^{ten} Grades die Lösungen der (V, U) Gleichung annehmen.

Da hier für τ die Grösse

$$\frac{t\tau - 16\xi}{t'}$$

eintritt, worin t ein Divisor von n, $t' = \frac{n}{t}$ und ξ irgend eine der Zahlen 0, 1, 2, ... $t'-1$ bedeutet, so wird sich eine der Lösungen, welche durch das Transformationsschema

$$\begin{vmatrix} t' & 0 \\ 16x & t \end{vmatrix}$$

bestimmt ist, wenn x so gewählt wird, dass

$$x + \xi = pt$$

und p eine ganze Zahl ist, in der Form:

$$\chi\left(\frac{t' \cdot \frac{t\tau - 16\xi}{t'} - 16x}{t}\right) = \chi(\tau + 16p)$$

darstellen, also nach §. 2 (7.) *) in

$$\chi(\tau)$$

übergehen, und es wird somit die (V, U) Gleichung, wenn statt U die Grösse V gesetzt wird, zu einer ihrer Lösungen die Grösse U haben. Nimmt man nun den gleich zu beweisenden Satz von der Irreductibilität der (V, U) Gleichung zu Hülfe, so folgt daraus, dass dieselbe unverändert bleibt bei einer Vertauschung von U und V.

Aus dieser Eigenschaft lässt sich nun unmittelbar eine wichtige Folgerung für die Coefficienten der (V, U) Gleichung machen. Setzen wir dieselbe nämlich in die Form

$$C_\nu V^\nu + C_{\nu-1} V^{\nu-1} + C_{\nu-2} V^{\nu-2} + \cdots + C_1 V + C_\nu U^\nu = 0,$$

worin C_ν der kleinste gemeinsame Dividuus der Nenner der früheren Coefficienten

---

*) $a_0 = -1$, $a_1 = 16p$, $b_0 = 0$, $b_1 = -1$.

der (V, U) Gleichung ist, und also

$$C_\nu, \quad C_1, \quad C_2, \quad \ldots \quad C_{\nu-1}$$

jetzt ganze rationale Functionen von U bedeuten, so werden die Coefficienten keine höheren Potenzen von U enthalten dürfen als die ν^{te}, da die Gleichung für eine Vertauschung von V und U unverändert bleibt, und höhere Potenzen von V als die ν^{te} in derselben nicht vorkommen. Es folgt, dass C_ν eine Constante ist, und dass somit die zu dem Transformationsgrade n gehörige (V, U) Gleichung sich in der Form

$$V^\nu + C_1 V^{\nu-1} + C_2 V^{\nu-2} + \cdots + C_{\nu-1} V + U^\nu = 0$$

darstellen lässt, in der

$$C_1, \quad C_2, \quad \ldots \quad C_{\nu-1}$$

ganze Functionen von U bedeuten.

§. 9.

Irreductibilität der (V, U) Gleichung.

Ich gehe nunmehr zu dem Beweise der Irreductibilität der (V, U) Gleichung für einen beliebigen unpaaren Transformationsgrad über.

Da für

$$U = \chi(\tau)$$

nach der vorangegangenen Theorie sämmtliche Lösungen der (V, U) Gleichung in der Form

$$V = \chi\left(\frac{t\tau - 16\xi}{t'}\right)$$

darstellbar sind, die (V, U) Gleichung also die Gestalt hat:

$$(1.) \qquad F\left\{\chi(\tau), \chi\left(\frac{t\tau - 16\xi}{t'}\right)\right\} = 0,$$

worin F eine ganze Function, t der Reihe nach alle Divisoren von n, dem Grade der Transformation, bedeutet, $t' = \frac{n}{t}$, und dem ξ zu jedem t' der Reihe nach die Werthe $0, 1, 2, \ldots t'-1$ beigelegt werden, so würde, wenn wir annehmen, die Gleichung (1.) sei nicht irreductibel, eine Gleichung von niedrigerem Grade existiren, deren Coefficienten ebenfalls ganze rationale Functionen von $U = \chi(\tau)$ wären, und die mindestens eine Lösung von der Form

$$\chi\left(\frac{\delta\tau - 16x}{\delta'}\right)$$

mit der (V, U) Gleichung gemein hat. Sei nun diese Gleichung

$$(2.) \qquad f\left(\chi(\tau), \chi\left(\frac{\delta\tau - 16x}{\delta'}\right)\right) = 0,$$



worin δ wiederum ein Divisor von n, $\delta' = \frac{n}{\delta}$, $x < \delta'$ ist, so wird, wenn an die Stelle von τ der Ausdruck $\tau - 16r$ gesetzt und zu gleicher Zeit beachtet wird, dass nach (5.) §. 2:

$$\chi(\tau+2) = e^{\frac{2\pi i}{8}}\chi(\tau),$$

also

$$\chi(\tau+16) = \chi(\tau)$$

ist, die Gleichung (2.) in

$$f\left(\chi(\tau), \chi\left(\frac{\delta\tau - 16(x - r\delta)}{\delta'}\right)\right) = 0$$

übergehen. Da sich nun r so bestimmen lässt, dass

$$x - r\delta \equiv \xi_1 \pmod{\delta'},$$

worin ξ_1 eine beliebig gegebene ganze Zahl $< \delta'$ ist, so sieht man, dass die Gleichung (2.) jeden Ausdruck von der Form

$$\chi\left(\frac{\delta\tau - 16\xi_1}{\delta'}\right)$$

zur Lösung haben muss, also auch die Wurzel

$$\chi\left(\frac{\delta\tau}{\delta'}\right)$$

mit der (V, U) Gleichung gemein hat; es besteht somit die Gleichung:

$$(3.)\qquad f\left(\chi(\tau), \chi\left(\frac{\delta\tau}{\delta'}\right)\right) = 0.$$

Setzt man ferner in Gleichung (3.) statt τ

$$\frac{b_0 - a_0\tau}{a_1\tau - b_1},$$

worin a_0, a_1, b_0, b_1 Transformationszahlen einer noch näher zu bestimmenden linearen Transformation sein sollen, so erhält man

$$(4.)\qquad f\left(\chi\left(\frac{b_0 - a_0\tau}{a_1\tau - b_1}\right),\quad \chi\left(\frac{\delta b_0 - \delta a_0\tau}{\delta' a_1\tau - \delta' b_1}\right)\right) = 0,$$

und es wird darauf ankommen, diejenige Transformation, welche das Argument der zweiten χ-Function in f liefert, also die Transformation

$$\begin{vmatrix} \delta a_0 & \delta' a_1 \\ \delta b_0 & \delta' b_1 \end{vmatrix}$$

mit der folgenden

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & n \end{vmatrix}\begin{vmatrix} \alpha_0 & \alpha_1 \\ \beta_0 & \beta_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_0 & \alpha_1 \\ n\beta_0 & n\beta_1 \end{vmatrix}$$

zu identificiren, in der α_0, α_1, β_0, β_1 ebenfalls lineare Transformationszahlen sein sollen, die noch näher bestimmt werden. Die Identificirung liefert nun die folgenden Gleichungen

$$\delta a_0 = \alpha_0, \quad \delta' a_1 = \alpha_1, \quad \delta b_0 = n\beta_0, \quad \delta' b_1 = n\beta_1 \quad \text{oder}$$
$$\delta a_0 = \alpha_0, \quad \delta' a_1 = \alpha_1, \quad b_0 = \delta'\beta_0, \quad b_1 = \delta\beta_1,$$

woraus zuerst ersichtlich, dass

$$a_0 b_1 - a_1 b_0 = \alpha_0\beta_1 - \alpha_1\beta_0.$$

Setzt man nun

$$\alpha_0 = \alpha_0'\delta, \quad \alpha_1 = \alpha_1'.16\delta', \quad \beta_0 = 16\beta_0', \quad \beta_1 = \beta_1',$$

also

$$a_0 = \alpha_0', \quad a_1 = 16\alpha_1', \quad b_0 = 16\delta'\beta_0', \quad b_1 = \delta\beta_1'$$

und bestimmt die Grössen α_0', α_1', β_0', β_1' so, dass sie der Bedingungsgleichung genügen:

$$(m) \qquad \delta\alpha_0'\beta_1' - 16^2\delta'\alpha_1'\beta_0' = 1,$$

was stets möglich ist, da δ und $16^2\delta'$ zu einander relativ prim sind, so werden sich α_0 und a_0, β_1 und b_1 als ungrade Zahlen, α_1 und a_1, β_0 und b_0 als grade Zahlen ergeben, welche durch 16 theilbar sind, und ausserdem ist aus Gleichung (m) zu ersehen, dass $\alpha_0\beta_1 \equiv 1$ (mod. 8) und ebenso $a_0 b_1 \equiv 1$ (mod. 8) ist; es folgt daher nach der ersten der Gleichungen (7.) des §.2, dass

$$\chi\left(\frac{b_0 - a_0\tau}{a_1\tau - b_1}\right) = \chi(\tau),$$
$$\chi\left(\frac{\beta_0 - \alpha_0\tau'}{\alpha_1\tau' - \beta_1}\right) = \chi(\tau')$$

ist, und da nun

$$\chi\left(\frac{\delta b_0 - \delta a_0\tau}{\delta' a_1\tau - \delta' b_1}\right) = \chi\left(\frac{n\beta_0 - \alpha_0\tau}{\alpha_1\tau - n\beta_1}\right) = \chi\left(\frac{\beta_0 - \alpha_0\frac{\tau}{n}}{\alpha_1\frac{\tau}{n} - \beta_1}\right) = \chi\left(\frac{\tau}{n}\right)$$

sich ergiebt, so geht die Gleichung (4.) in die folgende über:

$$(5.) \qquad f\left(\chi(\tau), \chi\left(\frac{\tau}{n}\right)\right) = 0,$$

und es ist somit auch $\chi\left(\frac{\tau}{n}\right)$ eine Lösung der obigen Gleichung.

Ich will nun endlich nachweisen, dass, wenn die Gleichung (2.) oder (5.) die Wurzel $\chi\left(\frac{\tau}{n}\right)$ hat, sie auch die Grösse

$$\chi\left(\frac{t\tau - 16\xi}{t'}\right)$$

oder, was nach dem ersten Theile des Beweises genügend ist,

$$\chi\left(\frac{t\tau}{t'}\right),$$

worin $tt' = n$ ist, zur Lösung haben muss.

Macht man nämlich wiederum in Gleichung (5.) für τ die Substitution

$$\frac{b_0 - a_0\tau}{a_1\tau - b_1},$$

so geht dieselbe über in

$$(6.) \quad f\left(\chi\left(\frac{b_0 - a_0\tau}{a_1\tau - b_1}\right),\ \chi\left(\frac{b_0 - a_0\tau}{na_1\tau - nb_1}\right)\right) = 0,$$

und will man ferner diejenige Transformation, welche das Argument der zweiten χ-Function liefert, also die Transformation

$$\begin{vmatrix} a_0 & na_1 \\ b_0 & nb_1 \end{vmatrix}$$

mit der folgenden

$$\begin{vmatrix} t & 0 \\ 0 & t' \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \alpha_0 & \alpha_1 \\ \beta_0 & \beta_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_0 t & \alpha_1 t \\ \beta_0 t' & \beta_1 t' \end{vmatrix}$$

identificiren, so wird genau wie vorher zu setzen sein:

$$a_0 = a_0' t, \quad a_1 = 16 a_1', \quad b_0 = 16 b_0' t', \quad b_1 = b_1',$$
$$\alpha_0 = a_0', \quad \alpha_1 = 16 a_1' t', \quad \beta_0 = 16 b_0', \quad \beta_1 = t b_1',$$

wofür ausserdem die Gleichung zu befriedigen ist

$$t a_0' b_1' - 16^2 t' a_1' b_0' = 1,$$

und es ergiebt sich nunmehr genau in derselben Weise wie vorher aus Gleichung (5.) die folgende Gleichung:

$$f\left(\chi(\tau), \chi\left(\frac{t\tau}{t'}\right)\right) = 0,$$

also auch

$$f\left(\chi(\tau), \chi\left(\frac{t\tau - 16\xi}{t'}\right)\right) = 0.$$

Es ist somit erwiesen, dass, wenn eine Gleichung mit der (V, U) Gleichung eine Wurzel von der Form

$$\chi\left(\frac{\delta\tau - 16x}{\delta'}\right)$$

gemein hat, ihr auch jede andere durch den Ausdruck

$$\chi\left(\frac{t\tau - 16\xi}{t'}\right)$$

dargestellte Grösse als Wurzel zugehört, dass sie mit andern Worten durch sämmtliche Lösungen der (V, U) Gleichung befriedigt wird, da dies die Form der χ-Function für alle Repräsentanten der nicht äquivalenten Klassen war. Es ist daher jede zu einem beliebigen unpaaren Transformationsgrade (ohne quadratischen Theiler) gehörige (V, U) Gleichung irreductibel.

§. 10.

Ueber die auf die Grössen V und U der (V, U) Gleichung zugleich ausgeübten linearen Transformationen.

Es soll nunmehr untersucht werden, was aus der (V, U) Gleichung wird, wenn auf das vorgelegte Integral zuerst eine lineare Transformation ausgeübt wird, mit andern Worten, worin V und U übergehen, wenn statt τ

$$-\frac{1}{\tau} \quad \text{und} \quad \frac{\tau}{\tau+1}$$

oder statt u

$$u_1 \quad \text{und} \quad \frac{1}{u}$$

gesetzt wird, da sämmtliche linearen Transformationen, wie bekannt, sich durch successive Anwendung dieser beiden herleiten lassen.

Vor allen Dingen ist ersichtlich, dass für den Fall, dass $-\frac{1}{\tau}$ an die Stelle von τ tritt, die Grösse U unverändert bleibt, da

$$\chi\left(-\frac{1}{\tau}\right) = \chi(\tau)$$

ist; es folgt schon daraus, dass die (V, U) Gleichung für denselben Transformationsgrad dieselbe bleiben muss, und es wird nur darauf ankommen, zu untersuchen, in welcher Weise sich die Lösungen derselben unter einander vertauschen. Da jede Lösung der (V, U) Gleichung, wenn τ der Modul der ursprünglichen ϑ-Function ist, durch den Ausdruck

$$\chi\left(\frac{t\tau - 16\xi}{t'}\right)$$

dargestellt ist, so wird die Lösung der neuen Gleichung, welche eben derselben Transformation entspricht, die Form haben

$$\chi\left(\frac{t\left(-\frac{1}{\tau}\right) - 16\xi}{t'}\right) = \chi\left(\frac{-t - 16\xi\tau}{t'\tau}\right).$$

Wird nun das Argument dieser χ-Function identificirt mit dem ϑ-Modul, der zu der Transformation

$$\begin{vmatrix} \delta & 0 \\ 16x & \delta' \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \alpha_0 & \alpha_1 \\ \beta_0 & \beta_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \delta\alpha_0 & \delta\alpha_1 \\ 16x\alpha_0+\delta'\beta_0 & 16x\alpha_1+\delta'\beta_1 \end{vmatrix}$$

gehört, in welcher δ ein Theiler von n, $\delta' = \frac{n}{\delta}$, $x < \delta'$ und alle drei noch näher zu bestimmen sind, so ergeben sich die folgenden Gleichungen:

$$(1.) \quad 16x\alpha_0+\delta'\beta_0 = -t,$$

$$(2.) \quad \delta\alpha_0 = 16\xi,$$

$$(3.) \quad \delta\alpha_1 = t',$$

$$(4.) \quad 16x\alpha_1+\delta'\beta_1 = 0.$$

Sei nun δ der grösste gemeinschaftliche Theiler von 16ξ und t', so sind α_0 und α_1 bestimmt durch

$$\alpha_0 = \frac{16\xi}{\delta}, \quad \alpha_1 = \frac{t'}{\delta},$$

also α_0 eine grade durch 16 theilbare, α_1 eine ungrade Zahl.

Die Gleichung (4.), welche in

$$(5.) \quad 16x+t\beta_1 = 0$$

übergeht, liefert die Bestimmungen

$$x = k.t, \quad \beta_1 = -16k,$$

worin k eine noch näher anzugebende Zahl bedeutet. Endlich geht die Gleichung (1.) über in

$$(6.) \quad 16k\cdot\frac{16\xi}{\delta}+\frac{t'}{\delta}\cdot\beta_0 = -1,$$

welche Gleichung auflösbar ist, da $\frac{16\xi}{\delta}$ und $\frac{t'}{\delta}$ relativ prime Zahlen sind, und man sieht leicht, dass β_1 eine durch 16 theilbare grade, β_0 eine ungrade Zahl wird, so beschaffen, dass

$$\alpha_1.\beta_0 = \frac{t'}{\delta}\cdot\beta_0 = -1-16k\cdot\frac{16\xi}{\delta} \equiv 7 \qquad (\text{mod. } 8)$$

und

$$\alpha_0\beta_1-\alpha_1\beta_0 = -\frac{16\xi}{\delta}\cdot 16k+\left(1+16k\cdot\frac{16\xi}{\delta}\right) = 1$$

ist.

Es folgt aus der nachstehenden Gleichung des §. 2

$$\chi\left(\frac{b_0-a_0\tau}{a_1\tau-b_1}\right) = \chi(\tau)\left(\frac{2}{a_1 b_0}\right)e^{\frac{i\pi}{8}(a_0b_0-a_1b_1)},$$

dass

$$\chi\left(\frac{t\left(-\frac{1}{\tau}\right)-16\xi}{t'}\right) = \chi\left(\frac{\delta\tau-16x}{\delta'}\right),$$

und man erhält somit das Resultat, dass die durch den Ausdruck

$$\chi\left(\frac{t\tau-16\xi}{t'}\right)$$

dargestellte Lösung der (V, U) Gleichung für den ursprünglichen ϑ-Modul τ bei der Verwandlung von τ in $-\frac{1}{\tau}$ in eine andere Lösung derselben Gleichung von der Form

$$\chi\left(\frac{\delta\tau-16x}{\delta'}\right)$$

übergeht, in welcher δ der grösste gemeinschaftliche Theiler zwischen 16ξ und t', $\delta'=\frac{n}{\delta}$, und die Grösse x aus den Gleichungen

$$x=k.t, \quad 16k\cdot\frac{16\xi}{\delta}+\frac{t'}{\delta}\cdot\beta_0=-1$$

so zu bestimmen ist, dass sie unterhalb δ' liegt.

Macht man ferner auf das vorgelegte Integral die lineare Substitution

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix},$$

für welche sich τ in $\frac{\tau}{1+\tau}$ verwandelt, so wird vermöge der Gleichung (§. 2):

$$\chi\left(\frac{b_0-a_0\tau}{a_1\tau-b_1}\right) = \frac{\chi(\tau)}{\varphi^2(\tau)}\left(\frac{2}{a_0}\right)e^{\frac{i\pi}{8}(a_1b_1+a_0b_0)}$$

U in

$$\frac{U}{u^2}\cdot e^{-\frac{i\pi}{8}}$$

übergehen. Um nun die Lösungen der (V, U) Gleichung für die Transformation n^{ten} Grades zu untersuchen, wird es wieder darauf ankommen, die Function

$$\chi\left(\frac{t\frac{\tau}{1+\tau}-16\xi}{t'}\right) = \chi\left(\frac{(t-16\xi)\tau-16\xi}{t'+t'\tau}\right)$$

mit der χ-Function, welche der Transformation

$$\begin{vmatrix} \delta & 0 \\ 16x & \delta' \end{vmatrix}\begin{vmatrix} \alpha_0 & \alpha_1 \\ \beta_0 & \beta_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \delta\alpha_0 & \delta\alpha_1 \\ 16x\alpha_0+\delta'\beta_0 & 16x\alpha_1+\delta'\beta_1 \end{vmatrix}$$

zugehört, zu identificiren. Es ergeben sich die Gleichungen:

$$(1.)\quad 16x\alpha_0+\delta'\beta_0 = -16\xi,$$
$$(2.)\quad \delta\alpha_0 = 16\xi-t,$$
$$(3.)\quad \delta\alpha_1 = t',$$
$$(4.)\quad 16x\alpha_1+\delta'\beta_1 = -t';$$

nimmt man für δ den grössten gemeinsamen Theiler zwischen

$$16\xi-t \text{ und } t',$$

so wird

$$\alpha_0=\frac{16\xi-t}{\delta},\quad \alpha_1=\frac{t'}{\delta},$$

somit beide ungrade Zahlen, und man sieht leicht, dass die vier Grössen α_0, α_1, β_0, β_1 der Gleichung

$$\alpha_0\beta_1-\alpha_1\beta_0 = 1$$

genügen, also Transformationszahlen einer linearen Transformation sind. Da nunmehr die Gleichung (4.) in

$$16x+t\beta_1 = -\delta$$

übergeht, also

$$x = x_1+tm,$$
$$\beta_1 = b_1-16m$$

zu Lösungen hat, worin x_1 und b_1 zwei specielle Lösungen, m eine beliebige ganze Zahl bedeuten, so wird nur noch nachzuweisen sein, dass man m und β_0 so zu bestimmen im Stande ist, dass der Gleichung (1.) Genüge geschieht. Nun geht diese aber, wie leicht zu sehen, mit Benutzung der oben gefundenen Werthe in

$$16m(16\xi-t)-t'\beta_0 = b_1(16\xi-t)+\delta$$

über und ist offenbar, da δ der grösste gemeinsame Theiler von $16\xi-t$ und t' ist, stets auflösbar; es ergeben sich somit

$$\alpha_0,\quad \alpha_1,\quad \beta_0,\quad \beta_1$$

als lineare Transformationszahlen von der Beschaffenheit, dass alle ungrade, nur $\beta_0\equiv 0 \pmod{16}$ ist (nach (1.)), und man erhält daher nach der oben angeführten Transformationsformel der χ, da

$$\left(\frac{2}{\alpha_0}\right)=\left(\frac{2}{\frac{16\xi-t}{\delta}}\right)=\left(\frac{2}{\delta}\right)\left(\frac{2}{16\xi-t}\right)=\left(\frac{2}{t\delta}\right)$$

ist, als Lösung der (V, U) Gleichung, welche der ursprünglichen

$$V = \chi\left(\frac{t\tau-16\xi}{t'}\right)$$

entspricht, die nachfolgende:

$$\left(\frac{2}{t\delta}\right) e^{\frac{i\pi}{8}\alpha_1\beta_1} \frac{\chi\left(\frac{\delta\tau-16x}{\delta'}\right)}{\varphi^3\left(\frac{\delta\tau-16x}{\delta'}\right)},$$

in der δ, δ', x sowie α_1, β_1 in der oben angegebenen Weise bestimmt werden, mit andern Worten, von Einheiten abgesehen eine andere Lösung der ursprünglichen (V, U) Gleichung dividirt durch die dritte Potenz des transformirten Integralmoduls, welcher zu der dieser zweiten Lösung entsprechenden Transformation gehört. Setzt man daher in die (V, U) Gleichung

$$\frac{U}{u^3} e^{\frac{i\pi}{8}} \text{ für } U, \qquad \frac{V}{v^3}\left(\frac{2}{t\delta}\right) e^{\frac{i\pi}{8}\alpha_1\beta_1} \text{ für } V,$$

so hat die neue Gleichung mit der vorgelegten eine Lösung gemein.

Aus diesen beiden linearen Transformationen lassen sich nun aber die Resultate für all' die andern unmittelbar ableiten, und es ist zugleich eine Methode gegeben, wie man die Umwandlung der Lösungen der (V, U) Gleichung untersucht, wenn auf u beliebige Transformationen ausgeübt werden.

§. 11.

Entwicklung der (V, U) Gleichung für einen beliebigen unpaaren Transformationsgrad ohne quadratischen Theiler.

Um nun für einen beliebigen unpaaren Transformationsgrad ohne quadratischen Theiler die (V, U) Gleichung wirklich herzustellen, ist es nothwendig, die allgemeine Form der Coefficienten

$$C_1, \quad C_2, \quad \ldots \quad C_{\nu-1}$$

in der Gleichung

$$V^\nu + C_1 V^{\nu-1} + C_2 V^{\nu-2} + \cdots + C_{\nu-1} V + U^\nu = 0$$

genauer zu untersuchen, in welcher, wenn

$$n = pqr \ldots t$$

gesetzt wird,

$$\nu = (p+1)(q+1)\ldots(t+1)$$

ist.

Da nun, wie in §. 5 nachgewiesen worden, wenn n eine Primzahl bedeutet,

$$\frac{V_1^r + V_2^r + \cdots + V_{n+1}^r}{U^{nr}}$$

eine rationale Function von U^8 ist, also wenn S_r die r^{te} Potenzsumme der Lösungen der (V, U) Gleichung darstellt,

$$(1.)\quad S_r = U^{nr}.f(U^8),$$

so folgt nach den Gleichungen

$$S_1 + C_1 = 0,$$
$$S_2 + S_1 C_1 + 2C_2 = 0,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

dass auch

$$(2.)\quad C_r = U^{nr} F(U^8),$$

wo C_r eine ganze Function von U darstellt; und dass eben diese Beziehung auch für die Coefficienten der (V, U) Gleichung eines zusammengesetzten Transformationsgrades besteht, geht daraus hervor, dass nach §. 6 die Coefficienten dieser (V, U) Gleichung als symmetrische rationale Functionen der Lösungen der zu den Primzahlfactoren gehörigen (V, U) Gleichungen dargestellt wurden, und diese sich dann offenbar nach bekannten Sätzen über symmetrische Functionen in der Form der Gleichung (2.) ergeben müssen.

Es hat somit im allgemeinsten Falle die (V, U) Gleichung die folgende Form:

$$(3.)\left\{\begin{array}{l} V^\nu + V^{\nu-1} U^{m_1}(a_0 + a_1 U^8 + a_2 U^{16} + \cdots) + V^{\nu-2} U^{m_2}(b_0 + b_1 U^8 + b_2 U^{16} + \cdots) \\ \qquad + \cdots V U^{m_{\nu-1}}(n_0 + n_1 U^8 + n_2 U^{16} + \cdots) + U^\nu = 0, \end{array}\right.$$

worin die Grössen $m_1, m_2, \ldots m_{\nu-1}$ durch die Congruenzen bestimmt sind:

$$(4.)\left\{\begin{array}{lll} m_1 \equiv n & & (\text{mod. } 8) \\ m_2 \equiv 2n & & (\text{mod. } 8) \\ \vdots & & \\ m_{\nu-1} \equiv (\nu-1)n & & (\text{mod. } 8), \end{array}\right.$$

und die als Coefficienten der V-Potenzen eintretenden Functionen von U höchstens vom Grade ν sind *).

Ist nun aber die allgemeine Form der Coefficienten der (V, U) Gleichung bestimmt, so ist es leicht, für einen beliebigen unpaaren Transformationsgrad die zugehörige (V, U) Gleichung selbst herzustellen.

---

*) Ich bemerke bei Gelegenheit des Bildungsgesetzes der Coefficienten der (V, U) Gleichung, dass die Coefficienten der v-Potenzen in der Modulargleichung genau denselben Bedingungen genügen, dass also die in der „Transf." aufgestellten und im Einleitungsparagraphen citirten Congruenzen besser durch die obigen zu ersetzen sind.

Da nämlich

$$(5.)\quad \begin{cases} U = \sqrt{2}.\sqrt[8]{q}\{(1-q)(1+q^2)(1-q^3)\ldots\}^3 \\ U^2 = (\sqrt{2})^2(\sqrt[8]{q})^2\{(1-q)(1+q^2)(1-q^3)\ldots\}^6 \text{ u. s. w.,} \end{cases}$$

und ausserdem die Lösung der (V, U) Gleichung, welche der Transformation

$$\begin{vmatrix} n & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

zugehört, durch

$$\chi(n\tau)$$

oder

$$(6.)\quad V = \sqrt{2}\sqrt[8]{q^n}\{(1-q^n)(1+q^{2n})(1-q^{3n})\ldots\}^3$$

dargestellt wird, endlich die Irrationalitäten in Bezug auf q aus der Gleichung herausfallen, da

$$V^{\nu-p}U^{m_p} = (\sqrt[8]{q})^{n(\nu-p)}(\sqrt[8]{q})^{m_p}f(q),$$

wo $f(q)$ eine Function mit nur ganzen Potenzen von q bedeutet, und

$$m_p \equiv pn \qquad (\text{mod. } 8)$$

ist, so werden wir, mit Rücksicht darauf, dass höhere Potenzen von U als die ν^{te} in der Gleichung nicht vorkommen dürfen, nur so viel Glieder in den unendlichen Reihen zu entwickeln brauchen, als die Anzahl der zu bestimmenden Grössen

$$a_0,\ a_1,\ \ldots,\ b_0,\ b_1,\ \ldots\ldots\ n_0,\ n_1\ \ldots$$

nöthig macht, um dieselben dadurch, dass man die einzelnen Coefficienten der Potenzen von q verschwinden lässt, zu bestimmen. Ich führe die Rechnung für die (V, U) Gleichungen durch, welche zu der Transformation dritten und fünften Grades gehören.

Da für $n=3$ die Congruenzen (4.) für m_1, m_2, m_3 die folgenden Bestimmungen geben:

$$\begin{aligned} m_1 &\equiv 3 \qquad (\text{mod. } 8) \quad \text{also} \quad m_1 = 3, \\ m_2 &\equiv 6 \qquad (\text{mod. } 8) \quad \text{also} \quad m_2 = 6, \\ m_3 &\equiv 9 \qquad (\text{mod. } 8) \quad \text{also} \quad m_3 = 1, \end{aligned}$$

so folgt, da höhere Potenzen von U als die vierte nicht vorkommen dürfen, die nachstehende Gleichung

$$V^4 + a_0V^3U^3 + b_0VU + U^4 = 0,$$

oder, wenn die Productentwicklungen der Grössen U und V eingesetzt werden:

$$2q\{1-q^3+\cdots\}^{12} + a_0 2^2 q\{1-q^3+\cdots\}^9\{1-q+q^2-\cdots\}^9 + b_0\{1-q^3+\cdots\}^3\{1-q+q^2-\cdots\}^3 \\ +2\{1-q+q^2-\cdots\}^{12} = 0,$$

und hieraus unmittelbar für a_0 und b_0 die Werthe

$$a_0 = 4, \quad b_0 = -2,$$

so dass die zur Transformation dritten Grades gehörige (V, U) Gleichung folgendermassen lautet:

$$V^4 + 4U^3V^3 - 2UV + U^4 = 0.$$

Ist $n = 5$, so lautet nach Bestimmung der $m_1, m_2, \ldots$ die zugehörige (V, U) Gleichung

$$V^6 + a_0 V^5 U^5 + b_0 V^4 U^2 + c_0 V^2 U^4 + d_0 VU + U^6 = 0$$

oder nach gehöriger Entwicklung der q-Producte:

$$2^2q^3\{1-18q^5+\cdots\} + a_0 2^4q^3\{1-15q+120q^2-210q^3+\cdots\} + b_0 2^2q^2\{1-6q+21q^2-30q^3+\cdots\}$$
$$+ c_0 2^2 q\{1-12q+78q^2-132q^3+\cdots\} + d_0\{1-3q+6q^2-13q^3+\cdots\}$$
$$+ 2^2\{1-18q+171q^2-1158q^3+\cdots\} = 0,$$

woraus sich

$$a_0 = 16, \quad b_0 = 15, \quad c_0 = 15, \quad d_0 = -4$$

ergiebt, und man erhält somit für die Transformation fünften Grades die folgende (V, U) Gleichung:

$$V^6 + 16U^5V^5 + 15U^2V^4 + 15U^4V^2 - 4UV + U^6 = 0.$$

Dritter Abschnitt.

Theorie der Multiplicatorgleichungen der elliptischen Functionen.

§. 12.

Die linearen Transformationsformeln für die Multiplicatoren.

Ich gehe nunmehr zu einer zweiten Klasse von Gleichungen über, die in der Theorie der complexen Multiplication der elliptischen Functionen eine wichtige Rolle spielen, nämlich zu den Gleichungen, welche zwischen dem Multiplicator (dem *Jacobi*schen M) und dem Integralmodul des zu transformirenden Integrals bestehen, und will vor allen Dingen im Folgenden, weil ich es zur Entwicklung der Eigenschaften dieser Klasse von Gleichungen später brauche, die linearen Transformationsformeln für die Multiplicatoren kurz zusammenstellen, wie sie sich unmittelbar aus den in §. 1 gegebenen Formeln für die sechs Fälle der linearen Transformation herleiten lassen *).

---

*) Man hat nur nöthig, sich aus den dort gegebenen Transformationsformeln das Integral

$$\frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}}$$

I. $a_0 \equiv 1, \quad a_1 \equiv 0, \quad b_0 \equiv 0, \quad b_1 \equiv 1 \quad (\text{mod. } 2)$

$$a = e^{\frac{i\pi}{2}(a_0-1)}, \qquad \text{im einfachsten Falle } a = 1.$$

II. $a_0 \equiv 0, \quad a_1 \equiv 1, \quad b_0 \equiv 1, \quad b_1 \equiv 0 \quad (\text{mod. } 2)$

$$a = e^{\frac{i\pi}{2}(a_0+b_0-2)}, \qquad \text{im einfachsten Falle } a = -i.$$

III. $a_0 \equiv 1, \quad a_1 \equiv 1, \quad b_0 \equiv 0, \quad b_1 \equiv 1 \quad (\text{mod. } 2)$

$$a = e^{-\frac{i\pi}{2}(a_0b_0+a_0-1)} \cdot \frac{1}{c}, \qquad \text{im einfachsten Falle } a = \frac{1}{c}.$$

IV. $a_0 \equiv 1, \quad a_1 \equiv 1, \quad b_0 \equiv 1, \quad b_1 \equiv 0 \quad (\text{mod. } 2)$

$$a = e^{\frac{i\pi}{2}(a_0b_0+a_0-1)} \cdot \frac{1}{c}, \qquad \text{im einfachsten Falle } a = \frac{i}{c}.$$

V. $a_0 \equiv 1, \quad a_1 \equiv 0, \quad b_0 \equiv 1, \quad b_1 \equiv 1 \quad (\text{mod. } 2)$

$$a = e^{\frac{i\pi}{2}(a_0-1)} \cdot \frac{1}{c_1}, \qquad \text{im einfachsten Falle } a = \frac{1}{c_1}.$$

VI. $a_0 \equiv 0, \quad a_1 \equiv 1, \quad b_0 \equiv 1, \quad b_1 \equiv 1 \quad (\text{mod. } 2)$

$$a = e^{\frac{i\pi}{2}(a_0b_1-a_0a_1-a_0-b_0+2)} \cdot \frac{1}{c_1}, \qquad \text{im einfachsten Falle } \frac{i}{c_1}.$$

§. 13.

Existenz der Multiplicatorgleichung des $n+1^{\text{ten}}$ Grades, wenn der Transformationsgrad eine Primzahl ist.

Ich will zur Herleitung der Gleichungen zwischen dem Multiplicator und dem Integralmodul nicht von dem in dem ersten § gefundenen Werthe

$$(1.) \qquad a = (-1)^{\frac{t'-1}{2}} \left\{ \frac{snc\frac{m\varpi}{n}\, snc\frac{2m\varpi}{n} \cdots snc\frac{n-1}{2}\cdot\frac{m\varpi}{n}}{sn\frac{m\varpi}{n}\, sn\frac{2m\varpi}{n} \cdots sn\frac{n-1}{2}\cdot\frac{m\varpi}{n}} \right\}^2,$$

in dem m eine beliebige zu n relativ prime Zahl bedeuten durfte, sondern von

---

herzustellen, um unmittelbar den Factor des Integrals

$$\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-c^2x^2)}}$$

zu erhalten.

dem Ausdrucke

$$(2.)\qquad M = (-1)^{\frac{n-1}{2}} \left\{ \frac{snc\frac{2\varpi}{n}\, snc\frac{4\varpi}{n} \cdots snc\frac{(n-1)\varpi}{n}}{sn\frac{2\varpi}{n}\, sn\frac{4\varpi}{n} \cdots sn\frac{(n-1)\varpi}{n}} \right\}^2 \text{*)}$$

ausgehen, der für alle die in den Schematen

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & n \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 16.1 & n \end{vmatrix} \cdots \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 16(n-1) & n \end{vmatrix}$$

enthaltenen Repräsentanten der nicht äquivalenten Klassen einer Primzahltransformation mit (1.) übereinstimmt, für den letzten Repräsentanten

$$\begin{vmatrix} n & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

jedoch denselben oder entgegengesetzten Werth giebt, je nachdem $n \equiv 1$ oder $\equiv 3$ (mod. 4) ist. Nun sind

$$snc^2\frac{2k\varpi}{n} \text{ und } sn^2\frac{2k\varpi}{n}$$

für ungerade und gerade k rationale Functionen von $snc^2\frac{2\varpi}{n}$, und daher M in der

---

*) Da

$$sncu = \frac{cnu}{dnu}, \quad \text{also} \quad \frac{sncu}{snu} = \frac{cnu}{snu\,dnu} = -\frac{1}{\frac{d\log cnu}{du}},$$

so lässt sich auch $\frac{1}{M}$ in die folgende Form setzen:

$$\frac{1}{M} = \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}.n^{n-1}}{\{2.4\ldots(n-1)\}^2} \left\{ \frac{d\log cn\frac{2\varpi}{n}}{d\varpi} \cdot \frac{d\log cn\frac{4\varpi}{n}}{d\varpi} \cdots \frac{d\log cn\frac{(n-1)\varpi}{n}}{d\varpi} \right\}^2.$$

Ich füge ausserdem noch den Werth des Multiplicators durch ϑ-Functionen ausgedrückt hinzu, wie ich ihn später brauche; da nämlich

$$sn\frac{2r\varpi}{n} = \frac{1}{\sqrt{c}} \frac{\vartheta\left(\frac{2r\omega}{n}\right)_1}{\vartheta\left(\frac{2r\omega}{n}\right)_0}, \qquad snc\frac{2r\varpi}{n} = \frac{1}{\sqrt{c}} \frac{\vartheta\left(\frac{2r\omega}{n}\right)_2}{\vartheta\left(\frac{2r\omega}{n}\right)_3}$$

ist, so erhält man den folgenden Ausdruck:

$$M = (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{\left\{\vartheta\left(\frac{2\omega}{n}\right)_0 \vartheta\left(\frac{4\omega}{n}\right)_0 \cdots \vartheta\left(\frac{(n-1)\omega}{n}\right)_0\right\}^2 \left\{\vartheta\left(\frac{2\omega}{n}\right)_2 \vartheta\left(\frac{4\omega}{n}\right)_2 \cdots \vartheta\left(\frac{(n-1)\omega}{n}\right)_2\right\}^2}{\left\{\vartheta\left(\frac{2\omega}{n}\right)_1 \vartheta\left(\frac{4\omega}{n}\right)_1 \cdots \vartheta\left(\frac{(n-1)\omega}{n}\right)_1\right\}^2 \left\{\vartheta\left(\frac{2\omega}{n}\right)_3 \vartheta\left(\frac{4\omega}{n}\right)_3 \cdots \vartheta\left(\frac{(n-1)\omega}{n}\right)_3\right\}^2}.$$

Form darstellbar

$$M = f\left(snc^2 \frac{2\varpi}{n}\right),$$

wenn f eine rationale Function bedeutet.

Da jedoch, wie man leicht aus (1.) mit Hinzuziehung von §. 3 ersieht, der Werth des Multiplicators unverändert bleibt, wenn man für m der Reihe nach die Zahlen

$$2, \; 4, \; \ldots \; n-1$$

setzt, so wird sich M als dieselbe rationale Function von

$$snc^2 \frac{4\varpi}{n}, \quad snc^2 \frac{6\varpi}{n}, \quad \ldots \quad snc^2 \frac{(n-1)\varpi}{n}$$

ergeben, und wenn man nunmehr die in §. 5 gemachten Schlüsse genau in derselben Weise hierauf anwendet, so folgt unmittelbar der Satz, dass die $n+1$ Werthe des Multiplicators M für die Transformationen, welche den Repräsentanten der nicht äquivalenten Klassen einer Primzahltransformation entsprechen, die Lösungen einer Gleichung $n+1^{\text{ten}}$ Grades sind von der Form

$$(3.) \qquad M^{n+1} + C_1 M^n + C_2 M^{n-1} + \cdots + C_n M + C_{n+1} = 0,$$

deren Coefficienten $C_1, C_2, \ldots C_{n+1}$ rationale Functionen von c^2 bedeuten. Diese Gleichung will ich die zur Transformation n (wenn n eine Primzahl ist) gehörige Multiplicatorgleichung nennen.

§. 14.

Grenzwerthe der Multiplicatoren für den verschwindenden Integralmodul.

Zum Beweise der Existenz der Multiplicatorgleichung für einen zusammengesetzten Transformationsgrad sowie zur Herleitung des Ausdruckes für den Multiplicator als eindeutige Function des gegebenen und transformirten Integralmoduls ist es nöthig, die Grenzwerthe der Multiplicatoren zu bestimmen für den Fall, dass sich der Integralmodul des gegebenen Integrals der Null nähert.

Die Werthe der Multiplicatoren waren durch den Ausdruck gegeben

$$M = (-1)^{\frac{n-1}{2}} \left\{ \frac{snc \frac{2\varpi}{n} snc \frac{4\varpi}{n} \ldots snc \frac{(n-1)\varpi}{n}}{sn \frac{2\varpi}{n} sn \frac{4\varpi}{n} \ldots sn \frac{(n-1)\varpi}{n}} \right\}^2,$$

welcher für verschwindende c in

$$(1.)\quad M = \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{\left(\operatorname{tang}\frac{2\varpi}{n}\operatorname{tang}\frac{4\varpi}{n}\dots\operatorname{tang}\frac{(n-1)\varpi}{n}\right)^2}$$

übergeht.

Untersuchen wir erst die Werthe dieses Ausdruckes für eine Primzahltransformation, für welche

$$\varpi = 2C(\tau - 16\xi) = 2iC' - 2.16\xi.C$$

und

$$\varpi = 2C$$

ist, so dass für die ersten n Repräsentanten der nicht äquivalenten Klassen der Ausdruck für den Multiplicator in

$$(2.)\quad M = \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{\left\{\operatorname{tang}\left(\frac{4iC'-4.16\xi.C}{n}\right)\operatorname{tang}\left(\frac{8iC'-8.16\xi.C}{n}\right)\dots\operatorname{tang}\left(\frac{2(n-1)iC'-2(n-1).16\xi.C}{n}\right)\right\}^2},$$

für den letzten in

$$(3.)\quad M = \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{\left\{\operatorname{tang}\frac{4C}{n}\operatorname{tang}\frac{8C}{n}\dots\operatorname{tang}\frac{2(n-1)C}{n}\right\}^2}$$

für verschwindende c übergeht.

Was nun den Grenzwerth des Ausdruckes (2.) betrifft, so wird, da

$$\operatorname{tang}\left(\frac{4\mu iC'-4\mu.16\xi.C}{n}\right) = \frac{1}{i}\cdot\frac{e^{\frac{-8\mu C'}{n}}.e^{\frac{-8\mu.16\xi.C}{n}i}-1}{e^{\frac{-8\mu C'}{n}}.e^{\frac{-8\mu.16\xi.C}{n}i}+1}$$

für $c=0$ $\left(C=\frac{\pi}{2},\ C'=\infty\right)$ den Werth i annimmt, für die ersten n Repräsentanten

$$M = \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{(-1)^{\frac{n-1}{2}}} = 1$$

sein, während der Ausdruck (3.) in

$$(4.)\quad M = \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{\left\{\operatorname{tang}\frac{2\pi}{n}\operatorname{tang}\frac{4\pi}{n}\dots\operatorname{tang}\frac{(n-1)\pi}{n}\right\}^2}$$

übergeht, oder da

$$\left\{\cos\frac{2\pi}{n}\cos\frac{4\pi}{n}\dots\cos\frac{(n-1)\pi}{n}\right\}^2 = \frac{1}{2^{n-1}}$$

$$\left\{\sin\frac{2\pi}{n}\sin\frac{4\pi}{n}\dots\sin\frac{(n-1)\pi}{n}\right\}^2 = \frac{n}{2^{n-1}} \text{*)}$$

ist, den Werth

$$(5.) \qquad M = \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{n}$$

annimmt.

Die Auffindung der Werthe des Multiplicators M für verschwindende c für den Fall, dass der Transformationsgrad eine beliebig zusammengesetzte ungrade Zahl ist, lässt sich nun zwar aus den obigen Auseinandersetzungen unmittelbar ableiten, doch wird es besser sein, diese Bestimmung den nächsten §§ einzufügen.

§. 15.

Existenz der Multiplicatorgleichung, wenn der Grad der Transformation eine beliebige ungrade Zahl ohne quadratischen Theiler ist.

Nachdem die Existenz einer Multiplicatorgleichung für einen primzahligen Transformationsgrad nachgewiesen, wollen wir hiervon ausgehend, ohne auf eine nähere Betrachtung des aus der Transformationstheorie hergenommenen Ausdruckes für M als Function von $snc\frac{2k\varpi}{n}$ und $sn\frac{2k\varpi}{n}$ einzugehen, die Existenz einer solchen Gleichung für einen beliebigen unpaaren Transformationsgrad ohne quadratischen Theiler herleiten.

Sei p eine Primzahl und die zu dem Transformationsgrade p gehörige Multiplicatorgleichung

$$(1.) \qquad M^{p+1}+f_1(c^2)M^p+f_2(c^2)M^{p-1}+\dots+f_n(c^2)M+f_{n+1}(c^2) = 0,$$

worin

$$f_1(c^2), \quad f_2(c^2), \quad \dots \quad f_{n+1}(c^2)$$

rationale Functionen von c^2 bedeuten, so wollen wir mit dieser Gleichung den

---

*) Die Richtigkeit dieser zweiten Gleichung leitet man unmittelbar daraus her, dass man in der Gleichung

$$\frac{x^n-1}{x-1} = \left(x-e^{-\frac{4\pi}{n}i}\right)\left(x-e^{\frac{4\pi}{n}i}\right)\left(x-e^{-\frac{8\pi}{n}i}\right)\left(x-e^{\frac{8\pi}{n}i}\right)\dots\left(x-e^{-\frac{2(n-1)\pi}{n}i}\right)\left(x-e^{\frac{2(n-1)\pi}{n}i}\right)$$

den Grenzübergang zu $x = 1$ macht.

bekannten Ausdruck für den Multiplicator *)

$$(2.)\qquad M^2 = \frac{1}{p}\,\frac{k(1-k^2)}{c(1-c^2)}\,\frac{dc}{dk}$$

verbinden, der, wenn für k der Reihe nach die $p+1$ Wurzeln der zum Transformationsgrade p gehörigen Modulargleichung gesetzt werden, die Quadrate der $p+1$ Lösungen der Gleichung (1.) liefern wird. Man weiss nun, dass jedem Repräsentanten der nicht äquivalenten Klassen ein bestimmter transformirter Modul und ein dazugehöriger Multiplicator entspricht, und es wird darauf ankommen, diesen Multiplicator als eindeutige Function des gegebenen und transformirten Integralmoduls darzustellen. Sucht man nämlich zwischen der linken Seite der Gleichung (1.) und der linken Seite der auf Null gebrachten Gleichung (2.) den grössten gemeinschaftlichen Theiler, so muss dieser Theiler in Bezug auf M vom ersten Grade sein und c sowohl als k rational enthalten. Denn dass die beiden Polynome für jedes der $p+1$ transformirten k einen gemeinsamen Theiler überhaupt haben, ist an sich klar, es könnte nur der Fall eintreten, dass bei der Division der Coefficient von M in dem letzten Reste sowie der von M freie Theil, die beide nur von k und c abhängen, vermöge der Modulargleichung verschwinden; dann würde aber der Ausdruck

$$M^2 - \frac{1}{p}\,\frac{k(1-k^2)}{c(1-c^2)}\,\frac{\partial c}{\partial k},$$

was auch k für einen Modul der Repräsentanten der nicht äquivalenten Klassen bedeuten mag, in (1.) enthalten sein, weil die Modulargleichung eine irreductible ist, und es müsste also die Multiplicatorgleichung zu jeder Lösung auch den entgegengesetzten Werth als Lösung enthalten. Diese Eigenschaft kann jedoch die Multiplicatorgleichung für einen primzahligen Transformationsgrad nicht besitzen, da sie, wie im vorigen Paragraphen nachgewiesen worden, für $c=0$ in die Form übergehen muss:

$$(M-1)^p\left(M - \frac{(-1)^{\frac{p-1}{2}}}{p}\right) = 0;$$

es folgt somit, dass der grösste gemeinsame Theiler zwischen jenen beiden Polynomen vom ersten Grade sein muss, mit andern Worten, dass sich M als eindeutige rationale Function von c^2 und dem zu demselben Repräsentanten gehörigen k^2 ausdrücken lässt.

*) „Transf." §. 42.

Sei nun auf das Integral mit dem Modul c^2 eine Primzahltransformation vom Grade p ausgeübt, so mögen die den Repräsentanten der nicht äquivalenten Klassen entsprechenden transformirten Moduln mit

$$k_1, \quad k_2, \quad \ldots \quad k_p, \quad k_{p+1},$$

die entsprechenden Multiplicatoren mit

$$M_1, \quad M_2, \quad \ldots \quad M_p, \quad M_{p+1}$$

bezeichnet werden, so dass die Gleichung statthat

$$M^{p+1} + f_1(c^2) M^p + \cdots + f_p(c^2) M + f_{p+1}(c^2) = 0,$$

deren Lösungen $M_1, M_2, \ldots M_{p+1}$ sind.

Wird nun von neuem auf jedes der erhaltenen Integrale eine Primzahltransformation vom Grade q angewandt, so setzen sich sämmtliche Repräsentanten der nicht äquivalenten Klassen vom Grade p

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 16\xi & p \end{vmatrix} \begin{vmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

mit den ähnlichen vom Grade q

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 16\xi_1 & q \end{vmatrix} \begin{vmatrix} q & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

zu sämmtlichen Repräsentanten der nicht äquivalenten Klassen vom Grade pq

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 16x_1 & pq \end{vmatrix} \begin{vmatrix} p & 0 \\ 16x_2 & q \end{vmatrix} \begin{vmatrix} q & 0 \\ 16x_3 & p \end{vmatrix} \begin{vmatrix} pq & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

zusammen, worin dem x_1 alle ganzzahligen Werthe $0, 1, 2, \ldots pq-1$, dem x_2 die Werthe $0, 1, 2, \ldots q-1$ und dem x_3 die Werthe $0, 1, 2, \ldots p-1$ beigelegt werden.

Nach den bekannten Regeln der Zusammensetzung der Transformationen ist nämlich:

$$\begin{vmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 16\xi_1 & q \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} p & 0 \\ 16\xi_1 & q \end{vmatrix},$$

worin ξ_1 die Werthe $0, 1, 2, \ldots q-1$ annimmt; ferner

$$\begin{vmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} q & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} pq & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix},$$

und

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 16\xi & p \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 16\xi_1 & q \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 16\xi + 16p\xi_1 & pq \end{vmatrix},$$

worin ξ die Werthe 0, 1, 2, ... $p-1$, ξ_1 die Werthe 0, 1, 2, ... $q-1$, also $\xi+p\xi_1$ alle Werthe 0, 1, 2, ... $pq-1$ annimmt, wie es in der Transformation

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 16x_1 & pq \end{vmatrix}$$

der Fall ist.

Endlich giebt die Zusammensetzung der noch übrigen beiden Schemata die folgende Transformation

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 16\xi & p \end{vmatrix} \begin{vmatrix} q & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} q & 0 \\ 16\xi q & p \end{vmatrix},$$

die freilich von dem obigen Repräsentanten

$$\begin{vmatrix} q & 0 \\ 16x_3 & p \end{vmatrix}$$

verschieden ist; da jedoch

$$\begin{vmatrix} q & 0 \\ 16x_3 & p \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ r & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} q & 0 \\ 16x_3+pr & p \end{vmatrix},$$

worin für ein gegebenes $x_3 < p$ stets ein $\xi < p$ so bestimmt werden kann, dass

$$16x_3+pr = 16\xi q,$$

da p und q relativ prim sind, und sich r ausserdem als ein Multiplum von 16 ergiebt, so wird die durch Zusammensetzung erhaltene Transformation sich von dem Repräsentanten, der zum Grade pq gehört, nur dadurch unterscheiden, dass auf den letzteren noch eine lineare Transformation von der Form

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 16\varrho & 1 \end{vmatrix}$$

ausgeübt ist, welche jedoch, wie aus den linearen Transformationsformeln für die Quadratwurzel aus dem transformirten Modul und den Multiplicator unmittelbar ersichtlich ist, die Werthe dieser Grössen nicht ändert.

Es mögen nun die Multiplicatoren der neuen Transformation q^{ten} Grades, welche dem transformirten Modul k_1 entsprechen, mit

$$M_1^{(1)}, \quad M_2^{(1)}, \quad \ldots \quad M_{q+1}^{(1)},$$

die dem k_2 entsprechen, mit

$$M_1^{(2)}, \quad M_2^{(2)}, \quad \ldots \quad M_{q+1}^{(2)},$$

u. s. w. bezeichnet werden, so sind offenbar die Multiplicatoren des durch

die Transformation pq^{ten} Grades erhaltenen Integrales die folgenden:

$$(3.)\quad \begin{cases} M_1 M_1^{(1)}, & M_1 M_2^{(1)}, & \dots & M_1 M_{q+1}^{(1)} \\ M_2 M_1^{(2)}, & M_2 M_2^{(2)}, & \dots & M_2 M_{q+1}^{(2)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ M_{p+1} M_1^{(p+1)}, & M_{p+1} M_2^{(p+1)}, & \dots & M_{p+1} M_{q+1}^{(p+1)}, \end{cases}$$

und es wird sich darum handeln, nachzuweisen, dass diese Grössen sich als die Lösungen einer Gleichung $(p+1)(q+1)^{\text{ten}}$ Grades darstellen lassen, deren Coefficienten rationale Functionen von c^2 sind. Dies geht jedoch aus dem Vorigen unmittelbar hervor. Denn bildet man die s^{te} Potenzsumme dieser Grössen

$$\begin{aligned} &(M_1^{(1)s} + M_2^{(1)s} + \dots + M_{q+1}^{(1)s}) M_1^s \\ +&(M_1^{(2)s} + M_2^{(2)s} + \dots + M_{q+1}^{(2)s}) M_2^s \\ +& \dots \\ +&(M_1^{(p+1)s} + M_2^{(p+1)s} + \dots + M_{q+1}^{(p+1)s}) M_{p+1}^s, \end{aligned}$$

so wird der erste Theil derselben

$$(M_1^{(1)s} + M_2^{(1)s} + \dots + M_{q+1}^{(1)s}) M_1^s,$$

da $M_1^{(1)}, M_2^{(1)}, \dots M_{q+1}^{(1)}$ die Lösungen einer Gleichung $q+1^{\text{ten}}$ Grades darstellen, deren Coefficienten rationale Functionen von k_1^2 sind, und M_1, wie vorher nachgewiesen, eine rationale Function von k_1^2 und c^2 ist *), sich als rationale Function von k_1^2 und c^2 darstellen lassen, und da die übrigen Theile jener s^{ten} Potenzsumme dieselben rationalen Functionen k_2^2 und c^2, k_3^2 und c^2 etc. liefern, so wird die s^{te} Potenzsumme eine rationale symmetrische Function der Lösungen der Modulargleichung zwischen k^2 und c^2, also rational durch c^2 ausdrückbar sein, woraus unmittelbar hervorgeht, dass sich eine Gleichung vom $(p+1)(q+1)^{\text{ten}}$ Grade bilden lässt, deren Lösungen die obigen $(p+1)(q+1)$ Multiplicatoren der Repräsentanten der nicht äquivalenten Klassen, und deren Coefficienten rationale Functionen von c^2 sind **). In ähnlicher Weise schliesst man weiter

---

*) da auch

$$M^2 = \frac{1}{n} \frac{k^2(1-k^2)}{c^2(1-c^2)} \frac{\partial(c^2)}{\partial(k^2)}$$

und, wie am Ende des § gezeigt werden soll, eine Gleichung $n+1^{\text{ten}}$ Grades zwischen k^2 und c^2 besteht.

**) Ich knüpfe hieran eine Ergänzung der im vorigen Paragraphen angestellten Untersuchung über die Werthe der Multiplicatoren für den verschwindenden Integralmodul. Es war dort für einen primzahligen Transformationsgrad p nachgewiesen worden, dass p der Multiplicatoren den Werth 1 annehmen, während einer von ihnen $= \frac{(-1)^{\frac{p-1}{2}}}{p}$ wird, und man wird die zur Transformation pq^{ten} Grades gehörigen aus

und gelangt somit zu dem Satze, dass es für jeden unpaaren Transformationsgrad

$$n = pqr\dots$$

ohne quadratischen Theiler eine Gleichung des

$$(p+1)(q+1)(r+1)\dots^{\text{ten}}$$

---

der obigen Zusammenstellung (3.) unmittelbar herleiten können, wenn man beachtet, dass sämmtliche Wurzeln der Modulargleichung verschwinden, wenn der zu Grunde gelegte Integralmodul Null wird; dass das letztere wirklich der Fall ist, geht daraus hervor, dass sich bekanntlich für einen Primzahlgrad der Transformation die Quadratwurzeln aus den transformirten Integralmoduln aus dem Ausdruck

$$\frac{2(q^{\frac{1}{4}}+q^{\frac{9}{4}}+q^{\frac{25}{4}}+\cdots)}{1+2q+2q^4+2q^9+\cdots}$$

herleiten lassen, wenn man der Reihe nach für q die Grössen

$$q^{\frac{1}{p}},\quad \alpha q^{\frac{1}{p}},\quad \alpha^2 q^{\frac{1}{p}},\quad \dots\quad \alpha^{p-1} q^{\frac{1}{p}},\quad q^p$$

setzt, worin α eine p^{te} Einheitswurzel bedeutet; denn wenn c sich der Null nähert, so verschwindet auch q, also auch $q^{\frac{1}{p}}$ etc. und daher der obige Ausdruck. Wenn nun aber auch wieder alle transformirten Moduln verschwinden, so werden die Grössen

$$\begin{array}{llll} M_1^{(1)} & M_2^{(1)} & \dots & M_{q+1}^{(1)} \\ M_1^{(2)} & M_2^{(2)} & \dots & M_{q+1}^{(2)} \quad \text{u. s. w.} \end{array}$$

die Werthe

$$1 \quad 1 \quad \dots \quad 1 \quad \frac{(-1)^{\frac{q-1}{2}}}{q}$$

annehmen, und es wird somit die Zusammenstellung (3.) der Multiplicatoren für die Transformation pq^{ten} Grades in

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 1 & \dots & 1 & \frac{(-1)^{\frac{q-1}{2}}}{q} \\ 1 & 1 & \dots & 1 & \frac{(-1)^{\frac{q-1}{2}}}{q} \\ \vdots & & & & \\ 1 & 1 & \dots & 1 & \frac{(-1)^{\frac{q-1}{2}}}{q} \\ \frac{(-1)^{\frac{p-1}{2}}}{p} & \frac{(-1)^{\frac{p-1}{2}}}{p} & \dots & \frac{(-1)^{\frac{p-1}{2}}}{p} & \frac{(-1)^{\frac{p-1}{2}+\frac{q-1}{2}}}{pq} \end{array}$$

übergehen, so dass die Multiplicatorgleichung des $(p+1)(q+1)^{\text{ten}}$ Grades pq Lösungen hat, welche der Einheit gleich sind, q, welche $=\frac{(-1)^{\frac{p-1}{2}}}{p}$, p, welche $=\frac{(-1)^{\frac{q-1}{2}}}{q}$ und eine, welche $=\frac{(-1)^{\frac{p-1}{2}+\frac{q-1}{2}}}{pq}$ ist. Es ist klar, wie in derselben Weise die Werthe der Multiplicatoren für einen beliebigen Transformationsgrad zu bestimmen sind.

Grades giebt, deren Lösungen die zu den $(p+1)(q+1)(r+1)\dots$ Repräsentanten der nicht äquivalenten Klassen gehörigen Multiplicatoren, und deren Coefficienten rationale Functionen von c^2 sind.

Ich will am Schlusse dieses Paragraphen zur Vervollständigung des vorher Gesagten noch einige Bemerkungen über die Gleichungen zwischen k^2 und c^2 hinzufügen, da ich in meiner Arbeit über Modulargleichungen nur diejenigen zwischen $\sqrt[4]{k} = v$ und $\sqrt[4]{c} = u$ näher untersucht habe.

Dass für die durch den Ausdruck

$$(\alpha.) \qquad k^2 = (c^2)^n \left\{ snc\frac{2\varpi}{n}\, snc\frac{4\varpi}{n} \dots snc\frac{(n-1)\varpi}{n} \right\}^8$$

dargestellten Werthe, welche zu den $(p+1)(q+1)\dots$ Repräsentanten der nicht äquivalenten Klassen gehören, eine Gleichung $(p+1)(q+1)\dots{}^{\text{ten}}$ Grades existirt, deren Coefficienten ganze rationale Functionen von c^2 sind, geht aus der folgenden Betrachtung unmittelbar hervor. Bezeichnet man nämlich die Potenzsummen der Gleichung $(p+1)(q+1)\dots{}^{\text{ten}}$ Grades zwischen u und v, deren Existenz nachgewiesen ist, mit s, so werden, wenn S die Potenzsumme der Ausdrücke $(\alpha.)$ bedeutet, die Relationen gelten

$$S_1 = s_8, \quad S_2 = s_{16}, \quad S_3 = s_{24}, \quad \dots$$

und da, wie oben nachgewiesen worden, der Grad eines jeden Gliedes von s_k in Bezug auf u

$$\equiv k.n \qquad (\text{mod. } 8)$$

ist, so wird offenbar der Grad eines jeden Gliedes von S_1, S_2, ... durch 8 theilbar, d. h. sie selbst ganz und rational durch c^2 ausdrückbar sein, woraus aber diese Eigenschaft für die Coefficienten der zu bildenden Gleichung folgt.

Da ferner das letzte Glied der Modulargleichung zwischen u und v von der Form ist

$$\pm u^{(p+1)(q+1)\dots},$$

so wird es in der Gleichung zwischen k^2 und c^2 die achte Potenz dieses Ausdruckes sein, und es wird somit die neue Gleichung zwischen k^2 und c^2, wenn

$$(p+1)(q+1)\dots = \nu$$

gesetzt wird, die folgende Form haben:

$$(k^2)^\nu + f_1(c^2)(k^2)^{\nu-1} + f_2(c^2)(k^2)^{\nu-2} + \dots + f_\nu(c^2)k^2 + (c^2)^\nu = 0,$$

wobei auch hierin, wie aus dem Satze für die Modulargleichungen zwischen u und v zu entnehmen, die ganzen Functionen von c^2 den Grad ν nicht er-

reichen können. Endlich lässt sich der Irreductibilitätsbeweis, da

$$c^2 = \varphi^8(\tau)$$
$$k^2 = \varphi^8\left(\frac{t\tau - 16\xi}{t'}\right)$$

ist, genau in der Weise, wie es für die (V, U) Gleichung geschehen ist, herstellen oder auch unmittelbar aus der Irreductibilität der Gleichung zwischen u und v ableiten. Was die wirkliche Aufstellung der Gleichungen zwischen k^2 und c^2 betrifft, so unterliegt dieselbe keiner weitern Schwierigkeit, indem man nur wieder $c^2 = \varphi^8(\tau)$, $k^2 = \varphi^8(n\tau)$ einzusetzen und soviel Glieder zu berücksichtigen hat, als unbekannte Coefficienten in der Gleichung vorkommen.

§. 16.

Bestimmung des Werthes des letzten Gliedes, sowie der Form der übrigen Coefficienten der Multiplicatorgleichung.

Sei für einen primzahligen Transformationsgrad n die Multiplicatorgleichung zwischen M und c^2 die folgende:

$$(1.)\quad M^{n+1} + C_1 M^n + C_2 M^{n-1} + \cdots + C_n M + C_{n+1} = 0,$$

in welcher $C_1, C_2, \ldots C_{n+1}$ rationale Functionen von c^2 bedeuten, so wird es sich zur Herleitung der weiteren Eigenschaften, sowie zur wirklichen Herstellung dieser Gleichungen vor Allem darum handeln, das von M freie Glied derselben zu ermitteln.

Nun ergiebt sich aber aus dem Ausdrucke

$$(2.)\quad M = (-1)^{\frac{n-1}{2}} \left\{ \frac{snc\frac{2\varpi}{n}\; snc\frac{4\varpi}{n} \cdots snc\frac{(n-1)\varpi}{n}}{sn\frac{2\varpi}{n}\; sn\frac{4\varpi}{n} \cdots sn\frac{(n-1)\varpi}{n}} \right\}^2,$$

dass

$$C_{n+1} = \frac{\Pi\, snc\left(\frac{4mC + 4m'iC'}{n}\right)^2}{\Pi\, sn\left(\frac{4mC + 4m'iC'}{n}\right)^2},$$

worin den Zahlen m und m' die folgenden Werthecombinationen zuertheilt werden:

$$m: 1, 2, 3, \ldots \frac{n-1}{2} \qquad\qquad m: 0$$
$$m': 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \pm\frac{n-1}{2} \qquad\qquad m': 1, 2, \ldots \frac{n-1}{2},$$

und da bekanntlich

$$\Pi snc\left(\frac{4mC+4m'iC'}{n}\right)^2 = \frac{1}{c^{\frac{n^2-1}{2}}},$$

$$\Pi sn\left(\frac{4mC+4m'iC'}{n}\right)^2 = \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}n}{c^{\frac{n^2-1}{2}}},$$

so wird

$$(3.)\qquad C_{n+1} = \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{n}.$$

Es ist nun leicht, hieraus den Werth des letzten Gliedes einer zu einem zusammengesetzten Transformationsgrade gehörigen Multiplicatorgleichung herzuleiten. Sei nämlich zuerst der Transformationsgrad $n = p.q$, wo p und q Primzahlen bedeuten, so wird nach den in §. 14 gemachten Auseinandersetzungen mit Beibehaltung der dort gebrauchten Bezeichnungen das Product der zu allen Repräsentanten der nicht äquivalenten Klassen gehörigen Multiplicatoren des Transformationsgrades pq den folgenden Werth erhalten:

$$(M_1M_2\dots M_{p+1})^{q+1}(M_1^{(1)}M_2^{(1)}\dots M_{q+1}^{(1)})(M_1^{(2)}M_2^{(2)}\dots M_{q+1}^{(2)})\dots(M_1^{(p+1)}M_2^{(p+1)}\dots M_{q+1}^{(p+1)})$$

oder nach Gleichung (3.)

$$\left(\frac{(-1)^{\frac{p-1}{2}}}{p}\right)^{q+1}\left(\frac{(-1)^{\frac{q-1}{2}}}{q}\right)^{p+1} = \frac{1}{p^{q+1}q^{p+1}}.$$

Ebenso folgt, wenn

$$n = p.q.r$$

ist, dass das letzte Glied der Multiplicatorgleichung den Werth hat

$$\frac{1}{p^{(q+1)(r+1)}\,q^{(p+1)(r+1)}\,r^{(p+1)(q+1)}}$$

u. s. w.

Es soll nunmehr nachgewiesen werden, dass sämmtliche Coefficienten der Multiplicatorgleichung ganze Functionen von c^2 sind.

Multiplicirt man nämlich die Multiplicatorgleichung unter der Voraussetzung, dass die Coefficienten gebrochene rationale Functionen von c^2 sind, mit dem kleinsten gemeinsamen Dividuus der Nenner derselben, wodurch die Gleichung die Form annehmen möge

$$(4.)\qquad f_0(c^2)M^\nu+f_1(c^2)M^{\nu-1}+f_2(c^2)M^{\nu-2}+\dots+f_\nu(c^2)M+\frac{f_0(c^2)}{p^{(q+1)(r+1)}q^{(p+1)(r+1)}\dots} = 0,$$

so ergäbe sich nothwendig daraus, dass Werthe von c^2 existiren, für welche der Transformationsmultiplicator Null oder unendlich wird, da alle diejenigen

Werthe von c^2, welche der Gleichung

$$f_0(c^2) = 0$$

genügen, den höchsten und niedrigsten Coefficienten der Gleichung verschwinden lassen, also die Lösungen Null und Unendlich liefern. Es ist zu untersuchen, ob dies möglich ist. Sollte dies der Fall sein, so müsste, wie sich aus dem in §. 12 aufgestellten Ausdruck des Multiplicators mit Hülfe der ϑ-Functionen ergiebt, eine dieser ϑ-Functionen verschwinden, d. h. es müsste das Argument $\frac{2k\omega}{n}$, worin $k \leqq \frac{n-1}{2}$ ist, eine der vier Formen

$$r+s\tau,$$
$$r-\tfrac{1}{2}+s\tau,$$
$$r+(s+\tfrac{1}{2})\tau,$$
$$r-\tfrac{1}{2}+(s+\tfrac{1}{2})\tau$$

annehmen. Da nun aber

$$\omega = pb_1-qb_0-(pa_1-qa_0)\tau,$$

worin pb_1-qb_0 und pa_1-qa_0 relative Primzahlen sind, so müsste, wenn

$$\tau = t+t'i$$

gesetzt wird, für die erste Annahme:

$$2k[pb_1-qb_0-(pa_1-qa_0)t-(pa_1-qa_0)t'i] = rn+snt+snt'i$$

sein; daraus folgt aber, dass

$$-2k(pa_1-qa_0) = ns,$$

dass also, wenn der grösste gemeinschaftliche Theiler von k und n mit δ bezeichnet wird, $\frac{n}{\delta}$ in pa_1-qa_0 aufgeht. Nun findet aber auch die Gleichung statt

$$2k(pb_1-qb_0) = nr,$$

und es müsste somit auch pb_1-qb_0 durch $\frac{n}{\delta}$ theilbar sein, was nicht angeht, da pa_1-qa_0 und pb_1-qb_0 relative Primzahlen sind.

Hat $\frac{2k\omega}{n}$ die zweite Form, so dass

$$2k[pb_1-qb_0-(pa_1-qa_0)t-(pa_1-qa_0)t'i] = nr-\frac{n}{2}+nst+nst'i,$$

so folgt

$$-2k(pa_1-qa_0) = ns,$$

also wieder pa_1-qa_0 durch $\frac{n}{\delta}$ theilbar; sodann wäre aber auch

$$4k(pb_1-qb_0) = 2nr-n,$$

also auch, da δ als grösster gemeinsamer Theiler von k und n eine ungrade Zahl ist, pb_1-qb_0 durch $\frac{n}{\delta}$ theilbar und somit auch unmöglich.

Im dritten Falle wäre

$$-2k(pa_1-qa_0) = n(s+\tfrac{1}{2}),$$

was nicht möglich ist, da n eine ungrade Zahl ist, und auf dieselbe Ungereimtheit führt die vierte Annahme. Es kann somit keine der vier ϑ-Functionen verschwinden, aus denen sich der Ausdruck für den Multiplicator M zusammensetzt, also auch keiner der Multiplicatoren Null oder unendlich sein, und es werden somit in der Multiplicatorgleichung

$$(5.)\quad M^\nu+f_1(c^2)M^{\nu-1}+f_2(c^2)M^{\nu-2}+\cdots+f_{\nu-1}(c^2)M+\frac{1}{p^{(q+1)(r+1)\ldots}q^{(p+1)(r+1)\ldots}\ldots} = 0$$

die Coefficienten

$$f_1(c^2),\quad f_2(c^2),\quad \ldots\quad f_{\nu-1}(c^2)$$

ganze Functionen von c^2 bedeuten.

§. 17.

Eigenschaften der Multiplicatorgleichungen.

Es soll nunmehr untersucht werden, in welche Werthe die Lösungen der Multiplicatorgleichung übergehen, wenn statt des Integralmoduls c^2 einer der transformirten Moduln k^2 gesetzt wird. Sei nun k^2 der dem transformirten ϑ-Modul

$$\frac{t\tau-16\xi}{t'}$$

entsprechende Werth

$$\varphi^8\left(\frac{t\tau-16\xi}{t'}\right),$$

so giebt es zu jedem dieser Repräsentanten wieder einen und nur einen Repräsentanten einer nicht äquivalenten Transformationsklasse n^{ten} Grades, welcher als transformirten Integralmodul wieder c^2 erzeugt; denn sei der Repräsentant

$$\begin{vmatrix} u & 0 \\ 16x & u' \end{vmatrix},$$

worin u ein Theiler von n, $u'=\frac{n}{u}$, $x<u'$ ist, so wird der neue ϑ-Modul

$$\frac{u\cdot\frac{t\tau-16\xi}{t'}-16x}{u'} = \frac{ut\tau-16\xi u-16xt'}{u't'}$$

den folgenden transformirten Integralmodul bestimmen

$$\varphi^8\left(\frac{ut\tau-16\xi u-16xt'}{u't'}\right),$$

woraus, wenn derselbe mit

$$c^2 = \varphi^8(\tau)$$

übereinstimmen soll, vermöge der bekannten Beziehung

$$\varphi^8\left(\frac{b_0 - a_0\tau}{a_1\tau - b_1}\right) = \varphi^8(\tau),$$

in der

$$a_0 \equiv 1, \quad a_1 \equiv 0, \quad b_0 \equiv 0, \quad b_1 \equiv 1 \qquad (\text{mod. } 2)$$

und

$$a_0 b_1 - a_1 b_0 = 1$$

ist, die folgenden Bedingungsgleichungen sich ergeben:

$$a_1 = 0,$$
$$b_1 ut = a_0 u' t',$$
$$16\xi u b_1 + 16 x t' b_1 = b_0 u' t'.$$

Da nun wegen $a_1 = 0$ $a_0 b_1 = 1$ also $a_0 = \pm 1$, $b_1 = \pm 1$ sein muss, so gehen die beiden letzten Gleichungen über in

$$ut = u't',$$
$$16\xi u + 16 x t' = \pm b_0 u' t',$$

oder da u' und t' ungrade Zahlen, also 16 in b_0 enthalten sein muss:

$$(1.) \qquad ut = u't',$$
$$(2.) \qquad \xi u + x t' = k u' t',$$

worin k eine beliebige positive oder negative ganze Zahl bedeuten darf. Da nun aber t und t' sowohl als u und u' relative Primzahlen sind, so folgt aus (1.), dass

$$u = t', \quad u' = t$$

ist, und es geht dann (4.) über in

$$\xi + x = ku' = kt,$$

wodurch x, da es kleiner als u' sein soll, in der Weise bestimmt wird, dass, wenn $\xi < t$, $x = t - \xi$ und, wenn $\xi > t = ht + \xi_1$ ist, $x = t - \xi_1$ zu wählen ist.

Es giebt somit *stets eine* und *nur eine* zu den Repräsentanten der nicht äquivalenten Klassen gehörige Transformation n^{ten} Grades, welche jeden durch eben diese Transformationen erhaltenen Integralmodul in sich selbst zurückführt.

Da nun aber für die Multiplicatoren bekanntlich die Beziehung besteht*):

$$(-1)^{\frac{t-1}{2}} M = \frac{C}{K} \cdot \frac{1}{a_0 + a_1 \tau'} = \frac{C}{K} \cdot \frac{b_1 - a_1 \tau}{n},$$

*) S. „Transf." §. 42.

so wird, da $a_0 = t$, $a_1 = 0$, $b_0 = 16\xi$, $b_1 = t'$ ist,

$$(-1)^{\frac{t-1}{2}} M = \frac{C}{K} \cdot \frac{t}{n}$$

der zur Transformation

$$\begin{vmatrix} t & 0 \\ 16\xi & t' \end{vmatrix}$$

gehörige, und

$$(-1)^{\frac{t'-1}{2}} M' = \frac{K}{C} \cdot \frac{t}{n}$$

der zur Transformation

$$\begin{vmatrix} t' & 0 \\ 16x & t \end{vmatrix}$$

gehörige Multiplicator sein: daraus folgt aber, dass

$$(-1)^{\frac{n-1}{2}} MM' = \frac{1}{n} \quad \text{oder}$$

$$(3.)\qquad M' = \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{nM}$$

ist; mit andern Worten, wenn man in die Multiplicatorgleichung, die zur Transformation n^{ten} Grades gehört, statt c^2 irgend einen der durch einen Repräsentanten der nicht äquivalenten Klassen transformirten Moduln und statt M in diese Gleichung $\frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{nM}$ setzt, so giebt es stets *ein* und *nur ein* M, welches mit einer Lösung der ursprünglichen Multiplicatorgleichung zusammenfällt. Es bestehen somit stets die beiden folgenden Gleichungen zusammen:

$$(4.)\qquad M^\nu + f_1(c^2) M^{\nu-1} + f_2(c^2) M^{\nu-2} + \cdots + f_{\nu-1}(c^2) M + \frac{1}{p^{(q+1)(r+1)\ldots}\, q^{(p+1)(r+1)\ldots} \ldots} = 0,$$

$$(5.)\qquad \frac{1}{n^\nu M^\nu} + f_1(k^2) \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{n^{\nu-1} M^{\nu-1}} + f_2(k^2) \frac{1}{n^{\nu-2} M^{\nu-2}} + \cdots + f_{\nu-1}(k^2) \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{\nu M} + \frac{1}{p^{(q+1)(r+1)\ldots}\, q^{(p+1)(r+1)\ldots} \ldots} = 0$$

worin die *eine* gemeinsame Lösung dieser Gleichung der zu k^2 gehörige Multiplicator ist. Der grösste gemeinsame Theiler zwischen den linken Seiten der beiden Gleichungen würde wieder den oben anderweitig hergeleiteten Ausdruck für M als eindeutige Function von k^2 und c^2 liefern, während eine Elimination von M zwischen beiden Gleichungen eine Relation zwischen k^2 und c^2 liefern muss, welche durch die Modulargleichung befriedigt wird.

Es soll ferner untersucht werden, was aus den Lösungen der Multiplicatorgleichung wird, wenn auf c^2 die beiden Fundamentaltransformationen ersten Grades ausgeübt werden, oder wenn man statt der Grösse c^2 in die Multiplicatorgleichung

$$1-c^2 \quad \text{und} \quad \frac{1}{c^2}$$

setzt.

Zur Behandlung des ersten Falles wende ich die folgende Methode an: Es sei ein Integral mit dem Modul $1-c^2$ vorgelegt, und es werde auf dasselbe die durch das Schema

$$\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$$

dargestellte lineare Transformation angewandt, welche das Integral in ein anderes mit dem Modul c^2 und dem Multiplicator $-i$ überführt *). Wird auf das jetzt erhaltene Integral die Transformation

$$\begin{vmatrix} t & 0 \\ 16\xi & t' \end{vmatrix}$$

ausgeübt, so mag die Multiplicatorgleichung für den Modul c^2 hierfür die Lösung M liefern, es wird dadurch das vorgelegte Integral mit dem Modul $1-c^2$ durch die aus jenen beiden Transformationen zusammengesetzte Transformation

$$(\alpha.) \qquad \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} t & 0 \\ 16\xi & t' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -16\xi & -t' \\ t & 0 \end{vmatrix}$$

in ein anderes mit dem Modul k^2 und dem Multiplicator

$$-(-1)^{\frac{t-1}{2}}.iM$$

übergeführt sein.

Ich will jetzt wiederum auf das vorgelegte Integral mit dem Modul $1-c^2$ die zuletzt erhaltene Transformation $(\alpha.)$ anwenden, jedoch so, dass ich sie aus einer zu den Repräsentanten der nicht äquivalenten Klassen gehörigen Transformation und einer linearen zusammensetze, also aus

$$\begin{vmatrix} u & 0 \\ 16x & u' \end{vmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{vmatrix} \alpha_0 & \alpha_1 \\ \beta_0 & \beta_1 \end{vmatrix}.$$

Soll diese Transformation mit $(\alpha.)$ identificirt werden, so ergeben sich die folgenden Bedingungsgleichungen:

---

*) S. §. 1 und §. 12.

$$(1.)\quad u\alpha_0 = -16\xi,$$
$$(2.)\quad u\alpha_1 = -t',$$
$$(3.)\quad 16x\alpha_0 + u'\beta_0 = t,$$
$$(4.)\quad 16x\alpha_1 + u'\beta_1 = 0,$$

woraus, wenn mit δ der grösste gemeinschaftliche Theiler von t' und ξ bezeichnet wird,

$$u = \delta,\quad u' = \frac{n}{\delta},\quad \alpha_0 = -\frac{16\xi}{\delta},\quad \alpha_1 = -\frac{t'}{\delta}$$

folgen, während die Gleichungen (3.) und (4.) in

$$(5.)\quad -16x.16\xi + n\beta_0 = t\delta,$$
$$(6.)\quad -16x + t\beta_1 = 0$$

übergehen. Da nun aus (6.)

$$x = t\mu,\quad \beta_1 = 16\mu$$

folgt, wenn μ eine beliebige ganze Zahl bedeutet, so giebt Gleichung (5.) die Beziehung

$$(7.)\quad -16\mu\frac{16\xi}{\delta} + \beta_0\frac{t'}{\delta} = 1,$$

welche, da $\frac{16\xi}{\delta}$ und $\frac{t'}{\delta}$ relativ prime Zahlen sind, stets auflösbar ist und, wie man unmittelbar sieht, in die Gleichung

$$\alpha_0\beta_1 - \beta_0\alpha_1 = 1$$

übergeht, also diese vier Zahlen als Transformationszahlen einer linearen Transformation definirt. Es mag sich aus (7.)

$$\mu = \mu_1 + \frac{t'}{\delta}q$$

ergeben, so wird nur q so zu wählen sein, dass

$$x = t\mu = t\mu_1 + \frac{n}{\delta}q$$

positiv und $< u' < \frac{n}{\delta}$ wird, dann sind die Zahlen α_0, α_1, β_0, β_1 passend bestimmt als Transformationszahlen einer linearen Transformation und zwar

$$\alpha_0 \equiv 0 \ (\text{mod. } 16),\quad \beta_0 \equiv 1 \ (\text{mod. } 2),\quad \alpha_1 \equiv 1 \ (\text{mod. } 2.),\quad \beta_1 \equiv 0 \ (\text{mod. } 16),$$

also eine lineare Transformation, die zu dem Falle II. des §. 12 gehört und als Multiplicator den Ausdruck liefert

$$e^{\frac{i\pi}{2}(\beta_0 - 2)}.$$

Da nun aber, wie aus (7.) hervorgeht, β_0 und $\frac{t'}{\delta}$ zu gleicher Zeit $\equiv 1$ oder

$\equiv 3$ (mod. 4) sind, und im ersten Falle die Exponentialgrösse $-i$, im zweiten Falle $+i$ ist, so ergiebt sich der Multiplicator dieser linearen Transformation in der Form

$$-(-1)^{\frac{\frac{t'}{\delta}-1}{2}} i.$$

Wird nun die zur Transformation

$$\begin{vmatrix} u & 0 \\ 16x & u' \end{vmatrix}$$

gehörige Lösung der Multiplicatorgleichung, welche der auf den Modul $1-c^2$ ausgeübten Transformation n^{ten} Grades entspricht, mit M' bezeichnet, so ist der Multiplicator der aus den beiden Transformationen zusammengesetzten Transformation

$$\begin{vmatrix} -16\xi & -t' \\ t & 0 \end{vmatrix}$$

die Grösse

$$-(-1)^{\frac{\delta-1}{2}}(-1)^{\frac{\frac{t'}{\delta}-1}{2}} iM',$$

und es wird daher die Gleichung bestehen

$$-(-1)^{\frac{t-1}{2}} iM = -(-1)^{\frac{\delta-1}{2}}(-1)^{\frac{\frac{t'}{\delta}-1}{2}} iM',$$

d. h.

$$(8.)\qquad M' = (-1)^{\frac{n-1}{2}} M;$$

mit andern Worten, wenn ein Repräsentant der nicht äquivalenten Klassen einer auf ein Integral mit dem Modul c^2 angewandten Transformation n^{ten} Grades den Multiplicator M liefert, so giebt es stets einen Repräsentanten der nicht äquivalenten Klassen einer Transformation desselben Grades, welche auf ein Integral mit dem Modul $1-c^2$ angewandt, den Multiplicator $(-1)^{\frac{n-1}{2}} M$ liefert, d. h. wenn ich in die Multiplicatorgleichung $1-c^2$ statt c^2 und $(-1)^{\frac{n-1}{2}} M$ statt M setze, so müssen die beiden Gleichungen dieselben ν Lösungen haben; in welcher Weise dieselben mit einander correspondiren, wird durch die beiden Transformationen

$$\begin{vmatrix} t & 0 \\ 16\xi & t' \end{vmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{vmatrix} u & 0 \\ 16x & u' \end{vmatrix}$$

angezeigt, deren Transformationszahlen durch die oben angegebenen Gleichungen mit einander verbunden sind.

Aus der eben hergeleiteten Eigenschaft, die sich auch so aussprechen lässt, dass zugleich mit der Multiplicatorgleichung

$$(9.)\quad M^\nu + f_1(c^2)M^{\nu-1} + f_2(c^2)M^{\nu-2} + \cdots + f_{\nu-1}(c^2)M + \frac{1}{p^{(q+1)(r+1)\dots}\,q^{(p+1)(r+1)\dots}\dots} = 0,$$

wenn $n \equiv 1 \pmod{4}$, die Gleichung

$$(10.)\quad M^\nu + f_1(1-c^2)M^{\nu-1} + f_2(1-c^2)M^{\nu-2} + \cdots + f_{\nu-1}(1-c^2)M + \frac{1}{p^{(q+1)(r+1)\dots}\,q^{(p+1)(r+1)\dots}\dots} = 0,$$

wenn $n \equiv 3 \pmod{4}$, die Gleichung

$$(11.)\quad M^\nu - f_1(1-c^2)M^{\nu-1} + f_2(1-c^2)M^{\nu-2} - \cdots - f_{\nu-1}(1-c^2)M + \frac{1}{p^{(q+1)(r+1)\dots}\,q^{(p+1)(r+1)\dots}\dots} = 0$$

besteht, lässt sich die Form der Functionen $f_\alpha(c^2)$ erkennen. Denn da die Wurzeln der beiden Gleichungen sämmtlich übereinstimmen, so wird, wenn $n \equiv 1 \pmod{4}$ ist, das folgende Gleichungssystem bestehen:

$$f_1(c^2) = f_1(1-c^2), \quad f_2(c^2) = f_2(1-c^2), \quad \dots \quad f_{\nu-1}(c^2) = f_{\nu-1}(1-c^2),$$

d. h. es sind diese Functionen ganze rationale Functionen von $c^2(1-c^2)$, so dass sich in diesem Falle die Multiplicatorgleichung in die Form setzen lässt:

$$(12.)\quad \begin{cases} M^\nu + \varphi_1(c^2(1-c^2))M^{\nu-1} + \varphi_2(c^2(1-c^2))M^{\nu-2} + \cdots \\ \cdots + \varphi_{\nu-1}(c^2(1-c^2))M + \dfrac{1}{p^{(q+1)(r+1)\dots}\,q^{(p+1)(r+1)\dots}\dots} = 0. \end{cases}$$

Ist dagegen $n \equiv 3 \pmod{4}$, so werden nur die mit graden Indices behafteten Functionen jenen Bedingungen genügen, also auch ganze rationale Functionen von $c^2(1-c^2)$ sein, während sich für die mit ungeradem Index versehenen Functionen, welche die Gleichung

$$f_{2m+1}(c^2) = -f_{2m+1}(1-c^2)$$

befriedigen, schliessen lässt, dass sie die Form

$$\psi(c^2(1-c^2))(c^2-\tfrac{1}{2}) \quad \text{oder}$$
$$\varphi(c^2(1-c^2))(c_1^2-c^2)$$

haben, so dass für $n \equiv 3 \pmod{4}$ die Form der Multiplicatorgleichung die folgende ist:

$$(13.)\quad \begin{cases} M^\nu + \varphi_1(c^2(1-c^2))(c_1^2-c^2)M^{\nu-1} + \varphi_2(c^2(1-c^2))M^{\nu-2} + \varphi_3(c^2(1-c^2))(c_1^2-c^2)M^{\nu-3} + \cdots \\ \cdots + \varphi_{\nu-1}(c^2(1-c^2))(c_1^2-c^2)M + \dfrac{1}{p^{(q+1)(r+1)\dots}\,q^{(p+1)(r+1)\dots}\dots} = 0. \end{cases}$$

Es soll nun ähnlich wie vorher untersucht werden, welche Verwandlung die Lösungen der Multiplicatorgleichung erleiden, wenn $\frac{1}{c^2}$ statt c^2 gesetzt wird.

Sei ein Integral mit dem Modul $\frac{1}{c^2}$ vorgelegt, so wird dasselbe durch die von dem Schema

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

dargestellte lineare Transformation in ein anderes mit dem Integralmodul c^2 und dem Multiplicator c übergeführt. Wendet man nun auf das so erhaltene Integral irgend einen Repräsentanten der nicht äquivalenten Klassen $\begin{vmatrix} t & 0 \\ 16\xi & t' \end{vmatrix}$ der Transformation n^{ten} Grades an, so ergiebt sich ein Modul, welcher eine Lösung der zur Transformation n^{ten} Grades gehörigen Modulargleichung ist, und als Multiplicator eine Lösung der Multiplicatorgleichung, die mit M bezeichnet werden mag, so dass der Gesammtmultiplicator, welcher zu der aus der Zusammensetzung dieser beiden Transformationen entstandenen Transformation

$$\begin{vmatrix} t+16\xi & t' \\ 16\xi & t' \end{vmatrix}$$

gehört, durch den Ausdruck

$$(-1)^{\frac{t-1}{2}} Mc$$

dargestellt wird.

Wendet man nunmehr auf das vorgelegte Integral mit dem Modul $\frac{1}{c^2}$ zuerst einen Repräsentanten der nicht äquivalenten Klassen

$$\begin{vmatrix} u & 0 \\ 16x & u' \end{vmatrix}$$

der Transformation n^{ten} Grades an, so soll eine lineare Transformation

$$\begin{vmatrix} \alpha_0 & \alpha_1 \\ \beta_0 & \beta_1 \end{vmatrix}$$

gesucht werden, welche mit der obigen, in der noch u, u', x passend zu bestimmen sind, zusammengesetzt, die Transformation

$$\begin{vmatrix} t+16\xi & t' \\ 16\xi & t' \end{vmatrix}$$

giebt.

Da aber

$$\begin{vmatrix} u & 0 \\ 16x & u' \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \alpha_0 & \alpha_1 \\ \beta_0 & \beta_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u\alpha_0 & u\alpha_1 \\ 16x\alpha_0+u'\beta_0 & 16x\alpha_1+u'\beta_1 \end{vmatrix},$$

so ergeben sich die vier Gleichungen

$$(14.)\qquad u\alpha_0 = t+16\xi,$$
$$(15.)\qquad u\alpha_1 = t',$$
$$(16.)\qquad 16x\alpha_0+u'\beta_0 = 16\xi,$$
$$(17.)\qquad 16x\alpha_1+u'\beta_1 = t',$$

und wenn man für u den grössten gemeinsamen Theiler δ zwischen

$$t+16\xi \text{ und } t'$$

wählt, so folgt

$$u=\delta,\quad u'=\frac{n}{\delta},\quad \alpha_0=\frac{t+16\xi}{\delta},\quad \alpha_1=\frac{t'}{\delta},$$

während die Gleichungen (16.) und (17.) in die folgenden übergehen:

$$(18.)\qquad 16x(t+16\xi)+n\beta_0 = 16\xi\delta,$$
$$(19.)\qquad 16x+t\beta_1 = \delta.$$

Nun sieht man unmittelbar, dass, wenn α_0, α_1, β_0, β_1 diesen Gleichungen genügen, die Bedingung der linearen Transformation

$$\alpha_0\beta_1-\alpha_1\beta_0 = 1$$

befriedigt wird, und es folgt ferner aus (19.), dass

$$x=x_1+tv,\quad \beta_1=b-16v,$$

worin v eine beliebige ganze Zahl bedeutet. Setzt man den Werth

$$16x = \delta-t(b-16v)$$

in (18.) ein, so ergiebt sich die Gleichung

$$16v(t+16\xi)+t'\beta_0 = b(t+16\xi)-\delta,$$

welche sich, da δ der grösste gemeinschaftliche Theiler zwischen $t+16\xi$ und t' ist, stets auflösen lässt, und es folgen somit α_0, α_1, β_0, β_1 als lineare Transformationszahlen von der Form

$$\alpha_0\equiv 1 \pmod{2},\quad \alpha_1\equiv 1 \pmod{2},\quad \beta_0\equiv 0 \pmod{16},\quad \beta_1\equiv 1 \pmod{2};$$

es gehört diese Transformation somit zu dem Falle III des §. 12 und liefert für den Multiplicator den Ausdruck

$$e^{-\frac{i\pi}{2}\left(\frac{t+16\xi}{\delta}-1\right)}\cdot\frac{1}{k'} = \left(\frac{-1}{\frac{t+16\xi}{\delta}}\right)\cdot\frac{1}{k'},$$

wenn k' denjenigen transformirten Modul bedeutet, welcher der Transformation n^{ten} Grades

$$\begin{vmatrix} u & 0 \\ 16x & u' \end{vmatrix},$$

angewandt auf ein Integral mit dem Modul $\frac{1}{c^2}$, entspricht. Da aber dieser Integralmodul, wie aus der Theorie der Modulargleichungen bekannt ist, im Allgemeinen dem reciproken Werthe eines andern der durch die Repräsentanten der nicht äquivalenten Klassen dargestellten Transformationen n^{ten} Grades, auf ein Integral mit dem Modul c^2 ausgeübt, gleich ist, so wird, wenn k^2 eine Lösung der Modulargleichung der Transformation n^{ten} Grades für c^2 angiebt, jener Multiplicator der Transformation jetzt folgendermassen lauten:

$$\left(\frac{-1}{\frac{t+16\xi}{\delta}}\right)\cdot k,$$

worin k, da die beiden zusammengesetzten Transformationen, als dieselbe Transformation auf dasselbe Integral ausgeübt, auch auf denselben transformirten Integralmodul führen müssen, diejenige Auflösung der zur Transformation n^{ten} Grades gehörigen Modulargleichung ist, welche der Transformation

$$\begin{vmatrix} t & 0 \\ 16\xi & t' \end{vmatrix}$$

entspricht, also das dem M zugeordnete k.

Wird nun die Lösung der Multiplicatorgleichung, in der $\frac{1}{c^2}$ statt c^2 gesetzt ist, und die der Transformation

$$\begin{vmatrix} u & 0 \\ 16x & u' \end{vmatrix}$$

entspricht, in der jetzt u, x, u' fest bestimmte Werthe haben, M' genannt, so ist der Gesammtmultiplicator der aus den beiden Transformationen zusammengesetzten Transformation

$$(-1)^{\frac{\delta-1}{2}}\left(\frac{-1}{\frac{t+16\xi}{\delta}}\right)M'k = \left(\frac{-1}{t}\right)M'k,$$

und es muss sonach die Beziehung statthaben:

$$\left(\frac{-1}{t}\right)Mc = \left(\frac{-1}{t}\right)M'k$$

oder

$$M' = \frac{Mc}{k};$$

man wird somit, wenn man in der Multiplicatorgleichung $\frac{1}{c^2}$ statt c^2 setzt, die Grösse M in $\frac{Mc}{k}$ zu verwandeln haben, d. h. es wird eine Lösung der Multi-

plicatorgleichung für die auf ein Integral mit dem Modul $\frac{1}{c^2}$ angewandte Transformation n^{ten} Grades gleich sein einer einem andern, oben genau bestimmten, Repräsentanten der Transformation n^{ten} Grades entsprechenden Lösung der Multiplicatorgleichung für c^2 als Integralmodul, multiplicirt mit dem Quotienten aus dem ursprünglichen Modul c und demjenigen transformirten Modul k, welcher dem M für jenen Repräsentanten zugeordnet ist.

§. 18.

Irreductibilität der Multiplicatorgleichungen.

Der Beweis der Irreductibilität der Multiplicatorgleichungen für einen beliebigen unpaaren Transformationsgrad ohne quadratischen Theiler stützt sich wesentlich auf die Theorie der unendlich vielen Formen der ϑ-Functionen, nach welcher

$$(1.)\qquad e^{i\pi(a_0+a_1\tau')a_1 v^2}\vartheta(v',\tau')_{m_\lambda, n_\lambda} = C.\vartheta(v,\tau)_{\mathfrak{q},\mathfrak{m}}$$

ist, wenn

$$(2.)\qquad \tau' = \frac{b_0-a_0\tau}{a_1\tau-b_1},\qquad v' = \frac{v}{b_1-a_1\tau} = (a_0+a_1\tau')v,$$

$$(3.)\qquad a_0 b_1 - a_1 b_0 = 1$$

und $\mathfrak{q}$ und $\mathfrak{m}$ durch die Gleichungen bestimmt sind:

$$(4.)\qquad \begin{cases} \mathfrak{q} = b_0 n_\lambda + b_1 m_\lambda + b_0 b_1, \\ \mathfrak{m} = a_0 n_\lambda + a_1 m_\lambda + a_0 a_1; \end{cases}$$

endlich ist die Constante C nach Herrn *Hermite* durch den Ausdruck gegeben:

$$(5.)\qquad C = \delta\sum_{0}^{a_1-1}{}_{\varrho}\, e^{\frac{i\pi a_0}{a_1}\left(\varrho-\frac{a_1}{2}\right)^2} : \sqrt{\frac{-ia_1}{b_1-a_1\tau}},$$

wenn

$$(6.)\qquad \delta = e^{-\frac{i\pi}{4}(a_0 b_0 n_\lambda^2 + 2a_1 b_0 m_\lambda n_\lambda + a_1 b_1 m_\lambda^2 + 2a_0 a_1 b_0 n_\lambda + 2a_0 a_1 b_1 m_\lambda + a_0 a_1^2 b_0)},$$

worin auch der Ausdruck

$$(7.)\qquad \sigma = \sum_{0}^{a_1-1}{}_{\varrho}\, e^{\frac{i\pi a_0}{a_1}\left(\varrho-\frac{a_1}{2}\right)^2}$$

in die folgende Form gesetzt werden kann:

I. für grade $a_1 = 2^\alpha \beta$, worin β ungrade ist,

1) wenn α grade,

$$(8.) \quad \sigma = \frac{1+i(-1)^{\frac{a_0\beta+1}{2}}}{\sqrt{2}} \left(\frac{-a_0}{\beta}\right) i^{\left(\frac{\beta-1}{2}\right)^2} \sqrt{a_1},$$

2) wenn α ungrade,

$$(9.) \quad \sigma = \frac{1+i(-1)^{\frac{a_0\beta+1}{2}}}{\sqrt{2}} (-1)^{\frac{a_0^2-1}{8}} \left(\frac{-a_0}{\beta}\right) i^{\left(\frac{\beta-1}{2}\right)^2} \sqrt{a_1},$$

II. für ungrade a_1,

wenn zwei ganze Zahlen m und n durch die Gleichung

$$a_0 = m a_1 - 8n$$

bestimmt werden,

$$(10.) \quad \sigma = e^{-\frac{mi\pi}{4}} \left(\frac{n}{a_1}\right) i^{\left(\frac{a_1-1}{2}\right)^2} \sqrt{a_1},$$

worin $\left(\frac{-a_0}{\beta}\right)$, $\left(\frac{n}{a_1}\right)$ die bekannten *Legendre*schen Zeichen bedeuten.

Um nun den Irreductibilitätsbeweis der Multiplicatorgleichung zu führen, ist es nöthig, den Multiplicator selbst erst noch in eine andere Form zu bringen.

Da nämlich die Periodengleichung besteht

$$C = a_0 a K + a_1 a i K',$$

aus der folgt, dass

$$a = \frac{\frac{C}{K}}{a_0 + a_1 \tau'},$$

so ergiebt sich für die durch das Schema

$$\begin{vmatrix} t & 0 \\ 16\xi & t' \end{vmatrix}$$

dargestellten Repräsentanten der nicht äquivalenten Klassen der folgende Ausdruck für a:

$$(11.) \quad a = \frac{1}{t} \frac{C}{K},$$

oder da bekanntlich:

$$(12.) \quad C = \frac{\pi}{2} \vartheta(0, \tau)_3^2,$$

$$(13.) \quad K = \frac{\pi}{2} \vartheta\left(0, \frac{t\tau - 16\xi}{t'}\right)_3^2$$

ist,

$$(14.)\qquad a = \frac{1}{t}\,\frac{\vartheta(0,\tau)_3^2}{\vartheta\left(0,\frac{t\tau-16\xi}{t'}\right)_3^2},$$

also:

$$(15.)\qquad M = \frac{(-1)^{\frac{t-1}{2}}}{t}\,\frac{\vartheta(0,\tau)_3^2}{\vartheta\left(0,\frac{t\tau-16\xi}{t'}\right)_3^2},$$

so dass, wenn $c^2 = \varphi^8(\tau)$ gesetzt wird, die Multiplicatorgleichung, deren Irreductibilität nachgewiesen werden soll, die folgende Form annimmt:

$$(16.)\qquad f\left(\varphi^8(\tau), \frac{(-1)^{\frac{t-1}{2}}}{t}\,\frac{\vartheta(0,\tau)_3^2}{\vartheta\left(0,\frac{t\tau-16\xi}{t'}\right)_3^2}\right) = 0,$$

worin t jeden Theiler von n, $t' = \frac{n}{t}$ und ξ eine jede der Zahlen $0, 1, 2, \dots t'-1$ bedeuten soll. Angenommen nun, es hätte eine Gleichung mit (16.) eine Lösung von der Form

$$\frac{(-1)^{\frac{\delta-1}{2}}}{\delta}\,\frac{\vartheta(0,\tau)_3^2}{\vartheta\left(0,\frac{\delta\tau-16x}{\delta'}\right)_3^2}$$

gemein, so dass die Gleichung bestände

$$(17.)\qquad F\left\{\varphi^8(\tau), \frac{(-1)^{\frac{\delta-1}{2}}}{\delta}\,\frac{\vartheta(0,\tau)_3^2}{\vartheta\left(0,\frac{\delta\tau-16x}{\delta'}\right)_3^2}\right\} = 0,$$

so würde eine Substitution von $\tau+16r$ statt τ sowohl die φ-Function als die ϑ-Function mit dem Modul τ unverändert lassen, während die Grösse $\frac{\delta\tau-16x}{\delta'}$, wenn

$$x - r\delta \equiv x_1 \qquad (\text{mod. } \delta')$$

gesetzt wird, worin x_1 eine beliebige Zahl $< \delta'$ ist, in

$$\frac{\delta\tau-16x_1}{\delta'}$$

übergeht, so dass aus Gleichung (17.) unmittelbar folgt, dass

$$(18.)\qquad F\left\{\varphi^8(\tau), \frac{(-1)^{\frac{\delta-1}{2}}}{\delta}\,\frac{\vartheta(0,\tau)_3^2}{\vartheta\left(0,\frac{\delta\tau}{\delta'}\right)_3^2}\right\} = 0$$

ist, wenn $x_1 = 0$ gesetzt worden, und aus dieser Gleichung will ich schliessen,

dass auch der der Transformation

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & n \end{vmatrix}$$

zugehörige Multiplicator derselben genügt. Es ist nämlich im §. 9 gezeigt worden, dass eine lineare Substitution

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 \\ b_0 & b_1 \end{vmatrix}$$

existirt, auf welche die Transformation

$$\begin{vmatrix} \delta & 0 \\ 0 & \delta' \end{vmatrix}$$

ausgeübt dasselbe Resultat hervorbringt wie die aus den beiden nachfolgenden Transformationen zusammengesetzte Transformation

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & n \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \alpha_0 & \alpha_1 \\ \beta_0 & \beta_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_0 & \alpha_1 \\ n\beta_0 & n\beta_1 \end{vmatrix},$$

wenn die Transformationszahlen in folgender Weise bestimmt werden:

$$\alpha_0 = \alpha_0\delta, \quad \alpha_1 = \alpha'_1.16\delta', \quad \beta_0 = 16\beta'_0, \qquad \beta_1 = \beta'_1,$$
$$a_0 = \alpha'_0, \quad a_1 = 16\alpha'_1, \quad b_0 = 16\delta'\beta'_0, \quad b_1 = \delta\beta'_1,$$

worin die Grössen α'_0, α'_1, β'_0, β'_1 nur so zu wählen sind, dass

$$\delta\alpha'_0\beta'_1 - 16^2\delta'\alpha'_1\beta'_0 = 1$$

ist. Wählen wir in unserem Falle

$$\alpha'_0 = \alpha'_1 = 1,$$

so wird die Gleichung (18.) offenbar in die folgende übergehen:

$$(19.) \qquad F\left\{\varphi^8\left(\frac{b_0 - a_0\tau}{a_1\tau - b_1}\right), \frac{(-1)^{\frac{\delta-1}{2}}}{\delta} \frac{\vartheta\left(0, \frac{b_0 - a_0\tau}{a_1\tau - b_1}\right)_3^2}{\vartheta\left(0, \frac{\beta_0 - \alpha_0\frac{\tau}{n}}{\alpha_1\frac{\tau}{n} - \beta_1}\right)_3^2}\right\} = 0.$$

Nun ist aber

$$\varphi^8\left(\frac{b_0 - a_0\tau}{a_1\tau - b_1}\right) = \varphi^8(\tau),$$

und wie leicht aus den Gleichungen (1.) und (4.) zu ersehen, da

$$\mathfrak{q} = b_0 b_1, \quad \mathfrak{m} = a_0 a_1$$

ist,

$$\vartheta\left(0, \frac{b_0 - a_0\tau}{a_1\tau - b_1}\right)_3^2 = C_1^2\vartheta(0,\tau)_3^2 = \delta_1^2\sigma_1^2 : \frac{-i.16}{\delta\beta_1' - 16\tau}\vartheta(0,\tau)_3^2$$

und

$$\vartheta\left(0, \frac{\beta_0 - \alpha_0\frac{\tau}{n}}{\alpha_1\frac{\tau}{n} - \beta_1}\right)_3^2 = C_2^2\,\vartheta\left(0, \frac{\tau}{n}\right)_3^2 = \delta_2^2\sigma_2^2 : \frac{-i.16\delta'}{\beta_1' - 16\delta'\frac{\tau}{n}}\vartheta\left(0, \frac{\tau}{n}\right)_3^2,$$

oder da

$$\delta_1 = \delta_2 = 1$$

ist,

$$(20.)\qquad \frac{(-1)^{\frac{\delta-1}{2}}}{\delta}\frac{\vartheta\left(0, \frac{b_0 - a_0\tau}{a_1\tau - b_1}\right)_3^2}{\vartheta\left(0, \frac{\beta_0 - \alpha_0\frac{\tau}{n}}{\alpha_1\frac{\tau}{n} - \beta_1}\right)_3^2} = (-1)^{\frac{\delta-1}{2}}\delta'\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}\frac{\vartheta(0,\tau)_3^2}{\vartheta\left(0,\frac{\tau}{n}\right)_3^2},$$

und es wird somit nur noch auf die Bestimmung des Verhältnisses der σ ankommen.

Nun ist aber nach I. 1.

$$\sigma_1^2 = \left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^2 2^4$$

und

$$\sigma_2^2 = \left(\frac{1+i(-1)^{\frac{n+1}{2}}}{\sqrt{2}}\right)^2 i^{2\left(\frac{\delta'-1}{2}\right)^2} 2^4.\delta',$$

und hieraus folgt, wie leicht zu sehen,

$$\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} = \frac{(-1)^{\frac{\delta-1}{2}}}{\delta'},$$

und somit auch

$$\frac{(-1)^{\frac{\delta-1}{2}}}{\delta}\frac{\vartheta\left(0, \frac{b_0 - a_0\tau}{a_1\tau - b_1}\right)_3^2}{\vartheta\left(0, \frac{\beta_0 - \alpha_0\frac{\tau}{n}}{\alpha_1\frac{\tau}{n} - \beta_1}\right)_3^2} = \frac{\vartheta(0,\tau)_3^2}{\vartheta\left(0,\frac{\tau}{n}\right)_3^2};$$

es geht daher die Gleichung (19.) über in

$$(21.)\qquad F\left\{\varphi^8(\tau), \frac{\vartheta(0,\tau)_3^2}{\vartheta\left(0,\frac{\tau}{n}\right)_3^2}\right\} = 0,$$

woraus also folgt, dass die Gleichung (17.) auch die zur Transformation

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & n \end{vmatrix}$$

gehörige Wurzel der Multiplicatorgleichung zur Lösung hat.

Nun ist ferner in §. 9 gezeigt worden, dass eine lineare Transformation

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 \\ b_0 & b_1 \end{vmatrix}$$

existirt, auf welche die Transformation

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & n \end{vmatrix}$$

ausgeübt, dasselbe Resultat hervorbringt, als die aus den beiden nachfolgenden Transformationen zusammengesetzte Transformation

$$\begin{vmatrix} t & 0 \\ 0 & t' \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \alpha_0 & \alpha_1 \\ \beta_0 & \beta_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_0 t & \alpha_1 t \\ \beta_0 t' & \beta_1 t' \end{vmatrix},$$

wenn die Transformationszahlen den folgenden Bedingungen genügen:

$$a_0 = a_0' t, \quad a_1 = 16 a_1', \quad b_0 = 16 b_0' t', \quad b_1 = b_1',$$
$$\alpha_0 = a_0', \quad \alpha_1 = 16 a_1' t, \quad \beta_0 = 16 b_0', \quad \beta_1 = t b_1',$$

worin die Grössen a_0', a_1', b_0', b_1' so zu wählen sind, dass

$$t a_0' b_1' - 16^2 t' a_1' b_0' = 1$$

ist.

Wählen wir wieder

$$a_0' = a_1' = 1,$$

so wird die Gleichung (21.) in die folgende übergehen:

$$(22.) \qquad F\left\{ \varphi^8\left(\frac{b_0 - a_0\tau}{a_1\tau - b_1}\right), \; \frac{\vartheta\left(0, \frac{b_0 - a_0\tau}{a_1\tau - b_1}\right)_2^2}{\vartheta\left(0, \frac{\beta_0 - \alpha_0 \frac{t\tau}{t'}}{\alpha_1 \frac{t\tau}{t'} - \beta_1}\right)_3^2} \right\} = 0.$$

Nun ist aber

$$\varphi^8\left(\frac{b_0 - a_0\tau}{a_1\tau - b_1}\right) = \varphi^8(\tau),$$

und ähnlich wie vorher

$$\vartheta\left(0, \frac{b_0 - a_0\tau}{a_1\tau - b_1}\right)_3^2 = C_1^2\vartheta(0,\tau)_3^2 = \delta_1^2\sigma_1^2 : \frac{-i.16}{b_1' - 16\tau} \times \vartheta(0,\tau)_3^2,$$

$$\vartheta\left(0, \frac{\beta_0 - \alpha_0\frac{t\tau}{t'}}{\alpha_1\frac{t\tau}{t'} - \beta_1}\right)_3^2 = C_2^2\vartheta\left(0, \frac{t\tau}{t'}\right)_3^2 = \delta_2^2\sigma_2^2 : \frac{-i.16t}{tb_1' - 16t\tau} \times \vartheta\left(0, \frac{t\tau}{t'}\right)_3^2,$$

oder da

$$\delta_1 = \delta_2 = 1$$

ist,

$$(23.)\qquad \frac{\vartheta\left(0, \frac{b_0 - a_0\tau}{a_1\tau - b_1}\right)_3^2}{\vartheta\left(0, \frac{\beta_0 - \alpha_0\frac{t\tau}{t'}}{\alpha_1\frac{t\tau}{t'} - \beta_1}\right)_3^2} = \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}\,\frac{\vartheta(0,\tau)_3^2}{\vartheta\left(0, \frac{t\tau}{t'}\right)_3^2}.$$

Nun ist aber

$$\sigma_1^2 = \left(\frac{1 + i(-1)^{\frac{t+1}{2}}}{\sqrt{2}}\right)^2.2^4,$$

$$\sigma_2^2 = \left(\frac{1 + i(-1)^{\frac{t+1}{2}}}{\sqrt{2}}\right)^2.i^{2\left(\frac{t-1}{2}\right)^2}.2^4.t,$$

also

$$\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} = \frac{(-1)^{\frac{t-1}{2}}}{t},$$

und somit auch

$$\frac{\vartheta\left(0, \frac{b_0 - a_0\tau}{a_1\tau - b_1}\right)_3^2}{\vartheta\left(0, \frac{\beta_0 - \alpha_0\frac{t\tau}{t'}}{\alpha_1\frac{t\tau}{t'} - \beta_1}\right)_3^2} = \frac{(-1)^{\frac{t-1}{2}}}{t}\,\frac{\vartheta(0,\tau)_3^2}{\vartheta\left(0, \frac{t\tau}{t'}\right)_3^2}.$$

Es geht daher die Gleichung (20.) über in

$$(24.)\qquad F\left\{\varphi^8(\tau), \frac{(-1)^{\frac{t-1}{2}}}{t}\,\frac{\vartheta(0,\tau)_3^2}{\vartheta\left(0, \frac{t\tau}{t'}\right)_3^2}\right\} = 0,$$

woraus folgt, dass die Gleichung (17.) die zur Transformation

$$\begin{vmatrix} t & 0 \\ 0 & t' \end{vmatrix},$$

also nach dem ersten Theile dieses Beweises auch die zur Transformation

$$\begin{vmatrix} t & 0 \\ 16\xi & t' \end{vmatrix}$$

gehörige Wurzel der Multiplicatorgleichung zur Lösung hat. Da die Gleichung (17.) somit alle Lösungen der Multiplicatorgleichung zu Wurzeln haben muss, so ist die letztere irreductibel.

§. 19.

Entwicklung der Multiplicatorgleichung für einen beliebigen unpaaren Transformationsgrad ohne quadratischen Theiler.

Es erübrigt endlich noch, eine Methode anzugeben, durch welche man für jeden unpaaren Transformationsgrad ohne quadratischen Theiler die zugehörige Multiplicatorgleichung wirklich herstellen kann, und zwar wird sich eine solche vermöge früher aufgestellter Beziehungen unmittelbar ergeben, wenn man erst den Grad der Coefficienten der Multiplicatorgleichung in Bezug auf den vorgelegten Integralmodul bestimmt haben wird.

Nun war aber in §. 17 gezeigt, dass, wenn man in der Multiplicatorgleichung

$$(1.)\quad M^{\nu}+f_1(c^2)M^{\nu-1}+f_2(c^2)M^{\nu-2}+\cdots+f_{\nu-1}(c^2)M+\frac{1}{p^{(q+1)(r+1)\dots}q^{(p+1)(r+1)\dots}\dots} = 0$$

$\frac{1}{c^2}$ statt c^2 setzt, die Lösungen derselben in $\frac{Mc}{k}$ übergehen, oder dass für jedes durch einen Repräsentanten der nicht äquivalenten Klassen transformirte k die Gleichung

$$(2.)\quad \begin{cases} M^{\nu}\frac{c^{\nu}}{k^{\nu}}+f_1\left(\frac{1}{c^2}\right)M^{\nu-1}\frac{c^{\nu-1}}{k^{\nu-1}}+f_2\left(\frac{1}{c^2}\right)M^{\nu-2}\frac{c^{\nu-2}}{k^{\nu-2}}+\cdots \\ \cdots+f_{\nu-1}\left(\frac{1}{c^2}\right)M\frac{c}{k}+\frac{1}{p^{(q+1)(r+1)\dots}q^{(p+1)(r+1)\dots}\dots} = 0 \end{cases}$$

mit der Gleichung (1.) eine Lösung gemein hat.

Lässt man nun c verschwinden, so werden nach §. 15 die Lösungen k der zur Transformation n^{ten} Grades gehörigen Modulargleichung ebenfalls verschwinden, während die M endliche, von Null verschiedene Werthe annehmen, welche gleich der Einheit oder Brüche sind, deren Zähler die positive oder negative Einheit und deren Nenner Producte aus den Primfactoren der Zahl n sind. Da nun auch die Gleichung (2.) für die verschiedenen transformirten Werthe k dieselben Lösungen haben muss, also, wie leicht zu sehen, wenn

$t' > t$, keins der Glieder unendlich werden darf, so wird sich hieraus unmittelbar eine obere Grenze für den Grad der Functionen

$$f_1(c^2),\quad f_2(c^2)\quad \ldots\quad f_{\nu-1}(c^2)$$

ergeben.

Da nämlich

$$k = \varphi^4\left(\frac{t\tau - 16\xi}{t'}\right) = 2^2 . e^{\frac{-8\pi i\xi}{t'}} . q^{\frac{t}{2t'}} \frac{\left(1+e^{\frac{-32\pi i\xi}{t'}} . q^{\frac{2t}{t'}}\right)\left(1+e^{\frac{-64\pi i\xi}{t'}} . q^{\frac{4t}{t'}}\right)\ldots}{\left(1+e^{\frac{-16\pi i\xi}{t'}} . q^{\frac{t}{t'}}\right)\left(1+e^{\frac{-48\pi i\xi}{t'}} . q^{\frac{3t}{t'}}\right)\ldots},$$

also für verschwindende c, wofür auch q sich der Null nähert,

$$(3.)\qquad \lim k = 2^2 . e^{\frac{-8\pi i\xi}{t'}} . \lim q^{\frac{t}{2t'}}$$

und

$$(4.)\qquad \lim c = 2^2 . \lim q^{\frac{1}{4}}$$

ist, so wird offenbar, wenn der Grad der Function

$$f_{\nu-p}(c^2)$$

in Bezug auf c^2 mit r bezeichnet wird, die Bedingung dafür, dass der Ausdruck

$$f_{\nu-p}\left(\frac{1}{c^2}\right)\frac{c^p}{k^p}$$

nicht unendlich wird, oder dass

$$\frac{q^{\frac{p}{2}}}{q^r . q^{\frac{pt}{2t'}}}$$

endlich bleibt, dadurch ausgedrückt werden, dass

$$\frac{p}{2} \geqq r + \frac{pt}{2t'} \quad \text{oder}$$

$$r \leqq \frac{p}{t'}\left(\frac{t'-t}{2}\right),$$

oder es wird, da ν der höchste Werth von p ist, die oberste Grenze des Grades eines jeden der Coefficienten der Multiplicatorgleichung durch den Ausdruck bestimmt sein

$$\frac{\nu}{t'}\left(\frac{t'-t}{2}\right),$$

wenn man noch der Einfachheit wegen t' und t so wählt, dass dieser Ausdruck den möglich grössten Werth erhält. Nun ist aber

$$\frac{\nu}{t'}\left(\frac{t'-t}{2}\right) = \frac{\nu}{2}\left(1 - \frac{t}{t'}\right) = \frac{\nu}{2} - \frac{\nu . n}{2t'^2}$$

und nimmt für $t' = n$ seinen grössten Werth an, so dass die oberste Grenze

für den Grad eines Coefficienten durch den Ausdruck

$$\frac{\nu}{2}-\frac{\nu}{2n} = \frac{\nu}{2}\left(\frac{n-1}{n}\right)$$

gegeben ist. Ist n eine Primzahl, also $\nu = n+1$, so erhält man als oberste Grenze den Werth

$$\frac{n+1}{n}\left(\frac{n-1}{2}\right) = \frac{n-1}{2}+\frac{n-1}{2n}$$

oder den Werth $\frac{n-1}{2}$ *).

Nachdem nunmehr für die allgemeine Multiplicatorgleichung (1.) eine Zahl gefunden ist, die der Grad der einzelnen Coefficienten derselben nicht übersteigen kann, wird es leicht sein, diese Coefficienten selbst zu finden. Da nämlich nach §. 18 für den Repräsentanten

$$\begin{vmatrix} n & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

der Multiplicator durch den Ausdruck gegeben ist

$$M = \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{n}\frac{\vartheta(0,\tau)_3^2}{\vartheta(0,n\tau)_3^2} = \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{n}\frac{(1+2q+2q^4+2q^9+\cdots)^2}{(1+2q^n+2q^{4n}+2q^{9n}+\cdots)^2},$$

und ausserdem

$$c^2 = 2^4 q\{(1+q^2)(1+q^4)\ldots\}^{16}(1-q)^8(1-q^3)^8\ldots,$$

so werden, wenn man die Coefficienten der Multiplicatorgleichung in der Form annimmt

$$a_0+a_1c^2+a_2c^4+\cdots+a_{\frac{n-1}{2}}c^{n-1},$$

in den obigen Ausdrücken für M, c^2 und deren Potenzen nur so viel Glieder zu entwickeln sein, als die Anzahl der unbestimmten Coefficienten

$$a_0,\ a_1,\ \ldots\ a_{\frac{n-1}{2}},\quad b_0,\ b_1,\ \ldots\ b_{\frac{n-1}{2}},\quad \ldots\quad m_0,\ m_1,\ \ldots\ m_{\frac{n-1}{2}}$$

nöthig macht, um die letzteren dadurch, dass man die Coefficienten der einzelnen Potenzen von q verschwinden lässt, zu bestimmen. Für die wirkliche Herstellung der Gleichungen ist zu beachten, dass die oben (§. 17) gefundene Form der Coefficienten der Multiplicatorgleichung

$$\varphi(c^2(1-c^2)) \quad \text{oder} \quad \varphi(c^2(1-c^2))(c_1^2-c^2)$$

eine wesentliche Abkürzung der Rechnung gestattet.

---

*) Ich will bemerken, dass, wie leicht einzusehen, der Coefficient von M^n den Grad $\frac{n-1}{2}$ wirklich erreicht.

Ich will nunmehr die Rechnung zur Herleitung der Multiplicatorgleichung, welche zur Transformation dritten Grades gehört, anstellen.

Da in diesem Falle nach §. 17 die Multiplicatorgleichung die Form hat:

$$M^4+a_0(1-2c^2)M^3+a_1M^2+a_2(1-2c^2)M-\tfrac{1}{3} = 0,$$

indem $\frac{n-1}{2}=1$ die oberste Grenze des Grades der Coefficienten liefert, so wird, wenn man

$$M = -\tfrac{1}{3}\frac{(1+2q+2q^4+\cdots)^2}{(1+2q^3+2q^{12}+\cdots)^2}$$

und

$$c^2 = 16q(1-8q+44q^2-192q^3-\cdots)$$

in die obige Gleichung einsetzt und einige leicht ersichtliche Reductionen vornimmt, die folgende Bestimmungsgleichung erhalten:

$$(1+16q+112q^2+\cdots)-3a_0(1-32q+256q^2+\cdots)(1+12q+60q^2+\cdots)$$
$$+9a_1(1+8q+24q^2+\cdots)-27a_2(1+4q+4q^2+\cdots)(1-32q+256q^2+\cdots)-27=0,$$

oder, wenn man die Coefficienten von q^0, q^1, q^2 der Null gleich setzt, die drei Gleichungen:

$$1-3a_0+9a_1-27a_2-27 = 0,$$
$$16+60a_0+72a_1+756a_2 = 0,$$
$$112+204a_0+216a_1-3564a_2 = 0;$$

woraus sich

$$a_0=-\tfrac{8}{3},\quad a_1=2,\quad a_2=0$$

ergiebt, und wir erhalten somit die zur Transformation dritten Grades gehörige Multiplicatorgleichung in der Form

$$M^4-\tfrac{8}{3}(1-2c^2)M^3+2M^2-\tfrac{1}{3} = 0.$$

Genau in derselben Weise erhält man die zur Transformation fünften Grades gehörige Multiplicatorgleichung, deren Coefficienten nur Functionen von $c^2(1-c^2)$ sein können:

$$M^6+\tfrac{1}{5}(256c^2(1-c^2)-26)M^5+11M^4-12M^3+7M^2-2M+\tfrac{1}{5} = 0. -$$

Aus den in der vorliegenden Abhandlung behandelten Gleichungen lassen sich nun aber alle in der Transformationstheorie der elliptischen Functionen auftretenden Gleichungen ableiten, welche den gegebenen Integralmodul, den transformirten und den Multiplicator der Transformation mit einander verbinden, indem man nur auf die Modulargleichung, die (V, U)- und die Multiplicatorgleichung nach den Methoden, wie ich sie oben angegeben, Transformationen des ersten oder zweiten Grades anzuwenden hat.

Heidelberg, im December 1869.

Bemerkungen zu der Abhandlung: „über hypergeometrische Functionen n^{ter} Ordnung“ in diesem Journal Bd. 71 S. 316.

(Von Herrn *L. Fuchs* in Greifswald.)

1.

In meiner Arbeit (dieses Journal Bd. 66 No. 7) ist gezeigt, dass in der Klasse der eben daselbst No. 4 Gleichung (12.) charakterisirten Differentialgleichungen, den Fall einer Differentialgleichung erster Ordnung mit drei singulären Punkten abgerechnet, diejenige, welcher die durch die *Gauss*sche Reihe darstellbaren Functionen genügen, die einzige ist, welche durch die singulären Punkte und die Exponenten der zu den einzelnen singulären Punkten und dem Unendlichkeitspunkte gehörigen Fundamentalsysteme von Integralen, oder, was dasselbe ist, durch die Wurzeln der zu diesen Punkten gehörigen determinirenden Fundamentalgleichungen *allein* vollständig bestimmt werden. Ist n die Ordnung der Differentialgleichung (12.) No. 4 meiner angeführten Abhandlung, ϱ die Anzahl der gegebenen und bestimmten singulären Punkte derselben, so ist, wie aus No. 7 eben daselbst zu ersehen, die Anzahl der nach Festsetzung der Wurzeln der Fundamentalgleichungen noch verfügbaren Constanten der Differentialgleichung:

$$\varepsilon_\varrho = \frac{n^2(\varrho-1)-n(\varrho+1)+2}{2}.$$

In der in der Ueberschrift genannten Abhandlung nimmt Herr *Pochhammer* diesen Satz zum Ausgangspunkte seiner Untersuchung. Er betrachtet den Fall $\varrho = n$ und verfügt, nachdem er für jeden einzelnen singulären Punkt und den Unendlichkeitspunkt die Exponenten fixirt, über die übrigen

$$\varepsilon_n = \frac{(n-2)(n^2-1)}{2}$$

Constanten der Art, dass er zu einer Differentialgleichung gelangt:

$$(A.)\quad \varphi(x)\frac{d^n y}{dx^n} + \sum_{n-1}^{0}{}_k (-1)^{n-k}\left[(\lambda-k-1)_{n-k}\varphi^{(n-k)}(x)+(\lambda-k-1)_{n-k-1}\psi^{(n-k-1)}(x)\right]\frac{d^k y}{dx^k} = 0,$$

wo

$$\varphi(x) = (x-a_1)(x-a_2)\dots(x-a_n),$$
$$\frac{\psi(x)}{\varphi(x)} = \frac{b_1}{x-a_1}+\frac{b_2}{x-a_2}+\dots+\frac{b_n}{x-a_n},$$

indem $b_1, b_2, \dots b_n, \lambda$ willkürlich gegebene Constanten bedeuten (s. seine Abhandlung Abschnitt I. Gleichung (16.)).

2.

Um zur Differentialgleichung (*A.*) zu gelangen, stellt Herr *Pochhammer* — wenn ich mich in der von mir gebrauchten Terminologie ausdrücke — die Bedingung auf, dass die determinirenden Fundamentalgleichungen für jeden singulären Punkt die Wurzeln $0, 1, 2, \dots n-2$, für den Unendlichkeitspunkt aber die Wurzeln $-\lambda+1, -\lambda+2, -\lambda+3, \dots -\lambda+n-1$ haben, und dass die diesen Wurzeln als Exponenten zugeordneten Integrale für jeden singulären Punkt geradezu, für den Unendlichkeitspunkt aber mit $x^{-\lambda+1}$ multiplicirt in der Umgebung des bezüglichen singulären Punktes oder des Unendlichkeitspunktes eindeutig, continuirlich und endlich werden und in denselben Punkten von Null verschieden sind.

Der analytische Ausdruck dieser Bedingungen ist durch No. 7 meiner Abhandlung dieses Journal Bd. 68 implicite gegeben. Soll für einen singulären Punkt a die determinirende Fundamentalgleichung die Wurzeln $0, 1, 2, \dots n-2$ und ausserdem die Wurzel μ enthalten, so hat man danach *zwei Fälle* zu unterscheiden:

Entweder ist μ keine positive oder negative ganze Zahl, alsdann bilden die Wurzeln $0, 1, 2, \dots n-2$ eine Gruppe für sich, und der dort angegebene analytische Ausdruck für die Bedingung, dass die dieser Wurzelgruppe entsprechende Integralgruppe in der Umgebung von a von Logarithmen frei sei, ist mit den Gleichungen des Herrn *Pochhammer* identisch, wenn man in letzteren $P_k(x)$ für $R_k(x)$ setzt.

Oder μ ist eine positive oder negative ganze Zahl, alsdann bilden alle n Wurzeln $0, 1, 2, \dots n-2, \mu$ eine einzige Gruppe. Der analytische Ausdruck der Bedingung, dass die dieser Wurzelgruppe entsprechende Integralgruppe von Logarithmen frei sei, wie sie No. 7 meiner Abhandlung Bd. 68 giebt, enthält alsdann *ausser den Gleichungen des* Herrn *Pochhammer noch andere.*

Ist insbesondere μ gleich einer der Zahlen $0, 1, 2, \dots n-2$, so

folgt schon aus No. 6 meiner Abhandlung Bd. 66, dass die Integralgruppe Logarithmen enthält.

Dasselbe gilt vermittelst der Substitution $x = \frac{1}{t}$ für den Unendlichkeitspunkt. — Wir haben also das Resultat:

Die Behauptung des Herrn *Pochhammer*, dass *stets* die Integrale der Differentialgleichung (A.) für jeden singulären Punkt oder für den Unendlichkeitspunkt mit Potenzen resp. von $x-a$ oder x multiplicirt in der Umgebung von a oder des Unendlichkeitspunktes eindeutig, continuirlich und endlich sind, *ist nicht richtig.*

3.

Auch die Einschränkungen, welche Herr *Pochhammer* im II. Abschnitt seiner Abhandlung für die Werthe von $b_1, b_2, \dots b_n, \lambda$ macht, ändern in dieser Beziehung nichts.

Es sei mir gestattet, ein Beispiel hinzuzufügen, auf welches ich nachher noch einmal zurückkommen werde.

Es sei $n=2$, $a_1=0$, $a_2=1$, und den eben angeführten Einschränkungen in Bezug auf $b_1, b_2, \dots b_n, \lambda$ gemäss $b_1 = 1\frac{1}{2}$, $b_2 = 1\frac{1}{2}$, $\lambda = 2\frac{1}{2}$, so wird die Differentialgleichung (A.):

$$(1.) \quad 4x(x-1)\frac{d^2y}{dx^2} - 8(2x-1)\frac{dy}{dx} + 21y = 0.$$

Versucht man dieser Differentialgleichung in der Umgebung von $x=0$ durch eine Reihe

$$y = \sum_0^\infty {}_a c_a x^a$$

zu genügen, in welcher c_0 von Null verschieden ist, so müsste für $k=$ 0, 1, 2, ... in inf.

$$(2.) \quad 4(k+1)(k-2)c_{k+1} = (4k^2-20k+21)c_k$$

sein. Allein für $k=2$ verschwindet der Coefficient von c_{k+1}, aber nicht der Coefficient von c_k dieser Gleichung, wie es sein müsste.

Ebenso wenig ist in der Umgebung von $x=1$ eine Entwickelung der Form

$$y = \sum_0^\infty {}_a c_a (x-1)^a$$

möglich, wenn c_0 von Null verschieden sein soll.

Setzt man $x = \frac{1}{t}$, so erhält man aus (1.)

$$(1^a.) \quad 4(1-t)t^2\frac{d^2y}{dt^2} + 8(3-2t)t\frac{dy}{dt} + 21y = 0.$$

Die Wurzeln der zu $t = 0$ gehörigen determinirenden Fundamentalgleichung sind $-\frac{3}{2}$ und $-\frac{7}{2}$. Setzt man

$$y = t^{-\frac{7}{2}}.\eta,$$

so wird aus (1^a.)

$$(1^b.) \qquad 4(1-t)t\frac{d^2\eta}{dt^2}+4(3t-1)\frac{d\eta}{dt}-7\eta = 0.$$

Dieser Differentialgleichung kann man nicht durch eine Reihe

$$\eta = \sum_0^\infty {}_a c_a t^a$$

genügen, wo c_0 von Null verschieden ist, was wie oben folgt.

Ueberhaupt hat die zu irgend einem singulären Punkt a_ν der Differentialgleichung (A.) gehörige determinirende Fundamentalgleichung ausser den Wurzeln 0, 1, 2, ... $n-2$ die Wurzel $b_\nu+\lambda-1$, und wenn diese eine positive oder negative ganze Zahl ist, so können nach No. 2 die Integrale der Differentialgleichung (A.) in der Umgebung von a_ν Logarithmen enthalten. — Die zum Unendlichkeitspunkte gehörige determinirende Fundamentalgleichung hat ausser den Wurzeln $-\lambda+1$, $-\lambda+2$, $-\lambda+3$, ... $-\lambda+n-1$ noch die Wurzel $n-\lambda-(b_1+b_2+\cdots+b_n)$. Ist also $b_1+b_2+\cdots+b_n$ eine positive oder negative ganze Zahl, so können die Integrale der Differentialgleichung (A.) in der Umgebung des Unendlichkeitspunktes Logarithmen enthalten.

In der That sind in dem obigen Beispiele für die singulären Punkte 0 und 1 die zu der Wurzel Null, für den Unendlichkeitspunkt die zu der Wurzel $-\frac{7}{2}$ der bezüglichen determinirenden Fundamentalgleichungen gehörigen Integrale der Differentialgleichung (1.) mit Logarithmen behaftet.

4.

Wir finden das obige Resultat auch bestätigt, wenn wir die im Abschnitt II. der Abh. des Herrn *Pochhammer* behandelte Integration der Differentialgleichung (A.) durch bestimmte Integrale einer Prüfung unterziehen. Es wird daselbst verificirt, dass

$$y_{\mu\nu} = \int_{a_\mu}^{a_\nu} (u-a_1)^{b_1-1}(u-a_2)^{b_2-1}\dots(u-a_n)^{b_n-1}(u-x)^{\lambda-1}du \quad \text{und}$$

$$y_\nu = \int_{a_\nu}^{x} (u-a_1)^{b_1-1}(u-a_2)^{b_2-1}\dots(u-a_n)^{b_n-1}(u-x)^{\lambda-1}du$$

Integrale der Differentialgleichung (A.) sind.

Wir wollen uns jedoch nicht bei dem Umstande aufhalten, dass man erst dann die Differentialgleichung $(A.)$ als durch diese Functionen von x integrirt ansehen könnte, wenn der Nachweis geliefert wäre, dass man aus denselben ein Fundamentalsystem von Integralen herstellen könne, d. h. ein solches System, zwischen dessen Elementen keine identische lineare, homogene Relation mit constanten Coefficienten stattfindet. Wir wollen daher zulassen, dass z. B. $y_n, y_{12}, y_{23}, \dots y_{k-2\,k-1}, y_{k-1\,k+1}, y_{k+1\,k+2}, \dots y_{n-1\,n}, y_k$ ein Fundamentalsystem bildet, und die Entwickelung dieser Functionen in der Umgebung von a_k prüfen.

Zunächst muss das von Herrn *Pochhammer* adoptirte Princip, dass ein bestimmtes Integral als Function eines Parameters aufgefasst eindeutig sei, *wenn die einzelnen Elemente desselben eindeutig sind,* zurückgewiesen werden. Ich will hier nicht auf die Behandlung solcher Functionen nach diesem Gesichtspunkte tiefer eingehen, verweise vielmehr auf meine Abh. Bd. 71 dieses Journals „die Periodicitätsmoduln der hyperelliptischen Integrale etc.“ Ich will nur bemerken, dass man nicht übersehen dürfe, dass sich auch die Integrationswege und die Integrationsgrenzen ändern, und dass schon die einfachsten Beispiele die Unzulässigkeit des genannten Princips zeigen. Betrachtet man z. B.

$$y = \int_0^1 \frac{du}{u-x}$$

als Function von x, so ist $\frac{1}{u-x}$ um jeden Punkt x eindeutig, aber $y = \log\left(\frac{x-1}{x}\right)$ ist nicht eindeutig um $x=0$ und $x=1$.

Es lässt sich in der That auf anderem Wege beweisen, dass die Function $y_{\mu\nu}$, wo μ und ν von k verschieden sind, und der Integrationsweg *nicht durch a_k geht,* in der Umgebung von a_k eindeutig, endlich und continuirlich ist.

Denn man kann bei einem Umlaufe von x um a_k den Umlaufskreis so klein annehmen, dass der Integrationsweg von $y_{\mu\nu}$ ganz ausserhalb desselben liegt. Man hat alsdann

$$\text{mod.}\,(x-a_k) < \text{mod.}\,(u-a_k),$$

so dass, wenn man setzt

$$\Psi_k(u) = \frac{(u-a_1)^{b_1-1}(u-a_2)^{b_2-1}\dots(u-a_n)^{b_n-1}}{(u-a_k)^{b_k-1}},$$

$$(1.)\qquad y_{\mu\nu} = \sum_0^\infty {}_\alpha\, l_\alpha (x-a_k)^\alpha \int_{a_\mu}^{a_\nu} \Psi_k(u)\,(u-a_k)^{b_k+\lambda-\alpha-2}\,du,$$

wo l_α die successiven Binomialcoefficienten von $\lambda-1$ bedeutet. Die hier

vorkommenden Integrale sind endlich, weil der Integrationsweg nicht durch a_k geht, und weil über die Grössen b_1, b_2, ... b_n und λ solche Dispositionen getroffen sind, dass $\Psi_k(u)$ auf dem ganzen Wege endlich ist.

Herr *Pochhammer* lässt bei seiner Beweisart zu, dass der Integrationsweg durch a_k gehe. Aus unserem Beweise ist zu ersehen, dass dieses unzulässig. Aber abgesehen hiervon kann man aus No. 7 meiner Abhandlung (dieses Journal Bd. 71) sehen, wie die Eindeutigkeit aufgehoben würde, falls der Integrationsweg durch a_k ginge.

Ebenso folgt, dass y_k in der Umgebung von a_k mit $(x-a_k)^{-\lambda+1-b_k}$ multiplicirt eindeutig ist. In der That ist es bei einem Umlaufe von x um a_k möglich, den Integrationsweg von a_k nach x ganz innerhalb des Umlaufskreises zu erhalten, so dass

$$\text{mod.}(u-a_k) \leqq \text{mod}(x-a_k).$$

Man hat alsdann

$$y_k = \sum_0^\infty{}_\alpha p_\alpha (x-a_k)^{\lambda-1-\alpha} \int_{a_k}^x \Psi_k(u)(u-a_k)^{b_k+\alpha-1} du.$$

Ist μ von k verschieden, so ist

$$\text{mod.}(u-a_k) < \text{mod.}(a_\mu - a_k),$$

folglich lässt sich $\Psi_k(u)$ nach positiven ganzen Potenzen von $u-a_k$ entwickeln. Es sei demnach

$$\int_{a_k}^x \Psi_k(u)(u-a_k)^{b_k-1+\alpha} du = (x-a_k)^{b_k+\alpha} \sum_0^\infty{}_c \gamma_{c\alpha}(x-a_k)^c,$$

so folgt

$$(2.) \qquad y_k = (x-a_k)^{\lambda+b_k-1} \sum_0^\infty{}_\alpha \sum_0^\infty{}_c\, p_\alpha \gamma_{c\alpha}(x-a_k)^c.$$

Anders verhält es sich jedoch mit y_n. Während nämlich x um a_k einen Umlauf macht, so ist nicht bloss die obere Grenze, sondern auch der Integrationsweg zu ändern, so dass er durch keinen der Punkte a_1, a_2, ... a_n hindurchführt. Hierdurch geht y_n nach einem solchen Umlauf im Allgemeinen in eine lineare homogene Function der übrigen Integrale des Fundamentalsystems über, muss also in der Entwickelung für die Umgebung von a_k Logarithmen enthalten (vergl. meine Abh. Bd. 71 No. 5 bis 7). Da a_n eine beliebige von a_k verschiedene der Grössen a_1, a_2, ... a_n ist, so folgt, dass die Behauptung des Herrn *Pochhammer*, y_ν sei in der Umgebung von a_k eindeutig, wenn k von ν verschieden ist, *allgemein nicht richtig ist.*

Ich will letzteres noch durch ein Beispiel erläutern. Nimmt man, wie in No. 3, $n=2$, $b_1 = 1\frac{1}{2}$, $b_2 = 1\frac{1}{2}$, $\lambda = 2\frac{1}{2}$, so ist

$$(3.)\qquad y = \int_0^x u^{\frac{1}{3}}(u-1)^{\frac{1}{3}}(u-x)^{\frac{5}{3}}\,du$$

ein Integral der Differentialgleichung (1.) in No. 3.

Befindet sich x in der Umgebung von 1, so kann man den Integrationsweg in y so wählen, dass beständig

$$\operatorname{mod}(u-1) \geqq \operatorname{mod}(x-1) \qquad \operatorname{mod}(u-1) \leqq 1.$$

Es sei daher

$$\left(1+\frac{x-1}{1-u}\right)^{\frac{5}{3}} = \sum_0^\infty{}_a \zeta_a \left(\frac{x-1}{1-u}\right)^a,$$

$$u^{\frac{1}{3}} = (1+u-1)^{\frac{1}{3}} = \sum_0^\infty{}_b \varepsilon_b (u-1)^b.$$

Es ist dann

$$u^{\frac{1}{3}}(u-1)^{\frac{1}{3}}(u-x)^{\frac{5}{3}} = (1-u)^2 \left\{ \sum_0^\infty{}_c R_c(x) \frac{(x-1)^c}{(1-u)^c} + T(u,x) \right\},$$

wo

$$R_c(x) = \zeta_c \varepsilon_0 + \zeta_{c+1}\varepsilon_1(x-1) + \zeta_{c+2}\varepsilon_2(x-1)^2 + \cdots \text{ in inf.}$$

und $T(u,x)$ nur positive ganze Potenzen von $u-1$ und $x-1$ enthält, also

$$(4.)\qquad y = -R_3(x)(x-1)^3 \log(1-x) + S(x),$$

wo $S(x)$ nur positive ganze Potenzen von $x-1$ enthält. Dieses Integral gehört zur Wurzel Null der dem Punkte $x=1$ angehörigen determinirenden Fundamentalgleichung der Differentialgleichung (1.) No. 3.

5.

Schliesslich ist noch anzuführen, dass von einem allerdings ganz verschiedenen Gesichtspunkte aus bereits Herr *Tissot* im 17. Bande (Jahrgang 1852) des *Liouville*schen Journals in der Abhandlung „sur un déterminant etc.“ zu einer Differentialgleichung geführt wurde, welche im Wesentlichen von der Differentialgleichung (*A.*) des Herrn *Pochhammer* nicht verschieden ist. Auch hat Herr *Tissot* dieselbe durch bestimmte Integrale integrirt, welche wesentlich mit denen im II^{ten} Abschnitt der Abh. des Herrn *Pochhammer* übereinstimmen.

Bezeichnen wir in der That die Integrationsvariable in den Integralen A_i des Herrn *Tissot* mit u statt mit x und setzen x für a, $\lambda-1$ für $n-m$, b_1-1 für $-m_1$, b_2-1 für $-m_2$, b_3-1 für $-m_3$, ... b_n-1 für $-m_n$, endlich $e^{-u}\varphi(u)$ für $\varphi(u)$, so ist

$$A_i = \int_{a_i}^{a_{i+1}} (u-a_1)^{b_1-1}(u-a_2)^{b_2-1}\dots(u-a_n)^{b_n-1}(u-x)^{\lambda-1}\,du,$$

mit den Integralen des Herrn *Pochhammer* im Abschnitt II. seiner Abh. übereinstimmend.

Die Function $\varpi(u)$ bei Herrn *Tissot* wird jetzt

$$\varpi(u) = F(u) + F(u)\frac{d\log\varphi(u)e^{-u}}{du} = F(u)\frac{\varphi'(u)}{\varphi(u)},$$

$F(u)$ und $\varphi(u)$ in der Bedeutung des Herrn *Tissot* genommen. Nun ist

$$(1.)\quad \begin{cases} F(u) = (-1)^n(u-x)\varphi(u) \quad \text{und} \\ \varpi(u) = (-1)^n(u-x)\varphi(u)\left[\frac{n-\lambda+1}{u-x}+\frac{1-b_1}{u-a_1}+\frac{1-b_2}{u-a_2}+\cdots+\frac{1-b_n}{u-a_n}\right], \end{cases}$$

wenn bei diesen letzteren Formeln

$$\varphi(u) = (u-a_1)(u-a_2)\dots(u-a_n)$$

bedeutet. Es ist demnach

$$(2.)\quad \varpi(u) = (-1)^n[(n-\lambda+1)\varphi(u)+(u-x)\varphi'(u)-(u-x)\psi(u)],$$

wo

$$\psi(u) = \varphi(u)\left[\frac{b_1}{u-a_1}+\frac{b_2}{u-a_2}+\cdots+\frac{b_n}{u-a_n}\right].$$

Man hat also

$$(3.)\quad (k+1)\varpi^{(k)}(x)-kF^{(k+1)}(x) = (-1)^n[(n-\lambda+1)\varphi^{(k)}(x)-k\psi^{(k-1)}(x)](k+1).$$

Setzt man also in *die Differentialgleichung* (7.) *No. 7 der Abh. des Herrn Tissot*

$$n+1-k = l$$

und multiplicirt mit $\frac{\alpha_{-1}}{n-\lambda+1}$, so wird dieselbe

$$(4.)\quad \sum_{n+1}^{0}{}_l(-1)^{n-l+1}[(\lambda-l-1)_{n-l+1}\varphi^{(n+1-l)}(x)+(\lambda-l-1)_{n-l}\psi^{(n-l)}(x)]\frac{d^ly}{dx^l} = 0,$$

wo festgesetzt ist, dass das Symbol m_k für ein negatives k verschwindet.

Die Differentialgleichung (4.) ist genau die Ableitung der Differentialgleichung (*A*.).

Greifswald, den 5. Juni 1870.

Ueber die partielle Differentialgleichung $\frac{\partial w}{\partial t}=\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$.

(Von Herrn *L. Schläfli* zu Bern.)

Zu den folgenden Betrachtungen über diese Differentialgleichung hat mich das Lesen der von Herrn *Hattendorff* herausgegebenen Vorlesungen *Riemanns* über partielle Differentialgleichungen veranlasst. Die genannte Gleichung ist aus der Lehre von der Wärmebewegung in einem homogenen Körper, wenn die Temperaturen nur von einer Dimension abhangen, bekannt. Bedeutet nämlich t die Zeit, x die lineare Dimension, w die Temperatur, so ist $\frac{\partial w}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$ die Bedingung für die Wärmebewegung innerhalb des Körpers. Setzt man aber t, x resp. in b^2t, abx um, so vereinfacht sich die Gleichung zu obiger Form, und man behält noch die Freiheit, irgend eine gegebene Distanz als Längeneinheit zu gebrauchen. Was ich in diesen Zeilen zu zeigen im Sinne habe, betrifft die Schwierigkeit, die allgemeine Lösung einer partiellen Differentialgleichung den Oberflächenbedingungen anzupassen. Man wird sehen, dass wenigstens bei der vorliegenden Gleichung von grosser Einfachheit ihre allgemeine Lösung hinreicht, um allen in Herrn *Hattendorf*s Buche vorkommenden Fällen von Oberflächenbedingungen zu genügen; die Anwendung der allgemeinen Lösung auf die gegebenen Fälle wird nämlich durch die Kenntniss ermöglicht, wie die für die Anfangstemperatur gegebene willkürliche Function der Abscisse x der körperlichen Schichten den Oberflächenbedingungen gemäss ausserhalb des Körpers fort zu setzen ist*). Es ist ferner mein Bestreben, das *Fourier*sche Doppelintegral zu vermeiden und Ausdrücke von gewöhnlicher Convergenz an dessen Stelle zu setzen. Da ich keine Verzweigungen einer Function werde zu betrachten haben, so möge man es mir nachsehen, wenn ich ausser dem Unendlichwerden noch eine mögliche Verzweigung einer Function in den Begriff ihrer Unstetigkeit aufnehme, und sie differentiabel nenne, um das Dasein aller ihrer Differentialcoefficienten anzuzeigen; ich gewinne so an Kürze des Ausdrucks, wenn ich nur zwei Begriffe habe, die

---

*) Herr *Fröhlich* in Hohenheim sagte mir während der Redaction dieses Aufsatzes, dass *Poisson* im 19. Bande des journal polytechnique diesen Gedanken ausgeführt habe. Aber dieses Journal stand mir nicht zur Vergleichung zu Gebot.

einander ausschliessen; eine Function ist mir dann unstetig, sobald von irgend einer Ordnung an ihre Differentialcoefficienten aufhören.

Für eine zufällige Gruppe von Werthen der Unabhängigen t, x ist die Function w differentiabel. Es steht frei, diese Gruppe mit $t=0$, $x=0$ zu bezeichnen, da die Form der Differentialgleichung dadurch nicht geändert wird. Dann ist

$$w = \Sigma\Sigma C_{m,n} \frac{t^m}{m!} \frac{x^n}{n!} \qquad (m, n = 0, 1, 2, \ldots),$$

und die Differentialgleichung verlangt $C_{m+1,n} = C_{m,n+2}$; folglich sind alle Coefficienten $C_{m,n}$ einander gleich, bei denen $2m+n$ denselben ganzen Werth hat. Man bekommt so eine Menge ganzer Functionen als particuläre Lösungen. Wird jede mit einer arbiträren Constanten multiplicirt, so betrachte ich das Aggregat der Producte als allgemeine Lösung der Differentialgleichung. Wenn a eine nicht ganze Zahl bedeutet, so kann man auch die zwei Formen unendlicher Reihen

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{a-n}}{\Gamma(a-n+1)} \frac{x^{2n}}{(2n)!} = -\frac{\sin a\pi}{\pi} t^a \Sigma (-1)^n \frac{\Gamma(n-a)}{(2n)!} \left(\frac{x^2}{t}\right)^n,$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{a-n}}{\Gamma(a-n+1)} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)} = -\frac{\sin a\pi}{\pi} t^{a+\frac{1}{2}} \Sigma (-1)^n \frac{\Gamma(n-a)}{(2n+1)!} \left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right)^{2n+1},$$

die für jeden endlichen Werth von $\frac{x^2}{4t}$ convergiren, als partikuläre Lösungen angeben; von solchen wird unten nur der Fall vorkommen, wo $2a$ eine ungerade Zahl ist. Eine unendliche Reihe dagegen, die nach steigenden Potenzen von t fortginge, ist nicht möglich, weil $\frac{t}{x^2}$ nicht klein genug werden kann, dass $x^a \Sigma \frac{\Gamma(2m-a)}{\Gamma(m+1)} \left(\frac{t}{x^2}\right)^m$ für ein um die Differenz 1 stets wachsendes m convergirte.

Wenn

$$C_{m,0} = C_{0,2m} = A_m, \qquad C_{m,1} = C_{0,2m+1} = B_m,$$

$$\sum_{m=0}^{\infty} A_m \frac{x^{2m}}{(2m)!} = f(x), \qquad \sum_{m=0}^{\infty} A_m \frac{t^m}{m!} = F(t),$$

$$\sum_{m=0}^{\infty} B_m \frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!} = g(x), \qquad \sum_{m=0}^{\infty} B_m \frac{t^m}{m!} = G(t),$$

$f(x)+g(x) = \mathfrak{f}(x)$, so ist die allgemeine Lösung folgender zwei Darstellungen fähig, die ich als erste und zweite unterscheiden werde,

$$w = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{t^m}{m!} \frac{\partial^{2m} \mathfrak{f}(x)}{\partial x^{2m}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} \frac{\partial^n F(t)}{\partial t^n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \frac{\partial^n G(t)}{\partial t^n}.$$

Wenn man w als Functionszeichen gebraucht, so entspricht die erste Darstellung der Anfangstemperatur $w(0,x) = \mathfrak{f}(x)$, die zweite den in der Ebene $x = 0$ und in der nächstfolgenden Statt findenden Temperaturen, d. h. sie entspricht den Angaben $w(t,0) = F(t)$, $\frac{\partial w}{\partial x}(t,0) = G(t)$.

Wenn die Functionen $\mathfrak{f}(x)$, $F(t)$, $G(t)$ nur im Unendlichen unstetig werden, aber so, dass z. B. $\int^{\infty} e^{-\omega^2}\mathfrak{f}(a\omega+b)\,d\omega$ noch convergirt, so kann man beide Darstellungen in bestimmte Integrale verwandeln. Denn man hat

$$\frac{(2m)!}{m!} = 2^{2m}\frac{\Gamma(m+\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2})} = \frac{2^{2m}}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\omega^2}\omega^{2m}\,d\omega,\quad \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\omega^2}\omega^{2m+1}\,d\omega = 0,$$

und

$$\frac{n!}{(2n)!} = (\tfrac{1}{2})^{2n}\frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(n+\frac{1}{2})} = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2n}}\cdot\frac{1}{2i\pi}\int e^{\omega}\omega^{-n-\frac{1}{2}}\,d\omega,$$

wenn ω rechtläufig von $-\infty$ aus um 0 herum nach $-\infty$ zurückgeführt, und $\omega^{-\frac{1}{2}}$ im Augenblicke, wo ω einen positiven Werth passirt, positiv verstanden wird. Die erste Darstellung giebt bekanntlich

$$w = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\omega^2}\mathfrak{f}(2\omega\sqrt{t}+x)\,d\omega;$$

und, da diese Integralform der Differentialgleichung genügt, wenn nur $f(x)$ für reelle endliche Werthe von x nicht unstetig wird, so fällt die vorige Beschränkung weg. Die zweite Darstellung zerfällt in folgende zwei Integralformen, denen rechts diejenigen aus der ersten Darstellung, die mit ihnen äquivalent sind, zur Seite stehen:

$$(A)\qquad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2}F\left(t-\frac{x^2}{4z^2}\right)dz = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\omega^2}f(2\omega\sqrt{t}+x)\,d\omega,$$

$$(B)\qquad -\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2}G\left(t-\frac{x^2}{4z^2}\right)\frac{x\,dz}{z^2} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\omega^2}g(2\omega\sqrt{t}+x)\,d\omega.$$

Die Integrationsvariable z kann nicht gerade (durch lauter reelle Werthe) von $-\infty$ nach ∞ gehen, sondern muss dem Werthe 0, es ist gleichgültig auf welcher Seite, ausweichen. Die willkürlichen Functionen der einen Darstellung werden auf folgende Weise durch diejenigen der andern ausgedrückt:

$$(1.)\qquad F(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{0}^{\infty} e^{-\omega^2}f(2\omega\sqrt{t})\,d\omega,$$

$$(2.)\qquad f(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2}F\left(-\frac{x^2}{4z^2}\right)dz,$$

$$(3.)\quad G(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty} e^{-\omega^2} g'(2\omega\sqrt{t})\,d\omega,$$

$$(4.)\quad g(x) = -\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2} G\left(-\frac{x^2}{4z^2}\right)\frac{x\,dz}{z^2};$$

wo der z-Weg 0 umgehen muss.

Kann man mit obigen Integralformen vielleicht der Differentialgleichung auch noch genügen, wenn man ihnen eine variable Grenze giebt?

Es sei $\Phi = e^{-\omega^2}\mathfrak{f}(2\omega\sqrt{t}+x)$, $\Omega = \int_{-\infty}^{\omega}\Phi\,d\omega$. Behandelt man zunächst ω als unabhängig von t, x, so hat man

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t} = \frac{\omega}{\sqrt{t}}\frac{\partial\Phi}{\partial x},\quad \frac{\partial\Phi}{\partial\omega} = -2\omega\Phi+2\sqrt{t}\frac{\partial\Phi}{\partial x},\quad \frac{\partial\Phi}{\partial t}-\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} = -\frac{1}{2\sqrt{t}}\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\,\partial\omega},$$

durch Integration

$$\frac{\partial\Omega}{\partial t}-\frac{\partial^2\Omega}{\partial x^2} = -\frac{1}{2\sqrt{t}}\frac{\partial\Phi}{\partial x};$$

denn beide Seiten dieser Gleichung verschwinden bei $\omega=\infty$. Denkt man sich nun die obere Grenze ω des mit Ω bezeichneten Iutegrals als Function von t, x und unterscheidet die betreffenden Ableitungen durch Klammern von denen, wo ω als unabhängig gilt, so hat man

$$\left(\frac{\partial\Omega}{\partial t}\right)-\left(\frac{\partial^2\Omega}{\partial x^2}\right) = \Phi\left(\frac{\partial\omega}{\partial t}-\frac{\partial^2\omega}{\partial x^2}\right)-\frac{\partial\Phi}{\partial\omega}\left(\frac{\partial\omega}{\partial x}\right)^2-2\frac{\partial\Phi}{\partial x}\frac{\partial\omega}{\partial x}+\frac{\partial\Omega}{\partial t}-\frac{\partial^2\Omega}{\partial x^2}$$

$$= \Phi\left(\frac{\partial\omega}{\partial t}-\frac{\partial^2\omega}{\partial x^2}+2\omega\left(\frac{\partial\omega}{\partial x}\right)^2\right)-\frac{\partial\Phi}{\partial x}\cdot 2\sqrt{t}\left(\frac{\partial\omega}{\partial x}+\frac{1}{2\sqrt{t}}\right)^2.$$

Die Multiplicatoren von Φ und $\frac{\partial\Phi}{\partial x}$ sollen verschwinden. Der zweite giebt also $\omega = \frac{\psi(t)-x}{2\sqrt{t}}$, dann der erste $\psi(t)=c$; folglich kann man $\omega = \frac{c-x}{2\sqrt{t}}$ als obere Grenze gebrauchen. Schreibt man einfach $\mathfrak{f}(x)$ statt $\mathfrak{f}(x+c)$, nachdem man x in $x+c$ umgewandelt hat, so genügen die zwei Integralformen

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{-\frac{x}{2\sqrt{t}}} e^{-\omega^2}\mathfrak{f}(x+2\omega\sqrt{t})\,d\omega = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{\frac{x}{2\sqrt{t}}}^{\infty} e^{-\omega^2}\mathfrak{f}(x-2\omega\sqrt{t})\,d\omega$$

und $\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\frac{x}{2\sqrt{t}}}^{\infty} e^{-\omega^2}\mathfrak{f}(x+2\omega\sqrt{t})\,d\omega$ der Differentialgleichung.

Setzt man ferner in Bezug auf die zweite Darstellung

$$\Phi = e^{-z^2}F\left(t-\frac{x^2}{4z^2}\right),\qquad Z = \int_{-\infty}^{z}\Phi\,dz,$$

so hat man zunächst

$$\frac{\partial Z}{\partial t} - \frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} = -\frac{1}{2z}\frac{\partial \Phi}{\partial t}$$

vermöge der untern Grenze, und dann

$$\left(\frac{\partial Z}{\partial t}\right) - \left(\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2}\right) = \Phi\left(\frac{\partial z}{\partial t} - \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2z\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2\right) - \frac{\partial \Phi}{\partial t}\cdot\frac{1}{2z}\left(\frac{x}{z}\frac{\partial z}{\partial x} - 1\right)^2,$$

woraus $z = \frac{x}{2\sqrt{t-\alpha}}$ als obere Grenze folgt, wenn α die Integrationsconstante bedeutet. Für die Integralform (B) ist keine neue Rechnung nöthig. Man braucht nur in derselben sich F' statt G geschrieben zu denken und den vorliegenden Ausdruck explicite nach x zu differentiiren, d. h. ohne z als Function von x zu betrachten. Da x ausser im Ausdruck für Φ nur noch im *Quadrat* $\left(\frac{x}{z}\frac{\partial z}{\partial x} - 1\right)^2$ vorkommt, so ersieht man sogleich, dass die Bedingungen sich nicht ändern. Ohne der Allgemeinheit zu schaden, kann man $t-\alpha$ durch t ersetzen und sagen, in der zweiten Darstellung durch (A) und (B) seien die zwei Grenzen $z = \frac{x}{2\sqrt{t}}$ und $z = -\frac{x}{2\sqrt{t}}$ möglich.

Es liegt uns noch ob, diese Integralformen mit variabeln Grenzen gegen einander zu vergleichen. Wenn wir G in

$$S = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{\frac{x}{2\sqrt{t}}}^{\infty} e^{-z^2} G\left(t - \frac{x^2}{4z^2}\right)\frac{x\,dz}{z^2}$$

durch die Formel (3.) ersetzen wollen, so müssen wir trachten, unter dem Functionszeichen g' eine einzige Integrationsvariable zu haben, und setzen daher $\omega = \frac{z\psi}{r}$, wo $r^2 = z^2 - \frac{x^2}{4t}$. Dann ist

$$G\left(t - \frac{x^2}{4z^2}\right) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{z}{r}\int_0^{\infty} e^{-\frac{z^2\psi^2}{r^2}} g'(2\psi\sqrt{t})\,d\psi.$$

Aendert man die Folge der Integrationen, so hat man

$$S = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} \Psi g'(2\psi\sqrt{t})\,d\psi, \quad \text{wo} \quad \Psi = \int_{\frac{x}{2\sqrt{t}}}^{\infty} e^{-z^2\left(1+\frac{\psi^2}{r^2}\right)}\frac{x\,dz}{rz}$$

bei $\psi = \infty$ verschwindet. Da $g(2\psi\sqrt{t})$ als ungerade Function bei $\psi = 0$ verschwindet, so bekommt man durch partielle Integration

$$S = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} -\frac{\Psi'}{2\sqrt{t}} g(2\psi\sqrt{t})\,d\psi, \quad \text{wo} \quad -\frac{\Psi'}{2\sqrt{t}} = \int_{\frac{x}{2\sqrt{t}}}^{\infty} e^{-z^2\left(1+\frac{\psi^2}{r^2}\right)}\frac{x\psi}{\sqrt{t}}\cdot\frac{z\,dz}{r^3}.$$

Aber $z^2\left(1+\frac{\psi^2}{r^2}\right)=r^2+\frac{x^2\psi^2}{4tr^2}+\psi^2+\frac{x^2}{4t}$, $\frac{z\,dz}{r^2}=\frac{dr}{r^2}$. Setzt man der Kürze wegen $\frac{x\psi}{2\sqrt{t}}=b$, $r+\frac{b}{r}=p$, $r-\frac{b}{r}=q$, so ist

$$z^2\left(1+\frac{\psi^2}{r^2}\right)=p^2+\left(\psi-\frac{x}{2\sqrt{t}}\right)^2=q^2+\left(\psi+\frac{x}{2\sqrt{t}}\right)^2,\quad \frac{x\psi}{\sqrt{t}}\frac{z\,dz}{r^2}=dq-dp.$$

Da p von ∞ auf sein Minimum $\sqrt{b}$ herab und wieder zurück-geht, q dagegen stetig von $-\infty$ bis ∞ läuft, so ist

$$-\frac{\psi'}{2\sqrt{t}}=e^{-\left(\psi+\frac{x}{2\sqrt{t}}\right)^2}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-q^2}dq,\quad S=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty}e^{-\left(\psi+\frac{x}{2\sqrt{t}}\right)^2}g(2\psi\sqrt{t})\,d\psi,$$

wo man sich $\psi=\omega-\frac{x}{2\sqrt{t}}$ gesetzt denke. War im ersten Ausdruck für S die untere Grenze, also x, positiv, so konnte z lauter positive Werthe durchlaufen. Setzt man unter dieser Annahme $\frac{x}{z}=\beta$ und kehrt den Integrationsweg um, so hat man

$$S=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{2\sqrt{t}}e^{-\frac{x^2}{\beta^2}}G(t-\tfrac{1}{4}\beta^2)\,d\beta,$$

einen Ausdruck, den man bequem nach x differentiiren kann. Ist dieses geschehen, so stelle man $\frac{x}{\beta}=z$ wieder her und schreibe mit Beachtung der Uebereinstimmung der Formeln (1.) und (3.) F, f resp. statt G, g'. Dann hat man folgende zwei Gleichheiten zwischen den Integralformen mit variabler Grenze:

$$(C)\qquad \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{\frac{x}{2\sqrt{t}}}^{\infty}e^{-z^2}F\left(t-\frac{x^2}{4z^2}\right)dz=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{\frac{x}{2\sqrt{t}}}^{\infty}e^{-\omega^2}f(2\omega\sqrt{t}-x)\,d\omega,$$

$$(D)\qquad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{\frac{x}{2\sqrt{t}}}^{\infty}e^{-z^2}G\left(t-\frac{x^2}{4z^2}\right)\frac{x\,dz}{z^2}=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{\frac{x}{2\sqrt{t}}}^{\infty}e^{-\omega^2}g(2\omega\sqrt{t}-x)\,d\omega.$$

Man denke sich hier x positiv, damit der z-Weg in die Realitätslinie fallen könne. Stellt man jeden dieser vier Ausdrücke als das Doppelte seiner Hälfte dar, wandelt in der andern Hälfte z, ω resp. in $-z$, $-\omega$ um und berechnet $(A)-\frac{1}{2}(C)-\frac{1}{2}(C)$, $(B)+\frac{1}{2}(D)+\frac{1}{2}(D)$, so kommt:

$$(5.)\quad \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{\pi}}\displaystyle\int_{-\frac{x}{2\sqrt{t}}}^{\frac{x}{2\sqrt{t}}}e^{-z^2}F\left(t-\frac{x^2}{4z^2}\right)dz \\ =\dfrac{1}{\sqrt{\pi}}\left\{\displaystyle\int_{-\frac{x}{2\sqrt{t}}}^{\infty}e^{-\omega^2}f(2\omega\sqrt{t}+x)\,dx-\int_{\frac{x}{2\sqrt{t}}}^{\infty}e^{-\omega^2}f(2\omega\sqrt{t}-x)\,d\omega\right\}, \end{cases}$$

$$
(6.)\quad \left\{
\begin{aligned}
& -\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\frac{x}{2\sqrt{t}}}^{\frac{x}{2\sqrt{t}}} e^{-z^2} G\left(t - \frac{x^2}{4z^2}\right) \frac{x\,dz}{z^2} \\
& = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left\{ \int_{-\frac{x}{2\sqrt{t}}}^{\infty} e^{-\omega^2} g(2\omega\sqrt{t} + x)\, d\omega + \int_{\frac{x}{2\sqrt{t}}}^{\infty} e^{-\omega^2} g(2\omega\sqrt{t} - x)\, d\omega \right\}.
\end{aligned}
\right.
$$

Aus diesen Gleichheiten, wo der z-Weg 0 umgeht, ersieht man die Veränderung, die die linken Seiten von (C) und (D) erfahren, wenn die Abscisse aus dem positiven Werth x in den negativen $-x$ übergeht.

Die linke Seite der letzten Gleichheit heisse S. Um sie in eine Summenreihe zu verwandeln, wollen wir z. B. annehmen, der z-Weg gehe nördlich um 0 (1 liege östlich, i nördlich von 0), und $z = \frac{x}{2\sqrt{t}} \frac{1}{\sqrt{y}}$ setzen; dann geht y mit der Phase -2π von 1 aus rechtläufig um 0 herum und nach 1 zurück, wo es mit nuller Phase anlangt. Man bekommt:

$$
S = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int e^{-\frac{x^2}{4ty}} G(t(1-y)) \frac{\sqrt{t}}{\sqrt{y}} dy.
$$

Entwickelt man beide, Exponentialfunction und G-Function, so wird S zur Doppelsumme, deren allgemeiner Term (für $m, n = 0, 1, 2, \ldots$)

$$
\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \frac{(-1)^n}{m!\,n!} \frac{1}{2^{2n}} B_m t^{m-n+\frac{1}{2}} x^{2n} \int (1-y)^m y^{-n-\frac{1}{2}} dy
$$

ist. Da $1 - e^{i(-n-\frac{1}{2})(-2\pi)} = 2$, so hat das auf y bezügliche Integral den Werth

$$
2 \cdot \frac{\Gamma(m+1)\Gamma(-n+\frac{1}{2})}{\Gamma(m-n+\frac{3}{2})} = (-1)^n \frac{2\pi . m!}{\Gamma(n+\frac{1}{2})\Gamma(m-n+\frac{3}{2})}.
$$

Beachtet man noch, dass $2^{2n}.n!\,\Gamma(n+\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}.(2n)!$, so bekommt man:

$$
(8.)\quad -\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\frac{x}{2\sqrt{t}}}^{\frac{x}{2\sqrt{t}}} e^{-z^2} G\left(t - \frac{x^2}{4z^2}\right) \frac{x\,dz}{z^2} = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} B_m \frac{t^{m-n+\frac{1}{2}}}{\Gamma(m-n+\frac{3}{2})} \frac{x^{2n}}{(2n)!},
$$

und durch Differentiation nach x u. s. w.

$$
(7.)\quad \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\frac{x}{2\sqrt{t}}}^{\frac{x}{2\sqrt{t}}} e^{-z^2} F\left(t - \frac{x^2}{4z^2}\right) dz = \Sigma\Sigma A_m \frac{t^{m-n-\frac{1}{2}}}{\Gamma(m-n+\frac{1}{2})} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.
$$

Dieses sind die irrationalen Entwicklungen, von denen im Eingang die Rede war. Es folgt daraus, dass die Integralformen (C), (D) als Summen der

rationalen und ganzen Entwicklungen für (A), (B) und der irrationalen in (7.), (8.) sich darstellen. Den Umstand weiss ich mir nicht zu erklären, dass für ein positives x, wenn t auf 0 herabsinkt, die Convergenz der Reihe (8.) z. B. aufhört, während die rechte Seite in (6.) deutlich zu $g(x)=\Sigma B_n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ wird.

Um die Reihe (8.) auch noch dem Functionszeichen g anzupassen, unterscheide ich $n=m-\lambda$ für $\lambda=0, 1, 2, \ldots m$ und $n=m+\mu+1$ für $\mu=0, 1, \ldots \infty$ und bekomme

$$S = \sum_{\lambda=0}^{\infty} g^{(2\lambda+1)}(x)\frac{t^{\lambda+\frac{1}{2}}}{\Gamma(\lambda+\frac{3}{2})}+\sum_{\mu=0}^{\infty} g^{(-(2\mu+1))}(x)\frac{t^{-\mu-\frac{1}{2}}}{\Gamma(-\mu+\frac{1}{2})},$$

wo

$$g^{(-2\mu-1)}(x) = \int_0^x \frac{(x-s)^{2\mu}}{(2\mu)!}g(s)\,ds$$

das $(2\mu+1)^{\text{te}}$ Integral der ungeraden Function $g(x)$ bedeutet, wenn jede Integration von $x=0$ an geschieht. Da

$$\frac{(2\lambda+1)!}{\Gamma(\lambda+\frac{3}{2})}=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cdot 2^{2\lambda+1}\lambda!=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty e^{-\omega^2}(2\omega)^{2\lambda+1}d\omega,$$

so wird der erste Theil des Ausdrucks S zu

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty e^{-\omega^2}[g(x+2\omega\sqrt{t})-g(x-2\omega\sqrt{t})]\,d\omega.$$

Was den zweiten Theil betrifft, so ist $(2\mu)!\,\Gamma(-\mu+\frac{1}{2})=(-1)^\mu 2^{2\mu}\mu!\,\Gamma(\frac{1}{2})$. Dieser Theil wird also zu

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^x\sum_{\mu=0}^{\infty}\frac{1}{\mu!}\Big(-\frac{(x-s)^2}{4t}\Big)^\mu g(s)\frac{ds}{\sqrt{t}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-\frac{(x-s)^2}{4t}}g(s)\,ds$$

$$=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\frac{x}{2\sqrt{t}}} e^{-\omega^2}g(x-2\omega\sqrt{t})\,d\omega=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\Big\{\int_{-\frac{x}{2\sqrt{t}}}^{0} e^{-\omega^2}g(x+2\omega\sqrt{t})\,d\omega+\int_0^{\frac{x}{2\sqrt{t}}} e^{-\omega^2}g(x-2\omega\sqrt{t})d\omega\Big\}.$$

Folglich

$$S = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\Big\{\int_{-\frac{x}{2\sqrt{t}}}^{\infty} e^{-\omega^2}g(x+2\omega\sqrt{t})\,d\omega-\int_{\frac{x}{2\sqrt{t}}}^{\infty} e^{-\omega^2}g(x-2\omega\sqrt{t})\,d\omega\Big\},$$

was mit dem Ausdruck rechts in (6.) übereinstimmt, da $-g(x-2\omega\sqrt{t})=g(2\omega\sqrt{t}-x)$ ist. Dieser Beweis der Gleichheit (6.) könnte den durch Substitution einer Integralform in einer andern geführten Beweis der Gleichheiten (C), (D) ersetzen, wenn nicht die Entwickelbarkeit in Reihen auf einen so grossen

Bereich hinaus, wie soeben angenommen ward, eine stärkere Anforderung an die willkürlichen Functionen wäre, als ihre Differentiabilität längs eines Integrationsweges (im Endlichen wenigstens).

Ich will nun die in Herrn *Hattendorffs* Buche gelösten Aufgaben auf die hier aufgezählten Formen des allgemeinen Integrals der partiellen Differentialgleichung zurückführen.

I. Der Körper ist nur durch $x>0$ begrenzt; $w(t,0)=0$, und $w(0,x)=\mathfrak{f}(x)$ sind gegeben.

Aus $\frac{\partial^m w}{\partial t^m}(t,0)$ folgt vermöge der Differentialgleichung $\frac{\partial^{2m} w}{\partial x^{2m}}(t,0)=0$, und wenn beim Zeitanfang die Function w noch differentiabel ist, $\frac{\partial^{2m}\mathfrak{f}}{\partial x^{2m}}(0)=0$, d. h. $\mathfrak{f}(x)$ ist eine ungerade Function von x und möge daher wie früher mit $g(x)$ bezeichnet werden. Man bekommt die Integralform (B), die, in die Gestalt

$$w=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty}\left(e^{-\frac{(\alpha-x)^2}{4t}}-e^{-\frac{(\alpha+x)^2}{4t}}\right)g(\alpha)\frac{d\alpha}{2\sqrt{t}}$$

gebracht, der Differentialgleichung immer noch genügt, wenn auch die Function zwar irregulär wird, aber nur so, dass das Integral noch convergirt. Ich werde mir daher fortan erlauben, aus dieser Oberflächenbedingung sogleich auf $\mathfrak{f}(-x)=-\mathfrak{f}(x)$ zu schliessen, ohne etwas näheres über $\mathfrak{f}(x)$ auszusagen.

II. Der Körper ist durch $0<x<1$ begrenzt; $w(t,0)=0$, $w(t,1)=0$ und $w(0,x)=\mathfrak{f}(x)$ sind gegeben.

Zunächst folgt $\mathfrak{f}(-x)=-\mathfrak{f}(x)$, $\mathfrak{f}(1+x)=-\mathfrak{f}(1-x)$ und dann durch wiederholte abwechselnde Anwendung beider Bedingungen

$$\mathfrak{f}(2n+x)=\mathfrak{f}(x),\qquad \mathfrak{f}(2n-x)=-\mathfrak{f}(x),$$

wenn n irgend eine ganze Zahl bedeutet. Die allgemeine Integralform erster Darstellung geht also in diesem Falle in eine Summe von Integralen über, deren jedes über ein Invervall von der Länge 1 sich erstreckt. Im Intervalle $2n<2\omega\sqrt{t}+x<2n+1$ setze man $2\sqrt{t}.\omega=2n-x+\alpha$, im Intervalle $-(2n+1)<2\omega\sqrt{t}+x<-2n$ dagegen $2\sqrt{t}.\omega=-(2n+x+\alpha)$. Dann bekommt man

$$w=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^1\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty}e^{-\frac{(2n-x+\alpha)^2}{4t}}-\sum_{n=-\infty}^{\infty}e^{-\frac{(2n+x+\alpha)^2}{4t}}\right)\mathfrak{f}(\alpha)\frac{d\alpha}{2\sqrt{t}},$$

ein Ausdruck, der für frühe Zeiten stark convergirt. Für ein sehr kleines t kommt, wenn $0 < x < 1$, nur der zu $n = 0$ gehörende Term der ersten Summe in Betracht und liefert in der That $w(0, x) = \mathfrak{f}(x)$. Es ist auch sofort klar, dass der Ausdruck den zwei Oberflächenbedingungen und der Differentialgleichung genügt. Vermöge des Uebergangs von einem Modul elliptischer Functionen auf den complementären ist

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(2n+x)^2}{4t}} = \sqrt{\pi}.\sqrt{t}\left\{1+2\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2\pi^2 t}\cos(n\pi x)\right\}.$$

Der Ausdruck nimmt daher auch die Gestalt

$$w = 2\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2\pi^2 t}\sin(n\pi x).\int_0^1 \sin(n\pi\alpha)\,\mathfrak{f}(\alpha)\,d\alpha$$

an, die für späte Zeiten stärker convergirt als die vorige.

III. Der Körper ist durch $x > 0$ begrenzt; $w(0, x) = 0$ und $w(t, 0) = F(t)$ sind gegeben.

Bei $t = 0$ muss die Function w nothwendig unstetig werden. Denn wäre $w(0, x)$ nicht nur für positive, sondern auch für negative Abscissen Null, so wäre vermöge der Integralform erster Darstellung überhaupt $w = 0$, daher auch $F(t) = 0$ gegen die Voraussetzung. Die Integralformen (C) und (D) sind bei $t = 0$ unstetig, wie die Reihen in (7.) und (8.) zeigen, und vertragen nur positive Zeit. Sie verschwinden für ein positives x, wenn $\frac{t}{x^2}$ auf Null herabsinkt, weil dann ihre zwei Grenzen zusammenfallen; aber thun dieses nicht für ein negatives x. Wenn $t > 0$, und wenn $\frac{x}{\sqrt{t}}$ auf Null herabsinkt, so verwandeln sich (C) und (D) resp. in

$$F(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}.\int_0^{\infty} e^{-\omega^2} f(2\omega\sqrt{t})\,d\omega = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \frac{t^n}{n!},$$

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{2\sqrt{t}} G(t-\tfrac{1}{4}\beta^2)\,d\beta = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty} e^{-\omega^2} g(2\omega\sqrt{t})\,d\omega = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{t^{n+\frac{1}{2}}}{\Gamma(n+\frac{3}{2})}.$$

Jede der Formen (C) und (D), also auch ihre Summe erfüllt die Aufgabe, wenn man im Stande ist, den Ausdruck

$$\Sigma A_n \frac{t^n}{n!} + \Sigma B_n \frac{t^{n+\frac{1}{2}}}{\Gamma(n+\frac{3}{2})}$$

der an der Oberfläche gegebenen Temperatur anzupassen. Wenn indess von $t = 0$ aus irrationale Entwicklungen der Oberflächentemperatur zugelassen werden, so ist die vorliegende Summe nur zweier Reihen viel zu beschränkt.

Soll die Oberflächentemperatur bei $t=0$ differentiabel sein, so passt nur die Integralform (C); und wenn sie nur convergent bleibt, während $F(t)$ irregulär wird, so erfüllt sie immerhin die Aufgabe. Man kann also

$$w=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{\frac{x}{2\sqrt{t}}}^{\infty}e^{-z^2}F\left(t-\frac{x^2}{4z^2}\right)dz$$

als Lösung derselben hinsetzen. Wenn man z. B. darin

$$F\left(t-\frac{x^2}{4z^2}\right)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{2\sqrt{t-\frac{x^2}{4z^2}}}e^{-z^2}G\left(t-\frac{x^2}{4z^2}-\tfrac{1}{4}\beta^2\right)d\beta$$

substituirt, so kommt in der That die Integralform (D) heraus. Aber der Einfachheit wegen werde ich im Folgenden die Form (C) unter der anfänglichen Voraussetzung gebrauchen.

IV. Der Körper ist durch $0<x<1$ begrenzt; $w(0,x)=w(t,1)=0$ und $w(t,0)=F(t)$ sind gegeben.

Es sei $F(t)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty}e^{-\omega^2}f(2\omega\sqrt{t})d\omega$. Ich versuche in der allgemeinen Lösung $w=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\omega^2}\mathfrak{f}(2\omega\sqrt{t}+x)d\omega$ die Function $\mathfrak{f}(x)$, die im Intervalle $0<x<1$ verschwinden muss, ausserhalb des Körpers so zu construiren, dass die Aufgabe erfüllt wird. Im Folgenden sei $y>0$, $0<p<2$. Wenn $\mathfrak{f}(y)=0$, $\mathfrak{f}(-y)=2f(y)$ angenommen wird, so ist die letzte Bedingung erfüllt und hört nicht auf, erfüllt zu sein, wenn man der vorläufig so angenommenen Function $\mathfrak{f}(x)$ noch eine ungerade Function zulegt. Wird sie nach dieser Zulage wieder mit $\mathfrak{f}(x)$ bezeichnet, so ist $\mathfrak{f}(-y)=2f(y)-\mathfrak{f}(y)$. Die Bedingung $w(t,1)=0$ verlangt aber (nach I), dass $\mathfrak{f}(1+y)=-\mathfrak{f}(1-y)$ sei, woraus wegen $w(0,x)=0$ zunächst $\mathfrak{f}(p)=0$ und dann überhaupt $\mathfrak{f}(2+y)=-\mathfrak{f}(-y)$ folgt. Geht man nun von $\mathfrak{f}(p)=0$ aus und wendet die zwei Bedingungen

$$\mathfrak{f}(-y)=2f(y)-\mathfrak{f}(y),\qquad \mathfrak{f}(2+y)=-\mathfrak{f}(-y)$$

abwechselnd an, so bekommt man schrittweise:

$$\mathfrak{f}(-p)=2f(p),\quad \mathfrak{f}(2+p)=-2f(p),\quad \mathfrak{f}(-2-p)=2f(2+p)+2f(p),$$
$$\mathfrak{f}(4+p)=-2f(2+p)-2f(p),\quad \mathfrak{f}(-4-p)=2f(4+p)+2f(2+p)+2f(p),$$
$$\mathfrak{f}(6+p)=-2f(4+p)-2f(2+p)-2f(p),$$

und so fort; im Intervalle $-2(n+1)<x<-2n$ ist also (wenn n eine positive ganze Zahl bedeutet)

$$\mathfrak{f}(x)=2f(-x)+2f(-2-x)+\cdots+2f(-2n-x),$$

im Intervalle $2n < x < 2(n+1)$ hingegen

$$\mathfrak{f}(x) = -2f(x-2)-2f(x-4)-\cdots-2f(x-2n).$$

Schneidet man den Integralausdruck für w bei $\omega = -\frac{x}{2\sqrt{t}}$ entzwei und wandelt in der untern Hälfte ω in $-\omega$ um, so kommt

$$w = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-2}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{2n-x}{2\sqrt{t}}}^{\infty} e^{-\omega^2} f(2\omega\sqrt{t}+x-2n)\, d\omega + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{2n+x}{2\sqrt{t}}}^{\infty} e^{-\omega^2} f(2\omega\sqrt{t}-2n-x)\, d\omega.$$

Beachtet man nun die Gleichheit (C),

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{x}{2\sqrt{t}}}^{\infty} e^{-\omega^2} f(2\omega\sqrt{t}-x)\, d\omega$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{x}{2\sqrt{t}}}^{\infty} e^{-z^2} F\Big(t-\frac{x^2}{4z^2}\Big) dz = -\frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\partial}{\partial x} \int_0^{2\sqrt{t}} e^{-\frac{x^2}{\beta^2}} F(t-\tfrac{1}{4}\beta^2)\, d\beta;$$

ferner dass $\frac{\partial}{\partial(2n-x)} = -\frac{\partial}{\partial(2n+x)} = -\frac{\partial}{\partial x}$, so sieht man, dass alle Exponentialfunctionen sich zu einer elliptischen Thetareihe vereinigen, und bekommt

$$w = -\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{2\sqrt{t}} \frac{\partial}{\partial x} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\left(\frac{2n+x}{\beta}\right)^2} F(t-\tfrac{1}{4}\beta^2)\, d\beta$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{2\sqrt{t}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (2n+x)\, e^{-\left(\frac{2n+x}{\beta}\right)^2} F(t-\tfrac{1}{4}\beta^2) \frac{d\beta}{\beta^2}.$$

Für ein kleines positives $\frac{x}{2\sqrt{t}}$ kommt von diesem Summenausdruck nur der Term $(n=0)$, der für $\frac{x}{\sqrt{t}} = 0$ in $F(t)$ übergeht, in Betracht, während die übrigen Terme (für $x=0$) einander paarweise zerstören; also ist $w(t,0) = F(t)$ erfüllt. Dass auch die übrigen Bedingungen der Aufgabe erfüllt sind, ist sogleich klar. Man kann daher die anfängliche Beschränkung der Function $F(t)$ fahren lassen, wenn nur der Integralausdruck convergirt. Ausserhalb des Intervalles $0 < x < 2$ gilt diese Darstellung nicht mehr, sondern nur die vorige; denn die Verwandlung mittelst (C) setzte die untere Grenze aller in der vorigen Darstellung auftretenden bestimmten Integrale als positiv voraus. Die letzte Darstellung selbst offenbart diesen Mangel. Wenn nämlich β nahe bei 0 ist, und man will das kleine positive x durch einen halben Umlauf um 0 ins Negative führen, so wird nach mehr als einem achten Theile des Umlaufes $xe^{-x^2:\beta^2}$ so ungeheuer gross, dass das Integral seinen Sinn verliert.

Da der letzte Ausdruck für $t>0$, $0<x<2$ bei $\beta=0$ sehr stark convergirt, so kann man die untere Grenze durch ein sehr kleines positives $\beta=2\sqrt{\varepsilon}$ ersetzen und dann die Thetareihe auf den complementären Modul verwandeln. Setzt man noch $\frac{1}{4}\beta^2=u$, so kommt

$$w=\int_{\varepsilon}^{t}\Big(\sum_{n=1}^{\infty}2n\pi\sin(n\pi x)e^{-n^2\pi^2 u}\Big)F(t-u)\,du.$$

Um dem Summenausdruck grössere Convergenz zu geben, integrire man wiederholt partiell und definire die ganze Function $\chi(m,x)$ m^{ten} Grades durch

$$\frac{ye^{xy}}{e^y-1}=\sum_{m=0}^{\infty}\chi(m,x).y^m \qquad (\text{wenn } y \text{ abs.} <2\pi),$$

so dass man

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\pi x}{n^{2\lambda+1}}=-\frac{(-1)^\lambda}{2}(2\pi)^{2\lambda+1}\chi\Big(2\lambda+1,\frac{x}{2}\Big) \quad \text{für} \quad 0\,\overline{\overline{<}}\,x\,\overline{\overline{<}}\,2,$$

$$\chi\Big(2\lambda+1,\frac{x}{2}\Big)+\chi\Big(2\lambda+1,-\frac{x}{2}\Big)=-\frac{1}{(2\lambda)!}\Big(\frac{x}{2}\Big)^{2\lambda}$$

hat. (Bis auf einen constanten Factor und eine additive Constante ist χ die von *Raabe* sogenannte *Jacob-Bernouilli*sche Function.) Dann ist

$$w=L(t,x)+M(t,x)+N(t,x), \qquad \text{wo}$$

$$L(t,x)=-\sum_{\lambda=0}^{m}2^{2\lambda+1}\chi\Big(2\lambda+1,\frac{x}{2}\Big)F^{(\lambda)}(t),$$

$$M(t,x)=-\sum_{\lambda=0}^{m}(-1)^\lambda\frac{2}{\pi^{2\lambda+1}}F^{(\lambda)}(0)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\pi x}{n^{2\lambda+1}}e^{-n^2\pi^2 t},$$

$$N(t,x)=-(-1)^m\frac{2}{\pi^{2m+1}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\pi x}{n^{2m+1}}\int_0^t e^{-n^2\pi^2 u}F^{(m+1)}(t-u)\,du.$$

Für eine positive Zeit sind nun die Theile L, M von der Beschränkung auf das Intervall $0<x<2$ frei geworden. Sie geben

$$L(t,x)+L(t,-x)=2\sum_{\lambda=0}^{m}F^{(\lambda)}(t)\frac{x^{2\lambda}}{(2\lambda)!},$$

$$M(t,x)+M(t,-x)=0.$$

Da nach der ursprünglichen Construction der Function $\mathfrak{f}(x)$ jetzt

$$w(t,x)+w(t,-x)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-x}^{x}e^{-\omega^2}\mathfrak{f}(2\omega\sqrt{t}+x)\,d\omega+\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-x}^{x}e^{-\omega^2}\mathfrak{f}(2\omega\sqrt{t}-x)\,d\omega$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\omega^2}[\mathfrak{f}(2\omega\sqrt{t}+x)+\mathfrak{f}(-2\omega\sqrt{t}-x)]\,d\omega=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\omega^2}f(2\omega\sqrt{t}+x)\,d\omega$$

$$=2\sum_{\lambda=0}^{\infty}F^{(\lambda)}(t)\frac{x^{2\lambda}}{(2\lambda)!}$$

sein muss, so sollte auch

$$N(t, x) + N(t, -x) = 2 \sum_{\lambda=m+1}^{\infty} F^{(\lambda)}(t) \frac{x^{2\lambda}}{(2\lambda)!}$$

sein; aber man kann es hier nicht beweisen, weil die Convergenz des Integrals bei $u = 0$ sogleich aufhört, sobald x die positive Linie verlässt, um in die negative zu gelangen.

V. Der Körper ist durch $0 < x < 1$ begrenzt; die Temperatur sei mit $u(t, x)$ bezeichnet, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t}$, $\left(\frac{\partial u}{\partial x} - cu\right)(t, 0) = 0$, wo $c > -1$; ferner sind $u(t, 1) = 0$ und $u(0, x) = h(x)$, unabhängig von c, gegeben. (Eine Uebersetzung der Aufgabe pag. 153 bei Herrn *Hattendorff.*)

Der unmittelbare Versuch, die gegebene Function $h(x)$ ausserhalb des Körpers fortzusetzen, führt auf endliche Summen wiederholter Integrale, die zwar in Abgeleitete eines ersten Integrales (nach c) verwandelt werden können; aber ihre (dreifachen) Summen werden zu lästig, wenn man sie nicht in Integrale übersetzt. Es zeigt sich dann, dass die Einführung einer jenem ersten Integrale entsprechenden neuen Function

$$w = e^{-cx} \int_0^x e^{cz} u(t, z)\, dz$$

die Rechnung erleichtert. Zugleich sei

$$g(c, x) = e^{-cx} \int_0^x e^{cz} h(z)\, dz$$

das erwähnte erste Integral. Es folgt nun $w(t, 0) = 0$, also $\frac{\partial^n w}{\partial t^n}(t, 0) = 0$; ferner ist $u = \frac{\partial w}{\partial x} + cw$. Die Differentialgleichung erster Ordnung (für $x = 0$) wird dadurch zu $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(t, 0) = 0$. Setzt man $V = \frac{\partial w}{\partial t} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$, so verwandelt sich die partielle Differentialgleichung in $\frac{\partial V}{\partial x} + cV = 0$, woraus $V = e^{-cx} \varphi(t)$ folgt. Aber nach dem Vorigen ist $V(t, 0) = 0$, also $\varphi(t) = 0$, daher $V(t, x) = 0$. Folglich muss w der Differentialgleichung

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$$

genügen. Aus dieser und aus $w(t, 0) = 0$ folgt

$$(a.) \qquad w(t, -x) = -w(t, x).$$

Aus $u(t, 1) = 0$ und $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ folgt, dass $u(t, 2-x) = -u(t, x)$, d. h. dass $\left(\frac{\partial}{\partial x} - c\right) w(t, 2-x) = \left(\frac{\partial}{\partial x} + c\right) w(t, x)$ sein muss. Ersetzt man hier x durch

$-x$ und wendet (*a.*) an, so kommt

$$(b.)\qquad \left(\frac{\partial}{\partial x}+c\right)w(t,2+x) = -\left(\frac{\partial}{\partial x}-c\right)w(t,x).$$

Die zwei Bedingungen (*a.*), (*b.*) müssen immer erfüllt sein, in welchem Intervalle auch x liegen mag. Im Intervalle $0<x<1$ ist $w(0,x)=g(c,x)$ gegeben. Wenn c den durch die Oberflächenbedingung gegebenen festen Werth behält, so werde $w(0,x)$ einfach mit $g(x)$ bezeichnet, welchen reellen Werth x auch haben möge. Die zwei Bedingungen (*a.*), (*b.*) geben dann:

$$(a'.)\qquad g(-x) = -g(x),$$

$$(b'.)\qquad \left(\frac{\partial}{\partial x}+c\right)g(2+x) = -\left(\frac{\partial}{\partial x}-c\right)g(x).$$

Kommt noch die Bedingung hinzu, dass die g-Functionswerthe in den Löthstellen, nämlich überall, wo die Abscisse einen ganzen Werth hat, nicht springen dürfen, so reichen alle diese Bedingungen hin, um die Fortsetzung der Function $g(x)$ durch alle Intervalle hindurch völlig zu bestimmen. Wenn die Rechnung diese Fortsetzung in beliebige Ferne hinaus so ergeben wird, dass die Integralform

$$w = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\omega^2} g(2\omega\sqrt{t}+x)\,d\omega$$

convergirt, so genügt sie vermöge (*a'.*) und (*b'.*) von selbst schon den Bedingungen (*a.*) und (*b.*), wie man leicht sieht, wenn man bei (*a.*) die Umwandlung von ω in $-\omega$ zu Hülfe nimmt. Das Rechnungsergebniss ist folgendes.

Die Hülfsvariable ν trete an die Stelle des Elements c, so dass

$$g(\nu,x) = e^{-\nu x}\int_0^x e^{\nu z}h(z)\,dz,$$

und es sei $\xi=\frac{c+\nu}{c-\nu}$,

$$G(\nu)=2\int_0^1 \sin(\nu z)h(1-z)\,dz = g(-\nu,1)-g(\nu,1),$$

$$N(\nu)=2(\nu\cos\nu+c\sin\nu)=(c+\nu)e^{\nu}+(c-\nu)e^{-\nu}=(c-\nu)e^{\nu}(\xi-e^{-2\nu}),$$

$$M(\nu,x)=e^{-x\nu}\frac{G(\nu)}{N(\nu)}-\frac{g(\nu,x)}{c-\nu}.$$

Dann ist, wenn der geschlossene Weg, den die Hülfsvariable beschreibt, $-c$ und c rechtläufig ein, aber alle Wurzeln der Gleichung $\frac{N(\nu)}{\nu}=0$ ausschliesst,

für $0<x<1$ und alle ganzen Zahlen n:

$$(9.)\quad g(2n+x) = \frac{1}{2i\pi}\int M(\nu,x)\xi^n d\nu,$$

$$(10.)\quad g(2n-x) = -\frac{1}{2i\pi}\int M(\nu,x)\xi^{-n} d\nu.$$

Vermöge der Bedingung (a'.) ist übrigens einer dieser Ausdrücke eine nothwendige Folge des andern. Der Integrationsweg kann auch aus zwei kleinen getrennten Kreisen um $-c$ und um c bestehen. Da $c>-1$ ist, so hat, wie bei Herrn *Hattendorf* bewiesen wird, die Gleichung $\frac{N(\nu)}{\nu}=0$ lauter laterale Wurzeln. Ich bemerke noch z. B. in Bezug auf ein positives n, bei dem nur der Pol c in Betracht kommt, dass $\frac{1}{2i\pi}\int e^{-(2n+x)\nu}\frac{G(\nu)}{N(\nu)}=0$ ist, dass man also

$$M(\nu,x)\xi^n \quad\text{durch}\quad e^{-(x+1)\nu}\frac{G(\nu)}{c-\nu}\cdot\frac{\xi^n-e^{-2n\nu}}{\xi-e^{-2\nu}}-\frac{g(\nu,x)}{c-\nu}\xi^n$$

ersetzen darf, und dass $g(2n+x)$ der Coefficient der nullten Potenz von $\nu-c$ in der Entwicklung von

$$-\sum_{\lambda=0}^{n-1} e^{-(2\lambda+x+1)\nu}G(\nu)\xi^{n-\lambda-1}+g(\nu,x)\xi^n$$

nach steigenden Potenzen von $\nu-c$ ist, also aus einer dreifachen Summe von Abgeleiteten (nach c), aus $G(c)$ und einer einfachen solcher aus $g(c,x)$ besteht. Es erhellt sogleich, dass der Ausdruck (9.) für $n=0$ richtig ist. Beachtet man ferner, dass

$$(c+\nu)M(-\nu,1)-(c-\nu)M(\nu,1)=[(c+\nu)e^\nu-(c-\nu)e^{-\nu}]\frac{G(\nu)}{N(\nu)}-g(-\nu,1)+g(\nu,1),$$

so sieht man, dass

$$M(-\nu,1)=\frac{1}{\xi}M(\nu,1);\quad\text{zugleich ist}\quad M(-\nu,0)=M(\nu,0).$$

Betrachten wir die Löthstelle $2n$, so folgt aus (10.):

$$g(2n)=-\frac{1}{2i\pi}\int M(-\nu,0)\xi^{-n}d\nu,$$

und wenn man ν durch $-\nu$ ersetzt, wodurch ξ in $\frac{1}{\xi}$ übergeht, während der Integrationsweg genau derselbe bleiben kann, da es frei steht, ihn zu einer Curve zu machen, die 0 zum Mittelpunkte hat, $g(2n)=\frac{1}{2i\pi}\int M(\nu,0)\xi^n d\nu$, derselbe Ausdruck, der aus (9.) folgt. Also springt hier $g(x)$ nicht. Dass auch $g'(x)$ es nicht thue, wird hieraus folgen, sobald bewiesen sein wird, dass die Bedingung (b'.) erfüllt ist.

An der Löthstelle $2n+1$ giebt der Ausdruck (10.):

$$g(2n+1) = -\frac{1}{2i\pi}\int M(\nu,1)\xi^{-n-1}d\nu = \frac{1}{2i\pi}\int M(-\nu,1)\xi^{n+1}d\nu = \frac{1}{2i\pi}\int M(\nu,1)\xi^{n}d\nu,$$

dasselbe, was aus (9.) folgt. Also ist auch hier kein Sprung.

Um die Bedingung (b'.) zu verificiren, beachte man, dass

$$\left[(c+\nu)\left(\frac{\partial}{\partial x}+c\right)+(c-\nu)\left(\frac{\partial}{\partial x}-c\right)\right]M(\nu,x) = 2c\left(\frac{\partial}{\partial x}+\nu\right)M(\nu,x) = -\frac{2c}{c-\nu}h(x).$$

Daher ist

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}+c\right)g(2n+2+x)+\left(\frac{\partial}{\partial x}-c\right)g(2n+x) = -2ch(x).\int\frac{\xi^n}{(c-\nu)^2}d\nu = 0;$$

denn das letzte Integral verschwindet, mag $n > -1$ eine Entwicklung nach Potenzen von $\nu - c$, oder $n < -1$ eine solche nach Potenzen von $\nu + c$ veranlassen; für $n = -1$ ist es $\int\frac{d\nu}{c^2-\nu^2} = 0$.

Da die Ausdrücke (9.) und (10.) allen Anforderungen genügen, so wenden wir sie in der allgemeinen Integralform

$$w = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\omega^2} g(2\omega\sqrt{t}+x)\,d\omega$$

an und bekommen, indem wir in der einen Hälfte der Intervalle $2\omega\sqrt{t} = 2n+\alpha-x$, in der andern $2\omega\sqrt{t} = -(2n+\alpha+x)$, ferner

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(2n+\alpha)^2}{4t}}\xi^n = \Theta(\nu,\alpha)$$

setzen,

$$(11.)\qquad w = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^1\left(\frac{1}{2i\pi}\int\Big(\Theta(\nu,\alpha-x)-\Theta(\nu,\alpha+x)\Big)M(\nu,\alpha)\,d\nu\right)\frac{d\alpha}{2\sqrt{t}},$$

wenn der ν-Weg $-c$ und c rechtläufig ein, aber alle Wurzeln der Gleichung $\cos\nu + c\frac{\sin\nu}{\nu} = 0$ ausschliesst. Für frühe Zeiten convergirt dieser Ausdruck sehr; denn man kann die Hülfsvariable ν fern genug von den zwei Polen $-c$ und c herumführen, dass weder ξ noch $\frac{1}{\xi}$ zu gross wird. Für $t = 0$ kommt aus den zwei Thetareihen nur der Term in Betracht, dessen Exponent im Intervalle $0 < \alpha < 1$ ein Mal endlich wird, für $0 < x < 1$ also der Term ($n = 0$) in $\Theta(\nu, \alpha - x)$. Da

$$\frac{1}{2i\pi}\int e^{-\frac{(\alpha-x)^2}{4t}}M(\nu,\alpha)\,d\nu \text{ auf } e^{-\frac{(\alpha-x)^2}{4t}}\cdot\frac{1}{2i\pi}\int\frac{g(\nu,\alpha)}{\nu-c}d\nu = e^{-\frac{(\alpha-x)^2}{4t}}g(c,\alpha)$$

zurückkommt, so wird $w(0,x) = g(c,x)$, wie verlangt ward. Für $x = 0$

verschwindet der Unterschied der zwei Thetareihen, so dass $w(t,0)=0$ wird. Dass die Erfüllung der Bedingungen (*a.*), (*b.*) schon in derjenigen der Bedingungen (*a'.*), (*b'.*) enthalten sei, ist schon bemerkt worden.

Untersuchen wir, welchen Werth S die Integralform (11.) annimmt, wenn der Weg der Hülfsvariabeln ν dem Horizont so nahe gebracht wird, als man nur will. Wenn p eine sehr grosse positive ganze Zahl bedeutet, so sind $N(ip\pi)=(-1)^p i.2p\pi$ und $N(-ip\pi)$ hinreichend von 0 verschieden; führt man ν ein Mal rechtläufig so um 0 herum, dass sein absoluter Werth stets $p\pi$ bleibt, so kann $N(\nu)$ unter Weges nie absolut kleiner werden als $2p\pi$, geschweige verschwinden; ξ weicht von -1 nur um ein kleines von der Ordnung $\frac{1}{p\pi}$ ab, beide Thetareihen haben daher stets einen mässigen endlichen, nahezu von ν unabhängigen Werth. Es frägt sich nur noch, welche Grösse $M(\nu,\alpha)$ erreicht. Man hat

$$M(\nu,\alpha) = \frac{e^{(1-\alpha)\nu}}{\nu-c}\int_0^\alpha \frac{(\nu+c)e^{\nu z}+(\nu-c)e^{-\nu z}}{(\nu+c)e^{\nu}+(\nu-c)e^{-\nu}}h(z)\,dz$$
$$+e^{-\alpha\nu}\int_\alpha^1 \frac{e^{\nu(1-z)}-e^{-\nu(1-z)}}{(\nu+c)e^{\nu}+(\nu-c)e^{-\nu}}h(z)\,dz.$$

Liegt ν östlich, so beträgt daher $M(\nu,\alpha)$ ungefähr

$$\frac{1}{\nu}\int_0^\alpha e^{\nu(z-\alpha)}h(z)\,dz = \frac{1}{\nu^2}\int_0^\infty e^{-\omega}h\left(\alpha-\frac{\omega}{\nu}\right)d\omega = \frac{h(\alpha)}{\nu^2};$$

(die obere Grenze ∞ des zweiten Integrals bedeutet zwar nicht den Ostpunkt selbst, sondern die Stelle der Osthälfte des Horizonts, wo sich eben ν befindet; aber beides kommt auf dasselbe hinaus.) Liegt ν westlich, so ist nach ungefährer Schätzung

$$M(\nu,\alpha) = -\frac{1}{\nu}\int_\alpha^1 e^{\nu(z-\alpha)}h(z)\,dz = \frac{1}{\nu^2}\int_0^\infty e^{-\omega}h\left(\alpha-\frac{\omega}{\nu}\right)d\omega = \frac{h(\alpha)}{\nu^2};$$

(die obere Grenze $\omega=\infty$ des zweiten Integrals liegt der Stelle, die ν in der Westhälfte des Horizonts einnimmt, diametral gegenüber). Für $\alpha=0$ und $\alpha=1$ verhält sich die Sache in ähnlicher Weise. Diejenigen Theile des auf ν bezüglichen Integrals, welche beide Hälften des Horizonts beinahe ganz, mit Ausnahme der Nordgegend und Südgegend, besetzen, betragen also nur ein kleines von der Ordnung $\frac{1}{p\pi}$. In der Nordgegend setze man $\nu=ip\pi-\varrho$, in der Südgegend $\nu=-ip\pi+\varrho$ (ϱ reell von einem mässig grossen negativen bis zum entgegengesetzten positiven Werth), und man wird sehen, dass die

betreffenden Theile des Integrales $\frac{1}{2i\pi}\int M(\nu,\alpha)d\nu$ nur von der Ordnung $\frac{1}{p\pi}$ sind. Die auf α bezügliche Integration verändert diesen Grad von Kleinheit nicht. Also ist S mindestens ein kleines von der Ordnung $\frac{1}{p\pi}$ und kann daher so klein gemacht werden, als man will, wenn man die ganze Zahl p gross genug annimmt. Die logarithmischen Pole, welche der zu S gehörende ν-Weg rechtläufig umschliesst, sind c, $-c$ und alle unter dem absoluten Werth $p\pi$ befindlichen Wurzeln der Gleichung $\cos\nu+c\frac{\sin\nu}{\nu}=0$. Daher ist S gleich der Summe der Integrale, die man durch den Umlauf in unmittelbarer Nähe um jeden der genannten Pole bekommt. Folglich ist $-w$ die Summe aller derjenigen Integrale, bei denen je eine Wurzel der Gleichung $\frac{N(\nu)}{\nu}=0$ umlaufen wird.

Es sei $i\lambda$ eine solche Wurzel; dann ist $c=-\lambda\operatorname{cotg}\lambda$, $\xi=e^{-2i\lambda}$; durch den Uebergang zum complementären Modul wird also

$$\Theta(i\lambda,\alpha) = \sqrt{\pi}.\sqrt{t}\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-(n\pi+\lambda)^2t+i(n\pi+\lambda)\alpha};$$

$$\Theta(i\lambda,\alpha-x)-\Theta(i\lambda,\alpha+x) = -2i\sqrt{\pi}.\sqrt{t}\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-(n\pi+\lambda)^2t+i(n\pi+\lambda)\alpha}\sin((n\pi+\lambda)x).$$

Da $N'(i\lambda)=2[(1+c)\cos\lambda-\lambda\sin\lambda]=\frac{2\cos\lambda}{c}(\lambda^2+c^2+c)$, so ist

$$\frac{1}{2i\pi}\int\frac{d\nu}{N(\nu)} = \frac{c}{2\cos\lambda}\cdot\frac{1}{\lambda^2+c^2+c},$$

wenn ν in unmittelbarer Nähe rechtläufig um $i\lambda$ herumgeht; daher, wenn man der Kürze wegen

$$\mathcal{A}(\lambda) = \frac{c}{\cos\lambda}\cdot\frac{\int_0^1\sin(\lambda z)h(1-z)dz}{\lambda^2+c^2+c}$$

setzt,

$$\frac{1}{2i\pi}\int M(\nu,\alpha)d\nu = i\mathcal{A}(\lambda).e^{-i\lambda\alpha},\quad [\mathcal{A}(-\lambda)=-\mathcal{A}(\lambda)].$$

Multiplicirt man diesen Ausdruck mit $e^{i(n\pi+\lambda)\alpha}d\alpha$ und integrirt über $0<\alpha<1$, so ergiebt sich $i\mathcal{A}(\lambda)$, wenn n null ist, 0, wenn n gerade, und $-\frac{2}{m\pi}\mathcal{A}(\lambda)$, wenn n einen ungeraden Werth m hat. Daraus folgt

$$-w = \sum_\lambda\left\{\mathcal{A}(\lambda)e^{-\lambda^2t}\sin(\lambda x)+\frac{2i}{\pi}\sum_m\frac{\mathcal{A}(\lambda)}{m}e^{-(m\pi+\lambda)^2t}\sin((m\pi+\lambda)x)\right\},$$

wo die innere Summe sich auf alle ungeraden Zahlen m, die äussere sich auf alle Wurzeln λ der Gleichung $\cos\lambda+c\frac{\sin\lambda}{\lambda}=0$ bezieht. Da der Term der Doppelsumme in sein entgegengesetztes übergeht, wenn m, λ mit $-m, -\lambda$ vertauscht werden, so fällt die innere auf m bezügliche Summe weg, und man hat einfach

$$(12.)\quad w=\sum_\lambda -\frac{2c}{\cos\lambda}\cdot\frac{\int_0^1\sin(\lambda z)h(1-z)\,dz}{\lambda^2+c^2+c}\,e^{-\lambda^2 t}\sin(\lambda x)\,(\text{über }\lambda>0,\ \lambda\cos\lambda+c\sin\lambda=0).$$

Da $\left(\frac{\partial}{\partial x}+c\right)\sin(\lambda x)=\lambda\cos(\lambda x)+c\sin(\lambda x)=-\frac{c}{\cos\lambda}\sin(\lambda-\lambda x)$, $\left(\frac{c}{\cos\lambda}\right)^2=\lambda^2+c^2$, so folgt

$$u=2\sum_\lambda\frac{(\lambda^2+c^2)\int_0^1\sin(\lambda z)h(1-z)\,dz}{\lambda^2+c^2+c}\,e^{-\lambda^2 t}\sin(\lambda-\lambda x)\quad(\text{über }\lambda>0,\ \lambda\cos\lambda+c\sin\lambda=0).$$

Schreibt man statt $t, x, u, h(x), c, \lambda$ resp. $\frac{a^2}{c^2}t$, $1-\frac{r}{c}$, v, $rF(c-r)$, $hc-1$, λc, so geht die letzte Formel in diejenige bei Herrn *Hattendorff* pag. 159 und 162 über. — Ich halte dafür, dass sie für $t=0$ nicht mehr convergire, wenigstens die Summe nicht, die das Element $h(1-z)\,dz$ multiplicirt. Aber wenn auch die gegebene Function $h(1-z)$ einer convergenten Entwicklung von der Form $\sum_\lambda C_\lambda\sin\lambda z$ nicht fähig wäre, so zeigt doch die Verwandlung von (11.) in (12.), dass der letzte Ausdruck der Temperatur u für eine positive Zeit richtig ist.

Der auf Seite 166 des erwähnten Buches behandelte Fall einer sehr grossen Kugel mit constanter Anfangstemperatur ist durch das hier angezeigte Verfahren sehr leicht zu lösen. Die Grenze $x<1$ und mit ihr die Bedingung (b.) fallen weg. Durch die Bedingung (a.) wird der Fall auf die unter I. behandelte Aufgabe zurückgeführt. Giebt man $h(x)=1$ für $x>0$, so ist $g(x)=\frac{1}{c}(1-e^{-cx})$ für $x>0$. Man bekommt

$$w=\frac{1}{c\sqrt{\pi}}\left\{2\int_0^{\frac{x}{2\sqrt{t}}}e^{-\omega^2}d\omega-e^{+c^2t-cx}\int_{-\frac{x}{2\sqrt{t}}+c\sqrt{t}}^{\infty}e^{-\omega^2}d\omega+e^{+c^2t+cx}\int_{\frac{x}{2\sqrt{t}}+c\sqrt{t}}^{\infty}e^{-\omega^2}d\omega\right\};$$

also

$$u=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(\int_0^{\frac{x}{2\sqrt{t}}}e^{-\omega^2}d\omega+e^{+c^2t+cx}\int_{\frac{x}{2\sqrt{t}}+c\sqrt{t}}^{\infty}e^{-\omega^2}d\omega\right),$$

ein Ausdruck, der mit

$$S = \frac{2}{\pi}\left\{\int_0^\infty e^{-\varrho^2 t}\cos\varrho x\cdot\frac{c\,d\varrho}{\varrho^2+c^2}+\int_0^\infty e^{-\varrho^2 t}\frac{\sin\varrho x}{\varrho}\frac{c^2 d\varrho}{\varrho^2+c^2}\right\}$$

am angeführten Orte gleichwerthig ist. Setzt man nämlich der Kürze wegen $t=\frac{s^2}{c^2}$, $x=\frac{2sy}{c}$, $\varrho=\frac{c\sigma}{s}$, so ist

$$S = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty e^{-\sigma^2}\sin(2y\sigma)\frac{\partial\sigma}{\sigma}+\frac{2}{\pi}\int_0^\infty e^{-\sigma^2}(s\cos(2y\sigma)-\sigma\sin(2y\sigma))\frac{d\sigma}{\sigma^2+s^2}.$$

Der zweite Term ist

$$B = \frac{1}{i\pi}\left(\int_0^\infty e^{-\sigma^2-2iy\sigma}\frac{d\sigma}{\sigma-is}-\int_0^\infty e^{-\sigma^2+2iy\sigma}\frac{d\sigma}{\sigma+is}\right).$$

Setzt man im ersten Integral $\sigma = is+z$, im zweiten $\sigma = -is-z$, so wird

$$B = \frac{1}{i\pi}e^{s^2+2sy}\int_{-\infty}^\infty e^{-z^2-2i(s+y)z}\frac{dz}{z},$$

wo der Integrationsweg durch $-is$, also, da s positiv vorausgesetzt ist, südlich bei 0 vorbeigeht. Bringt man ihn, mit Ausnahme eines kleinen rechtläufigen Halbkreises um 0, in die Realitätslinie, so fällt $i\pi$ auf diesen als Antheil des Integrals; die übrigen Hälften, zusammengeklappt, geben

$$-2i\int_0^\infty e^{-z^2}\sin(2(s+y)z)\frac{dz}{z};$$

also ist

$$B = e^{s^2+2sy}\left(1-\frac{2}{\pi}\int_0^\infty e^{-z^2}\sin(2(s+y)z)\frac{dz}{z}\right).$$

Da nun überhaupt $\int_0^\infty e^{-z^2}\sin(2az)\frac{dz}{z} = \sqrt{\pi}\int_0^a e^{-\omega^2}d\omega$ ist, so folgt

$$S = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\left\{\int_0^y e^{-\omega^2}d\omega+e^{s^2+2sy}\int_{s+y}^\infty e^{-\omega^2}d\omega\right\}.$$

Zum Schlusse möchte ich folgendes hier aussprechen. Ich begreife die Wichtigkeit der *Fourier*schen Summenreihe und des Beweises ihrer Convergenz, wenn die Coefficienten durch Integrale mittelst einer willkürlich gegebenen periodischen Function ausgedrückt sind, insofern als dieser Beweis in einem bestimmten Falle, dem der Begränzung des Functionsgebietes durch

zwei concentrische Kreise, ein Mittel liefert, sich vom Dasein einer durch das von *Riemann* so genannte *Dirichlet*sche Princip bestimmten Function durch wirkliche Construction in analytischer Gestalt zu überzeugen. Aber etwas kommt in diesem Beweise vor, das ich für eine blosse Uebereinkunft halte, nämlich die Aussage über den Mittelwerth zwischen zwei angrenzenden Functionswerthen, den die Function, oder richtiger gesagt, Functionscomponente, an einer Sprungstelle annehmen soll. Sie kommt auf die Aussage zurück, dass $\Sigma \frac{\sin n\varphi}{n}$ den Nullwerth annehme im Augenblicke, wo φ reelle Werthe durchlaufend null geworden ist. Der Beweis setzt nämlich eine hinreichende endliche Menge von Termen voraus (so dass der weggelassene Rest beliebig klein werden kann): und eine solche ist bei $\varphi = 0$ nicht mehr möglich, da die Reihe in die Form $\varphi(1+1+1+\cdots)$, d. h. $0 \times \infty$ übergeht. Sieht man die Sache von einer anderen Seite an, so ist die fragliche Summe die imaginäre Componente der ächten Function $-\log(1-x)$, wenn diese Function in $x = 0$ mit dem Nullwerthe beginnt, und dann x gerade bis nach $e^{i\varphi}$ hin $(0 < \varphi < 2\pi)$ geführt wird. Die imaginäre Componente bekommt dann den Werth $\frac{\pi}{2} - \frac{\varphi}{2}$, wird also im logarithmischen Pole 1 entweder $\frac{\pi}{2}$ oder $-\frac{\pi}{2}$, je nachdem der Zugang von der nördlichen oder südlichen Seite her geschieht. Soll diese Componente wirklich null sein, so muss der Zugang von der westlichen Seite her geschehen. Ganz im Allgemeinen aber ist diese Componente alldeutig.

Bern, den 27. April 1870.

Ueber Involutionen höherer Grade.

(Von Herrn *Emil Weyr* in Prag.)

---

1. Eine Involution n^{ten} Grades (Strahlen- oder Punktinvolution) ist durch zwei Elementengruppen bestimmt *). Jede Gruppe besteht aus n Elementen, welche sich gegenseitig involutorisch entsprechen. Sind zwei Involutionen J_m, J_n bezüglich vom m^{ten} und n^{ten} Grade in einer derartigen Beziehung, dass jeder Elementengruppe der einen Involution eine Elementengruppe der anderen entspricht, so nennt man die Involutionen projectivisch.

Sind zwei projectivische Involutionen J_m, J_n gleichartig (d. h. entweder zwei Strahlen- oder zwei Punktinvolutionen) und befinden sie sich auf demselben Träger (demselben Scheitel oder derselben Geraden), so geschieht es im Allgemeinen $(m+n)$mal, dass ein Element der einen Involution mit einem der ihm entsprechenden Elemente der anderen Involution zusammenfällt.

Mit anderen Worten: „zwei projektivische Involutionen, welche sich auf demselben Träger befinden, besitzen $(m+n)$ gemeinschaftliche Elemente" **).

2. Legt man durch den Scheitel einer Strahleninvolution n^{ten} Grades einen willkürlichen Kegelschnitt T_2, so schneiden die n-strahligen Gruppen der Involution den Kegelschnitt T_2 in n-punktigen Gruppen einer Punktinvolution des n^{ten} Grades, als deren Träger der Kegelschnitt T_2 erscheint. Die Punktinvolution auf T_2 kann in jeder Richtung die Strahleninvolution ersetzen, indem man jede, auf letztere bezügliche Construction mit ersterer vorzunehmen braucht, und dann mittelst des zwischen beiden Involutionen herrschenden einfachen Zusammenhanges der Perspectivität die Resultate zu übertragen hat.

Ebenso gelangt man von einer Punktinvolution n^{ten} Grades auf einer Geraden zu einer Tangenteninvolution desselben Grades auf einem Kegelschnitt, welcher dann der Träger der Involution ist.

Es folgt unmittelbar aus dem über Involutionen im Allgemeinen Gesagten, dass auch eine Involution auf einem Kegelschnitte durch zwei Elementengruppen bestimmt erscheint.

---

*) Siehe *Cremona*, ebene Curven pag. 27 in der deutschen Ausgabe.

**) ibid. pag. 32.

Selbstverständlich genügt es, von den beiden auf Kegelschnitten möglichen Involutionsarten eine zu betrachten, indem mittelst des Gesetzes der Reciprocität die Resulate auch für die zweite Art giltig werden.

3. Sei T_2 ein Kegelschnitt und Träger einer Punktinvolution n^{ten} Grades. Die einzelnen n-punktigen Gruppen derselben bilden dem Kegelschnitte T_2 eingeschriebene vollständige n-Ecke, von denen jedes $\frac{n(n-1)}{2}$ Seiten besitzt. Wir wollen nun zunächst untersuchen, was für eine Curve die Seiten sämmtlicher dieser n-Ecke umhüllen.

Vor Allem ist leicht einzusehen, dass durch jeden Punkt des Trägers T_2 $(n-1)$ solcher Seiten gehen. Denn jeder Punkt von T_2 gehört nur einer einzigen Gruppe der Involution an, deren übrige $(n-1)$ Punkte mit ihm verbunden $(n-1)$ durch ihn gehende Tangenten der fraglichen Enveloppe liefern. Es unterliegt keiner Schwierigkeit, zu zeigen, dass durch jeden Punkt der Ebene des Kegelschnittes T_2 nur $(n-1)$ Tangenten der Enveloppe hindurchgehen, d. h. dass dieselbe eine Curve $(n-1)^{\text{ter}}$ Classe sei.

Es sei der Kegelschnitt T_2 der Träger der Involution und p ein nicht auf T_2, aber beliebig in der Ebene von T_2 gelegener Punkt; $a_1 a_2 a_3 \dots$ sei eine Gruppe von n Punkten auf T_2.

Indem man die Punkte $a_1 a_2 a_3 \dots$ mit p verbindet, erhält man, da jede Verbindungslinie den Träger T_2 noch einmal schneidet, eine neue n-punktige Gruppe $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \dots$. In dieser Art kann man mittelst des Punktes p jeder Gruppe der Involution (a) eine n-punktige Gruppe (α) von T_2 zuordnen, deren Gesammtheit eine neue Involution des n^{ten} Grades auf T_2 darstellt.

Die Involution (a) ist offenbar mit der Involution (α) projektivisch, indem jeder Punktgruppe der einen *eine* Punktgruppe der anderen entspricht.

Beide Involutionen werden somit, da sie vom n^{ten} Grade sind, $2n$ gemeinschaftliche Punkte besitzen. Die Berührungspunkte der beiden von p an T_2 gezogenen Tangenten sind zwei von den gemeinschaftlichen Punkten, wie sofort aus dem perspectivischen Zusammenhange der beiden Involutionen hervorgeht. Ausser diesen giebt es demnach noch $2n-2$ d. i. $2(n-1)$ weitere gemeinschaftliche Punkte. Von diesen liegen jedoch je zwei auf einer durch p gehenden Geraden. Denn würde z. B. α_3 mit a_1 zusammenfallen, so fiele auch gleichzeitig a_3 mit α_1 zusammen. Dann liegen aber in einem solchen Falle zwei Punkte (a_1 und a_3) der Involution (a) mit dem Punkte p in einer Geraden, welche eine Tangente der gesuchten Enveloppe ist. Dies wird,

weil es $2(n-1)$ solcher gemeinschaftlichen Punkte giebt, $(n-1)$mal eintreten, wodurch die von uns aufgestellte Behauptung über die Classe der fraglichen Enveloppe erwiesen ist.

4. Das Resultat der vorhergehenden Betrachtung lässt sich folgendermassen ausdrücken:

„Befindet sich auf einem Kegelschnitte eine Punktinvolution n^{ten} Grades, so umhüllen die Verbindungslinien entsprechender Punkte eine Curve $(n-1)^{ter}$ Classe.“

Wir wollen diese Curve die Involutionscurve nennen. Ebensoleicht gelangt man zu dem reciproken Satze:

„Befindet sich auf einem Kegelschnitte eine Tangenteninvolution n^{ten} Grades, so erfüllen die Schnittpunkte entsprechender Tangenten eine Curve $(n-1)^{ter}$ Ordnung — die Involutionscurve.“

Die Involutionscurve einer Involution n^{ten} Grades an einem Kegelschnitte ist also von der $(n-1)^{ten}$ Ordnung oder Classe, je nachdem die Involution eine Tangenten- oder Punktinvolution ist.

5. Da man von einer Involution zwei Elementengruppen willkürlich annehmen kann, so liefern die vorigen Ergebnisse die folgenden Sätze:

„Sind einem Kegelschnitte zwei n-Ecke eingeschrieben, so berühren deren $n(n-1)$ Seiten eine und dieselbe Curve $(n-1)^{ter}$ Classe. Es giebt dann unendlich viele dem Kegelschnitte eingeschriebene n-Ecke, welche dieser Curve umschrieben sind.“

Für $n = 3$ erhält man den bekannten Satz:

„Sind zwei Dreiecke einem Kegelschnitte eingeschrieben, so sind sie gleichzeitig einem zweiten Kegelschnitte umschrieben. Es giebt dann unendlich viele Dreiecke, welche dem ersteren eingeschrieben und dem zweiten umschrieben sind.“

Der letztere Kegelschnitt ist die Involutionscurve der cubischen Punktinvolution, für welche die Ecken der beiden erwähnten Dreiecke zwei Gruppen von Punkten sind.

Für $n = 4$ erhält man:

„Die zwölf Seiten zweier einem Kegelschnitte eingeschriebenen Vierecke berühren eine und dieselbe Curve dritter Classe.“

Die reciproken Sätze lauten:

„Sind zwei n-Seite einem Kegelschnitte umschrieben, so liegen deren $n(n-1)$ Ecken auf einer und derselben Curve $(n-1)^{ter}$ Ordnung. Es giebt

dann unendlich viele dem Kegelschnitte umschriebene n-Seite, welche dieser Curve eingeschrieben sind".

„*Sind zwei Dreiseite einem Kegelschnitte umschrieben, so sind sie zugleich einem zweiten Kegelschnitte eingeschrieben u. s. w.*"

„*Die zwölf Ecken zweier einem Kegelschnitte umschriebenen Vierseite liegen auf einer und derselben Curve dritter Ordnung u. s. w.*

6. Befindet sich am Kegelschnitte T_2 eine Punktinvolution J_n n^{ten} Grades, deren Involutionscurve C^{n-1} ist, so wird man leicht zu jedem Punkte die entsprechenden $(n-1)$ Punkte construiren können. Zieht man nämlich die durch den Punkt gehenden $(n-1)$ Tangenten der Involutionscurve C^{n-1}, so wird jede von ihnen den Träger noch einmal und zwar in einem der gesuchten entsprechenden Punkten schneiden.

Umgekehrt schneidet überhaupt jede Tangente der Involutionscurve den Träger T_2 in zwei entsprechenden Punkten, d. h. in zwei Punkten, welche zu einer und derselben Gruppe gehören. Sollen diese beiden Punkte zusammenfallen, d. h. einen Doppelpunkt der Involution repräsentiren, so muss die Tangente der Involutionscurve, auf welcher sie liegen, zugleich eine Tangente des Trägers T_2 sein. Da nun der Träger eine Curve der zweiten Classe und die Involutionscurve eine der $(n-1)^{\text{ten}}$ Classe ist, so besitzen beide $2(n-1)$ gemeinschaftliche Tangenten, welche den Träger T_2 in den Doppelpunkten der Involution berühren.

„*Die $2(n-1)$ dem Träger T_2 einer Punktinvolution n^{ten} Grades und deren Involutionscurve gemeinschaftlichen Tangenten berühren den Träger in den Doppelpunkten der Involution.*"

Reciprok:

„*Die $2(n-1)$ dem Träger T_2 einer Tangenteninvolution n^{ten} Grades und deren Involutionscurve gemeinschaftlichen Punkte sind die Berührungspunkte der Doppeltangenten der Involution.*"

7. Jeder der $2(n-1)$ Doppelpunkte einer auf T_2 befindlichen Punktinvolution n^{ten} Grades gehört einer Punktgruppe derselben an. Ausser dem Doppelpunkte enthält eine solche Gruppe — eine Doppelpunktsgruppe — noch $(n-2)$ einfache Punkte, welche offenbar die Beschaffenheit haben, dass zwei von den ihnen entsprechenden Punkten im Doppelpunkte zusammenfallen. Es müssen somit auch zwei von den $(n-1)$ aus einem solchen Punkte an die Involutionscurve gehenden Tangenten zusammenfallen, und zwar in der Verbindungslinie des betreffenden Punktes mit dem Doppelpunkte. Daraus folgt

aber sofort, dass diese Punkte im Allgemeinen der Involutionscurve angehören müssen, d. h. dass es Schnittpunkte des Trägers T_2 mit der Involutionscurve sind.

„Die $(n-2)$ Punkte einer auf einem Kegelschnitte befindlichen Punktinvolution n^{ten} Grades, welche mit einem Doppelpunkte einer und derselben Gruppe angehören, sind Schnittpunkte des Trägers mit der Involutionscurve, welche in ihnen die nach dem Doppelpunkte gehenden Strahlen berührt."

Da es $2(n-1)$ Doppelpunkte giebt, so giebt es $2(n-1)(n-2)$ solcher Schnittpunkte, und folglich ist die Involutionscurve von der $(n-1)(n-2)^{\text{ten}}$ Ordnung, und daher eine allgemeine Curve $(n-1)^{\text{ter}}$ Classe.

Ebenso reciprok:

„Die $(n-2)$ Tangenten einer auf einem Kegelschnitte befindlichen Tangenteninvolution n^{ten} Grades, welche mit einer Doppeltangente einer und derselben Gruppe angehören, sind gemeinschaftliche Tangenten des Trägers und der Involutionscurve, welche sie in ihren Schnittpunkten mit der Doppeltangente berühren."

Die Involutionscurve einer solchen Tangenteninvolution n^{ten} Grades ist eine allgemeine Curve $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung.

8. Wir sahen, dass die Involutionscurve einer auf einem Kegelschnitte befindlichen Elementeninvolution durch zwei Elementengruppen bestimmt erschien. Es lässt sich nun zeigen, dass jede Curve von der Familie der Involutionscurve, welche einer Elementengruppe genügt, als Involutionscurve auftreten könne.

Mit anderen Worten:

„Wird einem vollständigen n-Eck, welches einem Kegelschnitte T_2 eingeschrieben ist, eine Curve C^{n-1} $(n-1)^{\text{ter}}$ Classe eingeschrieben, so giebt es unendlich viele n-Ecke, welche dem Kegelschnitte eingeschrieben und der Curve C^{n-1} umschrieben sind, d. h. die Curve C^{n-1} kann als die Curve einer auf T_2 befindlichen Punktinvolution n^{ten} Grades betrachtet werden."

Denn zieht man von einem beliebigen Punkte x_1 des Kegelschnittes T_2 an C^{n-1} die $(n-1)$ Tangenten, so werden diese auf T_2 die Punkte $x_2 x_3 \dots x_n$ bestimmen. Wenn man nun die n Punkte (x) als eine Gruppe einer auf T_2 befindlichen Punktinvolution n^{ten} Grades betrachtet, für welche die n Ecken des n-Ecks, welchem C^{n-1} eingeschrieben wurde, eine zweite Gruppe bilden, so ist dadurch die Involution und folglich auch eine Involutionscurve bestimmt, welche von derselben Classe wie C^{n-1} mit dieser die Seiten des dem Kegel-

schnitte T_2 eingeschriebenen n-Ecks und die $(n-1)$ von x_1 nach $x_2 x_3 \dots x_n$ gehenden Strahlen zu gemeinschaftlichen Tangenten besitzt.

Die Gesammtzahl dieser gemeinschaftlichen Tangenten beträgt somit $\frac{n(n-1)}{2}+(n-1)$, d. i. $\frac{(n-1)(n+2)}{2}$, also genau so viel Tangenten, als zur Bestimmung einer Curve $(n-1)^{\text{ter}}$ Classe nothwendig sind. Die beiden betrachteten Curven werden also nur dann von einander verschieden sein können, wenn die gemeinschaftlichen $\frac{(n-1)(n+2)}{2}$ Tangenten zu einem System von gemeinschaftlichen Tangenten zweier Curven $(n-1)^{\text{ter}}$ Classe gehören.

Dies ist jedoch nicht der Fall. Denn da je $(n-1)$ von diesen Tangenten durch einen Punkt hindurchgehen, so müssten die übrigen eine Curve $(n-2)^{\text{ter}}$ Classe berühren, was aber aus dem nämlichen Grunde unmöglich ist, weil von ihnen abermals je $(n-1)$ durch einen Punkt gehen, und diese Punkte daher der Curve $(n-2)^{\text{ter}}$ Classe als Bestandtheile erster Classe angehören müssten. Nun giebt es $\frac{n(n-1)}{2}$ solcher Punkte, welche keine Curve $(n-2)^{\text{ter}}$ Classe darstellen können.

Die Curve C^{n-1} muss demnach mit der Involutionscurve identisch sein, wodurch unsere Behauptung erwiesen ist. Das reciproke Ergebniss lautet.

„Wird einem vollständigen n-Seit, welches einem Kegelschnitte T_2 umgeschrieben ist, eine Cure $(n-1)^{ter}$ Ordnung umgeschrieben, so giebt es unendlich viele n-Seite, welche dem Kegelschnitte umgeschrieben und der Curve eingeschrieben sind; d. h. die Curve kann als die Curve einer auf T_2 befindlichen Tangenteninvolution n^{ten} Grades betrachtet werden.“

Das vollständige n-Seit liefert für die im letzten Satze besprochene Involutionscurve $\frac{n(n-1)}{2}$ Punkte. Da eine Curve $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung durch $\frac{(n-1)(n+2)}{2}$ Punkte bestimmt erscheint, so kann man von der Involutionscurve überdies $(n-1)$ Punkte willkürlich annehmen. Nun liefert jedes Paar entsprechender Tangenten der Involution einen Punkt der Involutionscurve, woraus wir folgendes Ergebniss ziehen:

„Eine Involution n^{ten} Grades ist vollkommen bestimmt, sobald man eine Gruppe von Elementen und weitere $(n-1)$ Elementenpaare kennt.“

9. Wird von einer auf dem Kegelschnitte T_2 zu bestimmenden Tangenteninvolution n^{ten} Grades eine n-elementige Gruppe angenommen, so bildet diese ein vollständiges dem Träger umschriebenes n-Seit, dessen $\frac{n(n-1)}{2}$

Ecken Punkte der Involutionscurve sind. Die Involution selbst und mit ihr die Involutionscurve wird erst durch Annahme einer zweiten n-elementigen Gruppe bestimmt sein. Nimmt man von dieser zweiten Gruppe nur $(n-1)$ Tangenten an, so ist die Involution noch unbestimmt und wird erst durch Hinzufügen einer Tangente zu diesen $(n-1)$ Tangenten bestimmt sein. Lässt man diese letzte Tangente variabel, so erhält man unendlich viele Involutionen, welche eine n-elementige und eine $(n-1)$-elementige Gruppe gemein haben.

Die Involutionscurven werden demgemäss die $\frac{n(n-1)}{2}$ Ecken des durch erstere Gruppe gebildeten n-Seits und die $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ Ecken des durch die zweite Gruppe gebildeten $(n-1)$-Seits gemeinschaftlich haben. Da die Involutionscurven von der $(n-1)^{\text{ten}}$ Ordnung sind, so werden je zwei von ihnen $(n-1)^2$ gemeinschaftliche Punkte haben. Nun ist $\frac{n(n-1)}{2}+\frac{(n-1)(n-2)}{2}=(n-1)^2$, und folglich bilden die Ecken des besprochenen n-Seits und $(n-1)$-Seits die sämmtlichen Durchschnittspunkte aller der betrachteten Involutionscurven. Da wir die n-elementige und die $(n-1)$-elementige Gruppe beliebig annehmen konnten, so ziehen wir hieraus folgenden Satz:

„*Die Ecken eines vollständigen einem Kegelschnitte umschriebenen n-Seits mit den Ecken eines demselben Kegelschnitte umschriebenen $(n-1)$-Seits stellen ein System von Durchschnittspunkten zweier Curven $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung dar.*“

Ebenso:

„*Die Seiten eines vollständigen einem Kegelschnitte eingeschriebenen n-Ecks mit den Seiten eines demselben Kegelschnitte eingeschriebenen $(n-1)$-Ecks stellen ein System von gemeinschaftlichen Tangenten zweier Curven $(n-1)^{\text{ter}}$ Classe dar.*“

10. Es werden also nach dem ersten Satze des vorigen Artikels die sechs Ecken eines einem Kegelschnitte umschriebenen Vierseits mit den drei Ecken eines demselben Kegelschnitte umschriebenen Dreiseits neun Durchschnittspunkte zweier Curven dritter Ordnung darstellen.

Hieraus fliesst eine besonders einfache Construction des neunten Scheitels eines Curvenbüschels dritter Ordnung, wenn sechs Scheitel die Ecken eines vollständigen Vierseits bilden. Construirt man nämlich von den beiden dem Vierseit nicht angehörenden Scheiteln die zwei Tangenten an jenen dem Vierseit eingeschriebenen Kegelschnitt, welcher die Verbindungslinie dieser

zwei Scheitel berührt, so schneiden sich die beiden Tangenten in dem neunten Scheitel.

11. Befindet sich auf einem Kegelschnitte T_2 eine Punktinvolution n^{ten} Grades neben einer solchen des m^{ten} Grades, so wird es eine leicht bestimmbare Anzahl von Punktepaaren geben, welche sowohl der einen als auch der anderen Involution angehören.

Die Involution n^{ten} Grades besitzt eine Involutionscurve $(n-1)^{\text{ter}}$ Classe, deren Tangenten auf T_2 Punktepaare dieser Involution bestimmen. Die Involutionscurve der zweiten Involution ist von der $(m-1)^{\text{ten}}$ Classe. Beide Curven haben demnach $(n-1)(m-1)$ gemeinschaftliche Tangenten, welche auf T_2 ebenso viele Punktepaare bestimmen, die beiden Involutionen angehören — ihnen gemeinschaftlich sind. Daher der Satz:

„Zwei Involutionen auf demselben Träger resp. vom m^{ten} und n^{ten} Grade besitzen $(n-1)(m-1)$ gemeinschaftliche Elementenpaare.“

In der Betrachtung des 3. Artikels war $m=2$.

Prag, im Januar 1870.

Trägheits- und höhere Momente eines Massensystemes in Bezug auf Ebenen.

(Von Herrn *Th. Reye* in Aachen.)

---

1. Vor einigen Jahren habe ich in der Zeitschrift für Mathematik und Physik den Nachweis geliefert, dass jeder Körper hinsichtlich seiner Trägheitsmomente auf unendlich viele Arten durch vier Massenpunkte ersetzt werden kann; d. h. vier Punkte können der Lage und Masse nach so bestimmt werden, dass ihr Trägheitsmoment in Bezug auf jede Axe oder Ebene des Raumes gleich demjenigen des gegebenen Körpers wird. Der erste dieser vier Punkte kann ganz beliebig im Raume angenommen werden; dadurch ist aber nicht nur die ihm beizulegende Masse, sondern auch die Ebene der drei übrigen Punkte völlig bestimmt. Nimmt man in dieser Ebene den zweiten Punkt willkürlich an, so erhält man ausser dessen Masse noch die Verbindungslinie der letzten beiden Punkte, und auf dieser kann noch der dritte Punkt beliebig gewählt werden. Die vier Massenpunkte haben dieselbe Gesammtmasse und denselben Schwerpunkt wie der gegebene Körper; das berühmte Problem der Rotation eines schweren Körpers ist demnach zurückgeführt auf dasjenige der Drehung von vier, starr mit einander verbundenen Massenpunkten um einen von ihnen.

2. Vier solche, einen Körper hinsichtlich seiner Trägheitsmomente vertretende Massenpunkte bilden in ihren unendlich vielen Lagen die Poltetraeder (oder Quadrupel harmonischer Punkte) eines durch die Massenvertheilung im Körper völlig bestimmten, imaginären Ellipsoides, dessen Mittelpunkt mit dem Schwerpunkte des Körpers zusammenfällt. Legt man durch irgend einen Punkt P drei zu jenem Ellipsoide confocale Flächen zweiter Ordnung, so fallen deren Normalen im Punkte P zusammen mit den drei Hauptträgheitsaxen dieses Punktes. Dieser letzte Satz und jenes von mir wohl zuerst bemerkte imaginäre Ellipsoid finden sich auch in der neuen Auflage von Herrn *Hesses* analytischer Geometrie des Raumes; das Ellipsoid wird daselbst *das imaginäre Bild des Körpers* genannt. Erst aus Herrn *Hesses* 25ster Vorlesung aber ersehe ich, dass für alle Berührungsebenen dieses imaginären Bildes

das Trägheitsmoment des Körpers gleich Null ist. Mir scheint diese fundamentale Eigenschaft jenes Bildes den geeignetsten Weg zur Lösung der Fragen anzudeuten: *Kann ein Massensystem auch hinsichtlich seiner dritten, vierten, n^{ten} Momente durch eine beschränkte Anzahl von Massenpunkten vertreten werden? und wenn dieses der Fall ist, welche gegenseitige Lage haben diese Punkte?* Die Lösung dieser Fragen wird auf gewisse Fundamentaleigenschaften der Flächen n^{ter} Classe ein neues Licht werfen, zugleich aber zu bemerkenswerthen algebraischen Sätzen führen.

§. 1. Die n^{ten} Momente eines Massensystemes und ihre Abhängigkeit von einander.

3. Sei dm ein unendlich kleines Element eines Massensystemes m, und r sein Abstand von einer gegebenen Ebene, welcher positiv oder negativ angenommen werden soll, je nachdem dm auf der einen oder auf der anderen Seite der Ebene liegt; dann nennen wir das über das ganze Massensystem sich erstreckende Integral:

$$\int r^n \, dm$$

das n^{te} Moment des Massensystemes m in Bezug auf jene Ebene. Für $n=1$ wird dasselbe bekanntlich das *statische Moment*, für $n=2$ wird es *Trägheitsmoment* genannt. Die Massen des Systemes können räumlich in Körpern vertheilt, aber auch theilweise oder alle in Punkten, Linien oder Flächen concentrirt sein. Auch negative Massen und Körper von negativer Dichtigkeit will ich nicht ausschliessen; ihre Einführung sichert unseren Untersuchungen eine grössere Allgemeinheit und bietet auch sonst viele Vortheile. Nicht nur in den Momenten von Elektricitäts- und Magnetismusmengen treten solche negative Massen auf, sondern schon dann, wenn wir die Differenz der Momente von zwei verschiedenen Systemen ponderabler Massen berechnen wollen; denn wir finden diese Differenz für jede Ebene des Raumes, indem wir im Integrale $\int r^n dm$ die Massen des einen Systemes mit positivem, die des andern mit negativem Zeichen annehmen.

4. Wir wollen das Massensystem m auf ein rechtwinkliges Coordinatensystem beziehen und mit x, y, z die Coordinaten des Elementes dm bezeichnen. Ist alsdann p die Länge des Perpendikels, welches vom Coordinatenanfang auf die gegebene Ebene E gefällt werden kann, und sind α, β, γ die Cosinus der Neigungswinkel, welche p mit den Coordinatenaxen

bildet, so hat dm von E den Abstand:

$$r = \alpha x + \beta y + \gamma z - p.$$

Nämlich die Coordinaten x, y, z bilden eine gebrochene Linie, welche da Element dm mit dem Coordinatenanfang verbindet, und $\alpha x + \beta y + \gamma z$ ist die Projection dieser Linie auf das Perpendikel und seine Verlängerung; woraus zugleich ersichtlich wird, dass jener Abstand r positiv oder negativ ausfällt, je nachdem dm vom Coordinatenanfang durch die Ebene getrennt ist oder nicht. Die Gleichung dieser Ebene ist:

$$\alpha x + \beta y + \gamma z - p = 0,$$

und α, β, γ, p heissen *die Coordinaten der Ebene;* zwischen α, β, γ besteht die bekannte Gleichung:

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1.$$

Einer homogenen Gleichung n^{ten} Grades zwischen α, β, γ, p entspricht, wie man weiss, eine Fläche n^{ter} Classe, an welche durch eine beliebige Gerade im Allgemeinen und höchstens n Berührungs-Ebenen gelegt werden können, und welche von allen Ebenen, deren Coordinaten der Gleichung genügen, berührt wird.

5. Für das n^{te} Moment des Massensystemes in Bezug auf die Ebene $(\alpha, \beta, \gamma, p)$ erhalten wir nunmehr folgenden Ausdruck:

$$\int r^n dm = \int (\alpha x + \beta y + \gamma z - p)^n dm.$$

Derselbe ist vom n^{ten} Grade für die Coordinaten α, β, γ, p der Ebene und kann durch Entwickelung von $(\alpha x + \beta y + \gamma z - p)^n$ zerlegt werden in folgende Summe von $\frac{(n+1).(n+2).(n+3)}{1.2.3}$ Gliedern:

$$\alpha^n \int x^n dm + n\alpha^{n-1}\beta \int x^{n-1} y\, dm + n\alpha^{n-1}\gamma \int x^{n-1} z\, dm - n\alpha^{n-1} p \int x^{n-1} dm$$

$$+ \frac{n.(n-1)}{1.2}\alpha^{n-2}\beta^2 \int x^{n-2} y^2 dm + n.(n-1)\alpha^{n-2}\beta\gamma \int x^{n-2} yz\, dm + \frac{n.(n-1)}{1.2}\alpha^{n-2}\gamma^2 \int x^{n-2} z^2 dm$$

$$- n.(n-1)\alpha^{n-2}\beta p \int x^{n-2} y\, dm - n.(n-1)\alpha^{n-2}\gamma p \int x^{n-2} z\, dm + \frac{n.(n-1)}{1.2}\alpha^{n-2} p^2 \int x^{n-2} dm$$

$$+ \frac{n.(n-1).(n-2)}{1.2.3}\alpha^{n-3}\beta^3 \int x^{n-3} y^3 dm + \cdots + n\gamma(-p)^{n-1} \int z\, dm + (-p)^n \int dm.$$

Hierin sind die Coefficienten der einzelnen Potenzen von α, β, γ, p als Constante zu betrachten, sobald das Massensystem und die Lage der drei Coordinatenaxen gegeben sind. Wir können sie eindeutig bestimmen, wenn für sie $\frac{(n+1).(n+2).(n+3)}{1.2.3}$ lineare und von einander unabhängige Gleichungen

gegeben sind; woraus folgt: *Das n^{te} Moment eines Massensystemes kann für jede Ebene des Raumes berechnet werden, sobald es für $\frac{(n+1).(n+2).(n+3)}{1.2.3}$ von einander unabhängige Ebenen bekannt ist.* Denn jede dieser Ebenen liefert uns eine solche lineare Gleichung. Wenn z. B. zwei Massensysteme gleiche Trägheitsmomente haben für zehn Ebenen, die nicht alle von einer und derselben Fläche zweiter Classe berührt werden, so haben sie für alle Ebenen (und Axen) des Raumes gleiche Trägheitsmomente.

6. Die Coordinaten aller Ebenen, für welche das n^{te} Moment $\int r^n dm$ einen gegebenen Werth M hat, müssen der homogenen Gleichung:

$$\int (\alpha x+\beta y+\gamma z-p)^n\, dm = M(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)^{\frac{n}{2}}$$

Genüge leisten. Ist n ungerade, so erheben wir beide Seiten auf das Quadrat, um rechts die irrationale Wurzel wegzuschaffen, und erhalten den Satz:

Alle Ebenen des Raumes, für welche das n^{te} Moment eines Massensystemes einen gegebenen Werth M hat, umhüllen im Allgemeinen eine Fläche n^{ter} oder $2n^{ter}$ Classe, je nachdem n gerade oder ungerade ist. Jede Ebene gehört einer einzigen solchen Fläche constanten n^{ten} Momentes an, und alle derartigen Flächen bilden eine Flächenschaar.

Form und Lage dieser Flächen sind nur abhängig von der Massenvertheilung, nicht aber von der Lage der Coordinatenaxen. — Der Satz erleidet scheinbar eine Ausnahme bei der homogenen Kugel, deren Flächen constanten n^{ten} Momentes concentrische Kugelflächen sind; aber in diesem und in ähnlichen Fällen lässt die obige Gleichung sich auf die Form $F^k=0$ bringen, worin F^k die k^{te} Potenz einer ganzen homogenen Function $\frac{n}{k}$ten oder $\frac{2n}{k}$ten Grades von α, β, γ, p bezeichnet, und jene Kugelflächen sind $k=\frac{n}{2}$ resp. $\frac{2n}{2}$ mal zu zählen. Als wirkliche Ausnahmen werden wir den Fall kennen lernen, in welchem jene Gleichung für alle Werthe der Ebenencoordinaten identisch erfüllt ist, und für ungerade n den Fall $M=0$.

7. Unter den Flächen constanten n^{ten} Momentes ist diejenige bemerkenswerth, für deren sämmtliche Berührungsebenen das n^{te} Moment gleich Null ist. Ihre Gleichung in Ebenencoordinaten lautet:

$$\int (\alpha x+\beta y+\gamma z-p)^n dm = 0;$$

ich nenne sie die *Nullfläche der n^{ten} Momente* oder kürzer *die n^{te} Nullfläche* des Massensystemes. *Sie ist für ein gerades wie für ein ungerades n von*

der n^{ten} Classe. Die Nullfläche der ersten oder statischen Momente reducirt sich auf den Schwerpunkt des Massensystemes; die zweite Nullfläche ist das oben (2.) erwähnte imaginäre Ellipsoid, wenn alle Massen positiv sind, und überhaupt eine reelle oder imaginäre Fläche zweiter Classe, wenn unter den Massen auch negative vorkommen. — Bekanntlich erhalten wir die erste Polarfläche des Unendlichen in Bezug auf die Fläche:

$$\int(\alpha x+\beta y+\gamma z-p)^n\,dm = M(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)^{\frac{n}{2}},$$

wenn wir deren Gleichung nach der Coordinate p differentiiren. Die Gleichung dieser Polarfläche ist also:

$$\int(\alpha x+\beta y+\gamma z-p)^{n-1}\,dm = 0;$$

d. h.: *Die ersten Polarflächen des Unendlichen in Bezug auf alle Flächen constanten n^{ten} Momentes fallen zusammen mit der $n-1^{ten}$ Nullfläche des Massensystemes.*

Dabei ist jedoch zu bemerken, dass für ein ungerades n diese Polarflächen eigentlich aus der $n-1^{\text{ten}}$ und der n^{ten} Nullfläche zusammengesetzt sind.

8. Für $n=2$ z. B. folgt hieraus: *Die Flächen constanten Trägheitsmomentes sind concentrisch; ihr gemeinschaftlicher Mittelpunkt ist der Schwerpunkt des Massensystemes.* Um die gegenseitige Lage dieser Flächen besser übersehen zu können, wählen wir die Hauptträgheitsaxen des Schwerpunktes zu Coordinatenaxen, so dass wir haben:

$$\int x\,dm=0,\quad \int y\,dm=0,\quad \int z\,dm=0,\quad \int yz\,dm=0,\quad \int zx\,dm=0,\quad \int xy\,dm=0;$$

die Gleichung einer Fläche constanten Trägheitsmomentes lautet dann:

$$\alpha^2\int x^2\,dm+\beta^2\int y^2\,dm+\gamma^2\int z^2\,dm+p^2\int dm = M(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2).$$

Für $M=0$ wird sie zur Gleichung der zweiten Nullfläche. Schreiben wir zur Vereinfachung:

$$\int dm=m,\quad \int x^2\,dm=m.a,\quad \int y^2\,dm=m.b,\quad \int z^2\,dm=m.c\quad \text{und}\quad M=m.\varrho,$$

so wird jene Gleichung zu der folgenden:

$$\alpha^2(\varrho-a)+\beta^2(\varrho-b)+\gamma^2(\varrho-c) = p^2;$$

und gehen wir endlich von den homogenen Ebenencoordinaten α, β, γ, p über zu den rechtwinkligen Coordinaten ξ, η, ζ des Berührungspunktes, so verwandelt sich dieselbe Gleichung in:

$$\frac{\xi^2}{\varrho-a}+\frac{\eta^2}{\varrho-b}+\frac{\zeta^2}{\varrho-c} = 1.$$

Die Flächen constanten Trägheitsmomentes sind also confocale Flächen zweiter Classe und Ordnung. Alle Ebenen, für welche das Trägheitsmoment den gegebenen Werth $M = m.\varrho$ hat, berühren eine Fläche zweiter Ordnung von den Halbaxen $\sqrt{\varrho - a}$, $\sqrt{\varrho - b}$ und $\sqrt{\varrho - c}$.

9. Die drei Hauptträgheitsebenen eines Punktes P, welche die Hauptträgheitsaxen von P paarweise verbinden, haben (wie mit Hülfe des Trägheitsellipsoides von P leicht erkannt wird; vgl. meine oben citirte Arbeit) u. A. die charakteristische Eigenschaft gegenüber allen anderen durch P gehenden Ebenen, dass in Bezug auf sie das Trägheitsmoment des Massensystemes ein Maximum oder Minimum ist. Daraus folgt sofort, dass sie mit den Berührungsebenen derjenigen drei zur Nullfläche confocalen Flächen zusammenfallen, welche in P sich rechtwinklig schneiden. Bei positiver Gesammtmasse des Systemes ist das Trägheitsmoment ein Maximum für die Berührungsebene des durch P gehenden Ellipsoides; denn jede benachbarte Ebene des Punktes P berührt ein anderes confocales Ellipsoid, welches dem Schwerpunkte näher liegt, für welches also $m.\varrho$ kleiner ist. Ebenso lässt sich zeigen, dass für die Berührungsebene des durch P gehenden zweischaligen Hyperboloides das Trägheitsmoment ein Minimum ist. Und für die Berührungsebene des einschaligen (geradlinigen) Hyperboloides ist das Trägheitsmoment als Maximum oder Minimum zu betrachten, je nachdem die benachbarten Ebenen, mit denen wir sie vergleichen, den einen oder den anderen der beiden Nebenwinkel schneiden, welche von den zwei in der Berührungsebene von P liegenden Geraden des Hyperboloides gebildet werden. Ohne weitere Rechnung folgt so der Satz: *Die Hauptträgheitsaxen jedes Punktes P fallen zusammen mit den Normalen derjenigen drei Flächen zweiter Ordnung, welche mit der Nullfläche der Trägheitsmomente confocal sind und sich in P rechtwinklig schneiden.* — Wir haben bei diesem Beispiele $n = 2$ stillschweigend angenommen, dass $\int dm$ von Null verschieden sei. Ist $\int dm = 0$, so hat das Massensystem keinen eigentlichen Schwerpunkt, sondern wie ein Magnet nur eine Axe, d. h. es existirt eine bestimmte Richtung, in welcher der Schwerpunkt unendlich fern liegt. Die sämmtlichen Flächen constanten Trägheitsmomentes werden alsdann confocale Paraboloide.

§. 2. Aequivalente und indifferente Massensysteme.

10. Es giebt unendlich viele Ebenen, für welche die n^{ten} Momente von zwei gegebenen Massensystemen m und m_1 gleiche Werthe erhalten. Die Coordinaten $(\alpha, \beta, \gamma, p)$ dieser Ebenen genügen der Gleichung:

$$\int (\alpha x + \beta y + \gamma z - p)^n \, dm \;=\; \int (\alpha x + \beta y + \gamma z - p)^n \, dm_1;$$

diese Ebenen gleicher n^{ter} Momente umhüllen also im Allgemeinen eine Fläche n^{ter} Classe. Denken wir uns in jedem Punkte (x, y, z) die dort vorhandene Masse dm des ersten Systemes vermindert um die ebendaselbst befindliche Masse dm_1 des zweiten, so erhalten wir ein drittes Massensystem $(m-m_1)$ als *Differenz* der beiden ersten; und die soeben erwähnte Fläche ist keine andere, als die n^{te} Nullfläche von $(m-m_1)$, deren Gleichung lautet:

$$\int (\alpha x + \beta y + \gamma z - p)^n \, d(m-m_1) \;=\; 0.$$

Nehmen wir die Massensysteme m und m_1 resp. a und a_1 mal, und setzen sie hernach zusammen zu einem dritten Systeme $(am+a_1 m_1)$ durch Addition der in denselben Punkten befindlichen Massen, so ergiebt sich aus den n^{ten} Momenten M und M_1 von m und m_1 in Bezug auf eine beliebige Ebene ohne Weiteres dasjenige $(aM+a_1 M_1)$ von $(am+a_1 m_1)$. Für $M = M_1 = 0$ folgt hieraus: *Jede Ebene, welche zwei von den n^{ten} Nullflächen der drei Massensysteme m, m_1 und $(am+a_1 m_1)$ berührt, muss auch die dritte berühren.* Durch passende Wahl der constanten Zahlen a und a_1 kann man bewirken, dass die Nullfläche von $(am+a_1 m_1)$ eine ganz beliebige Ebene des Raumes berührt; man braucht nur das n^{te} Moment $(aM+a_1 M_1)$ in Bezug auf diese Ebene gleich Null oder $a:a_1 = -M_1:M$ zu machen.

11. *Wenn die n^{ten} Nullflächen von zwei Massensystemen m und m_1 zusammenfallen, so sind die Momente n^{ten} und niedrigeren Grades von m und m_1 für alle Ebenen des Raumes den Gesammtmassen proportional.* So z. B. haben zwei Systeme von gleichen Gesammtmassen, deren Schwerpunkte zusammenfallen, gleiche statische Momente für jede Ebene des Raumes. Wir können nämlich (10.) aus m und m_1 ein drittes Massensystem $(m+km_1)$ zusammensetzen und k so bestimmen, dass das n^{te} Moment von $(m+km_1)$ für eine beliebige Ebene gleich Null wird. Die n^{te} Nullfläche von $(m+km_1)$ fällt dann zusammen mit derjenigen von m und m_1, weil sie (10.) mit dieser alle Berührungsebenen gemein hat; sie soll ausserdem eine ganz beliebige Ebene berühren. Dieser

Widerspruch lässt sich nur durch die Bemerkung heben, dass der allgemeine Satz (6.) hier eine Ausnahme erleidet, indem die Gleichung dieser Nullfläche:

$$\int(\alpha x+\beta y+\gamma z-p)^n d(m+km_1) = 0$$

durch Verschwinden der Coefficienten von α^n, $\alpha^{n-1}\beta$, $\alpha^{n-1}\gamma$, $\ldots$, γp^{n-1}, p^n erfüllt wird. Daraus folgt aber namentlich:

$$-k = \frac{\int x^n dm}{\int x^n dm_1} = \frac{-n.\int x^{n-1} dm}{-n.\int x^{n-1} dm_1} = \frac{\frac{n.(n-1)}{1.2}.\int x^{n-2} dm}{\frac{n.(n-1)}{1.2}.\int x^{n-2} dm_1} = \cdots = \frac{(-1)^n\int dm}{(-1)^n\int dm_1},$$

wodurch der Satz für die yz-Ebene bewiesen ist. Er gilt aber ebenso für jede andere Ebene, weil die yz-Ebene willkürlich im Raume angenommen werden kann. Beachtenswerth ist, dass auch:

$$-k = \frac{\int x^q y^r z^s dm}{\int x^q y^r z^s dm_1} = \frac{\int(\alpha x+\beta y+\gamma z-p)^n dm}{\int(\alpha x+\beta y+\gamma z-p)^n dm_1}$$

wird, wenn $q+r+s \leqq n$ und q, r, s positive Ganzzahlen sind. Diese Gleichungen behalten ihre Bedeutung, auch wenn die Gesammtmassen $\int dm$ und $\int dm_1$ Null sind; nur der Satz erleidet dann eine kleine Redactionsänderung.

12. *Für zwei Massensysteme, deren n^{te} Nullflächen zusammenfallen, sind also auch die beiden Schaaren von Flächen constanten n^{ten} oder niedrigeren Momentes identisch;* nur hat im Allgemeinen das eine Massensystem für die Berührungsebenen einer solchen Fläche ein anderes constantes Moment als das andere System. Wenn dieser und der vorhergehende Satz für die n^{ten} Momente gilt, so braucht er deshalb nicht für die $n+1^{ten}$ Momente richtig zu sein, wie man sofort beispielsweise für $n=1$ erkennt. Denn concentriren wir die Gesammtmasse eines Systemes im Schwerpunkte, so ändern wir dadurch die statischen Momente nicht; die Flächen constanten Trägheitsmomentes aber, welche vorher beliebige Flächen zweiter Ordnung waren, gehen in Kugelflächen über.

13. Zwei Massensysteme nenne ich *äquivalent hinsichtlich ihrer n^{ten} Momente,* wenn für jede Ebene des Raumes ihre n^{ten} Momente gleiche Werthe haben. Weil in diesem Falle ihre n^{ten} Nullflächen sich decken, so müssen sie (11.) auch hinsichtlich aller niedrigeren Momente äquivalent sein. *Zwei Massensysteme sind äquivalent hinsichtlich ihrer n^{ten} und niedrigeren Momente*

wenn sie identische n^{te} Nullflächen und gleiche Gesammtmassen haben (11.), oder auch wenn sie identische n^{te} Nullflächen und für irgend eine die Nullfläche nicht berührende Ebene gleiche n^{te} Momente haben. Ist also von einem Massensystem die n^{te} Nullfläche und ausserdem sein n^{tes} Moment für irgend eine die Nullfläche nicht berührende Ebene bekannt, so müssen sich daraus die n^{ten} und niedrigeren Momente für alle Ebenen des Raumes ergeben. — Ein Massensystem nenne ich *indifferent hinsichtlich seiner n^{ten} Momente,* wenn in Bezug auf jede Ebene des Raumes sein n^{tes} und folglich auch jedes niedrigere Moment gleich Null ist. Zwei Massensysteme sind äquivalent, wenn sie sich um ein indifferentes System unterscheiden; oder ein indifferentes Massensystem kann als Differenz von zwei äquivalenten Systemen betrachtet werden.

14. Wird z. B. zu einem beliebigen Massensysteme eine in seinem Schwerpunkt concentrirte Masse hinzufügt, welche der Gesammtmasse des Systemes gleichkommt, aber das entgegengesetzte Vorzeichen hat, so entsteht ein, hinsichtlich der statischen Momente indifferentes Massensystem. Dasselbe hat keinen Schwerpunkt, oder jeder Punkt kann, wenn man will, als sein Schwerpunkt betrachtet werden. — Concentrirt man in den acht Eckpunkten eines Parallelepipedons gleich grosse Massen von verschiedenen Vorzeichen, aber so, dass keine zwei auf derselben Kante liegende Massen gleiche Vorzeichen haben, so ist das n^{te} Moment dieses achtpunktigen Massensystemes Null für jede Ebene, die zu einer Kante parallel läuft; und daraus folgt, dass das System indifferent ist hinsichtlich seiner Trägheitsmomente. Werden seine vier negativen Massen mit entgegengesetztem Vorzeichen genommen, so sind dieselben den vier positiven Massen äquivalent hinsichtlich der statischen und der Trägheits-Momente. Die Gesammtmasse eines indifferenten Massensystemes ist immer Null.

15. Seien E und E_1 zwei parallele Ebenen, x und $x_1 = x - a$ ihre Abstände vom Massenelement dm, also a ihr gegenseitiger Abstand. Dann hängen die n^{ten} Momente des Massensystemes in Bezug auf E_1 und E durch folgende Gleichung von einander ab:

$$\int x_1^n\,dm \quad \text{oder} \quad \int (x-a)^n\,dm$$
$$= \int x^n\,dm - na\int x^{n-1}\,dm + \frac{n.(n-1)}{1.2}a^2\int x^{n-2}\,dm + \cdots + (-a)^n\int dm.$$

Die Integrale $\int x^n\,dm$, $\int x^{n-1}\,dm$, ... sind die Momente n^{ten} und niedrigeren Grades in Bezug auf E. Kennt man dieselben sowie den Abstand a, so ergiebt sich sofort das n^{te} Moment in Bezug auf E_1. Zugleich folgt:

Ein Massensystem, welches indifferent ist hinsichtlich seiner $n-1^{ten}$ Momente, hat gleiche n^{te} Momente in Bezug auf parallele Ebenen. Die n^{ten} Momente ändern sich nicht, wenn das System ohne Drehung verschoben wird; sie sind für alle Ebenen des Raumes bekannt, sobald sie für alle durch einen Punkt gehenden Ebenen gegeben sind.

Die n^{te} Nullfläche dieses Massensystemes reducirt sich auf eine unendlich ferne Curve n^{ter} Classe. So z. B. bilden zwei homogene concentrische Kugelschalen von entgegengesetzt gleichen Gesammtmassen zusammen ein Massensystem, dessen Trägheitsmoment für alle Ebenen des Raumes denselben Werth hat. Ist dieser Werth von Null verschieden, so reducirt sich die zweite Nullfläche auf den unendlich fernen imaginären Kreis. Da der obige Ausdruck für $\int (x-a)^n dm$ genau $n+1$ Glieder enthält, welche durch $n+1$ lineare Gleichungen eindeutig bestimmt werden können, so erhalten wir noch den nützlichen Satz: *Die Gesammtmasse eines Systemes sowie seine n^{ten} und niedrigeren Momente in Bezug auf alle Ebenen eines Parallel-Ebenenbüschels können berechnet werden, sobald die n^{ten} Momente für $n+1$ dieser Ebenen bekannt sind.*

16. Zwei Massensysteme, welche hinsichtlich ihrer $n-1^{ten}$ Momente äquivalent sind, und deren n^{te} Momente in Bezug auf jede durch einen Punkt P gehende Ebene gleiche Werthe haben, sind auch hinsichtlich ihrer n^{ten} Momente äquivalent; denn ihre Differenz ist nicht bloss hinsichtlich der $n-1^{ten}$, sondern (15.) auch hinsichtlich der n^{ten} Momente indifferent. Daraus folgt weiter: *Zwei Massensysteme, deren n^{te} und niedrigere Momente für jede durch einen Punkt P gehende Ebene gleiche Werthe haben, sind äquivalent hinsichtlich ihrer n^{ten} und niedrigeren Momente, wenn sie gleiche Gesammtmassen besitzen.* Sie haben nämlich denselben Schwerpunkt, also auch für alle Ebenen des Raumes gleiche statische Momente. Ihre Differenz ist folglich indifferent hinsichtlich der Trägheitsmomente und ebenso hinsichtlich der 3ten, 4ten, ... n^{ten} Momente, und der Satz ist bewiesen.

§. 3. Berechnung der n^{ten} und niedrigeren Momente eines Massensystemes mit Hülfe der n^{ten} Nullfläche.

17. In der obigen Gleichung (15.)

$$\int (x-a)^n dm = \int x^n dm - na\int x^{n-1} dm + \frac{n.(n-1)}{1.2} a^2 \int x^{n-2} dm + \cdots + (-a)^n \int dm$$

bezeichnen $\int x^n dm$ und $\int (x-a)^n dm$ die n^{ten} Momente eines Massensystemes in Bezug auf zwei parallele Ebenen E und E_1, und a den Abstand von E und E_1. Für n Werthe von a, nämlich für die Abscissen $a_1, a_2, a_3, \dots a_n$ der n Berührungsebenen, welche parallel zu E an die n^{te} Nullfläche gelegt werden können, wird $\int (x-a)^n dm = 0$; diese n Abscissen genügen also der Gleichung:

$$0 = a^n \int dm - n a^{n-1} \int x\, dm + \frac{n.(n-1)}{1.2} a^{n-2} \int x^2 dm - + \cdots$$
$$\cdots + n a (-1)^{n-1} \int x^{n-1} dm + (-1)^n \int x^n dm,$$

woraus für ihr Product ohne Weiteres sich ergiebt:

$$a_1 a_2 a_3 \dots a_n = \frac{\int x^n dm}{\int dm} \quad \text{oder} \quad \int x^n dm = a_1 a_2 a_3 \dots a_n \int dm.$$

D.h.: *Man findet das n^{te} Moment eines Massensystemes in Bezug auf eine beliebige Ebene E, wenn man die Gesammtmasse multiplicirt mit den Abständen der Ebene von den n ihr parallelen Berührungsebenen der n^{ten} Nullfläche.*

Das Product dieser Abstände ist, wie man weiss, immer reell, auch wenn dieselben theilweise oder alle imaginär sind. Auch die folgenden, ebenso sich ergebenden Gleichungen zwischen $a_1, a_2, \dots a_n$:

$$\int x\, dm = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \int dm; \quad \int x^2 dm = \frac{1.2(a_1 a_2 + \cdots + a_{n-1} a_n)}{n.(n-1)} \int dm,$$

u. s. w., durch welche die Momente niederen Grades für die Ebene E bestimmt sind, lassen sich leicht in Worte kleiden; z. B.:

Der Abstand des Schwerpunktes von einer Ebene E ist gleich dem arithmetischen Mittel aus den Abständen der n zu E parallelen Berührungsebenen der n^{ten} Nullfläche.

18. Ist die Gesammtmasse $\int dm = 0$, so wird eine Wurzel der in (17.) aufgestellten Gleichung n^{ten} Grades, etwa a_n, unendlich gross, und die n^{te} Nullfläche wird von der unendlich fernen Ebene berührt. Die Abscissen $a_1, a_2, \dots a_{n-1}$ der übrigen $n-1$ zu E parallelen Berührungsebenen genügen dann der Gleichung:

$$0 = n a^{n-1} \int x\, dm - \frac{n.(n-1)}{1.2} a^{n-2} \int x^2 dm + - \cdots + (-1)^{n-1} \int x^n dm,$$

woraus sich ergiebt:

$$\int x^n\,dm = a_1 a_2 \ldots a_{n-1} n \int x\,dm,\quad \int x^2\,dm = \frac{2}{n-1}(a_1+a_2+\cdots+a_{n-1})\int x\,dm,$$

u. s. w.; hieraus lassen sich wieder alle Momente bezüglich der Ebene E berechnen, sobald eines derselben sowie die n^{te} Nullfläche bekannt ist. Zu ähnlichen Gleichungen gelangt man, wenn auch $\int x\,dm = 0$ ist, u. s. w.

19. Wir können die z-Axe des Coordinatensystemes als eine beliebige Gerade des Raumes betrachten. Sei durch dieselbe irgend eine Ebene E gelegt, welche mit der yz-Ebene den Winkel φ bilde. Dann sind die Coordinaten von E:

$$\alpha = \cos\varphi,\quad \beta = \sin\varphi,\quad \gamma = 0,\quad p = 0,$$

und für das n^{te} Moment in Bezug auf E ergiebt sich der Ausdruck:

$$\int(\cos\varphi\,.\,x + \sin\varphi\,.\,y)^n\,dm$$

$$= \sin^n\varphi\left\{\operatorname{cotg}^n\varphi\int x^n\,dm + n\operatorname{cotg}^{n-1}\varphi\int x^{n-1}y\,dm + \cdots + \int y^n\,dm\right\}\cdot$$

Seien $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots \varphi_n$ diejenigen n Werthe von φ, für welche E zur Berührungsebene der n^{ten} Nullfläche wird, für welche also dieses n^{te} Moment verschwindet. Dann lässt sich die rechte Seite unserer Gleichung verwandeln in:

$$\sin^n\varphi(\operatorname{cotg}\varphi - \operatorname{cotg}\varphi_1)(\operatorname{cotg}\varphi - \operatorname{cotg}\varphi_2)\ldots(\operatorname{cotg}\varphi - \operatorname{cotg}\varphi_n)\int x^n\,dm,$$

woraus sich durch Vergleichung folgende Beziehungen ergeben:

$$\int x^{n-1}y\,dm = -\frac{1}{n}(\operatorname{cotg}\varphi_1 + \operatorname{cotg}\varphi_2 + \cdots + \operatorname{cotg}\varphi_n)\int x^n dm,$$

$$\int x^{n-2}y^2 dm = \frac{1.2}{n.(n-1)}(\operatorname{cotg}\varphi_1\operatorname{cotg}\varphi_2 + \operatorname{cotg}\varphi_1\operatorname{cotg}\varphi_3 + \cdots + \operatorname{cotg}\varphi_{n-1}\operatorname{cotg}\varphi_n)\int x^n dm,$$

. . . .

$$\int y^n\,dm \quad = (-1)^n\operatorname{cotg}\varphi_1\operatorname{cotg}\varphi_2\ldots\operatorname{cotg}\varphi_n\int x^n dm.$$

Das n^{te} Moment in Bezug auf die Ebene E nimmt zugleich die Form an:

$$\int(\cos\varphi\,.\,x + \sin\varphi\,.\,y)^n dm = \frac{\sin(\varphi_1-\varphi)\sin(\varphi_2-\varphi)\ldots\sin(\varphi_n-\varphi)}{\sin\varphi_1\sin\varphi_2\ldots\sin\varphi_n}\int x^n dm.$$

Das n^{te} Moment kann hiernach für jede durch eine Axe gelegte Ebene berechnet werden, sobald es für eine solche Ebene bekannt ist, und ausserdem die n durch die Axe gehenden Berührungsebenen der n^{ten} Nullfläche gegeben sind. Wir können diesen Satz mit Rücksicht auf (17.) und (18.) zu folgendem erweitern (vgl. auch 13.):

Die n^{ten} und niedrigeren Momente eines Massensystemes können für alle Ebenen des Raumes berechnet werden, sobald die n^{te} Nullfläche bekannt ist und ausserdem das n^{te} Moment für irgend eine Ebene, welche die Nullfläche nicht berührt.

Denn jede andere Ebene schneidet die gegebene in einer Axe, durch welche wir n Berührungsebenen an die Nullfläche legen, um diesen Fall auf den schon erledigten zurückzuführen.

20. Verbinden wir die letzte Gleichung mit derjenigen für $\int x^n dm$ in (17.), so erhalten wir, falls $\int dm \gtrless 0$ ist, einen geometrischen Satz, welcher allgemein für Flächen n^{ter} Classe also lautet:

Die Producte aus den Abständen zweier Ebenen von den zu ihnen parallelen Berührungsebenen einer Fläche n^{ter} Classe verhalten sich zu einander wie die Producte aus den Sinus der Winkel, welche die Ebenen mit den durch ihre Schnittlinie gehenden Berührungsebenen der Fläche bilden.

Derselbe gilt für jede algebraische Fläche, welche nicht von der unendlich fernen Ebene berührt wird und keine Kegelfläche ist, und man überzeugt sich davon leicht, wenn man von der homogenen Gleichung der Fläche in Ebenencoordinaten α, β, γ, p ausgeht und im Uebrigen den oben eingeschlagenen Weg verfolgt. Ist nämlich $F(\alpha, \beta, \gamma, p)$ eine ganze homogene Function n^{ten} Grades von den Ebenencoordinaten α, β, γ, p, so nimmt dieselbe für jede Ebene des Raumes einen bestimmten Werth an, welchen wir etwa das *Gewicht* der Ebene nennen können. Alle Ebenen vom Gewichte Null umhüllen eine Fläche, deren Gleichung:

$$F(\alpha, \beta, \gamma, p) = 0$$

ist; dieselbe kann als eine beliebige Fläche n^{ter} Classe betrachtet werden und mag die *Nullfläche der Function F* heissen. Die Gewichte aller Ebenen des Raumes hängen nun von einander und von dieser Nullfläche ebenso ab, wie die n^{ten} Momente eines Massensystemes von einander und von der n^{ten} Nullfläche des Systemes. Betrachten wir die Nullfläche der Function F als n^{te} Nullfläche eines Massensystemes, setzen wir ferner das n^{te} Moment in Bezug auf eine beliebige Ebene gleich dem Gewichte dieser Ebene, und berechnen wir daraus nach den Gleichungen (19.) die n^{ten} Momente für alle anderen Ebenen, so finden wir dieselben gleich den Gewichten dieser Ebenen. Diese Uebereinstimmung drängt uns die Frage auf: *Kann jede homogene Function*

n^{ten} Grades der vier Variabeln α, β, γ, p auf die Form $\int(\alpha x+\beta y+\gamma z-p)^n dm$ gebracht werden? oder was auf das Gleiche hinauskommt: *Kann jede Fläche n^{ter} Classe als n^{te} Nullfläche eines Massensystemes betrachtet werden?* Wird nämlich die letztere Frage bejaht, so braucht man nur alle Massen des Systemes mit einer leicht zu ermittelnden Constanten zu multipliciren, um das n^{te} Moment für jede Ebene des Raumes gleich dem durch die Function bestimmten Gewichte der Ebene zu machen. Wir werden diese Fragen zugleich mit den in der Einleitung aufgeworfenen in bejahendem Sinne lösen.

§. 4. Momente eines Massensystemes in Bezug auf Ebenengruppen.

21. Sind r, r_1, r_2, ... r_k die Abstände des Masseneléments dm von den $k+1$ willkürlich angenommenen Ebenen E, E_1, E_2, ... E_k, und sind i, i_1, i_2, ... i_k positive ganze Zahlen, deren Summe gleich n ist, so nenne ich das über das ganze Massensystem ausgedehnte Integral:

$$\int r^i r_1^{i_1} r_2^{i_2} \dots r_k^{i_k} dm$$

ein n^{tes} *Moment des Massensystemes in Bezug auf jene Ebenengruppe.* Ist:

$$\alpha_\nu x+\beta_\nu y+\gamma_\nu z-p_\nu = 0$$

die Gleichung der Ebene E_ν, so können wir dieses Moment auch schreiben:

$$\int(\alpha x+\beta y+\gamma z-p)^i (\alpha_1 x+\beta_1 y+\gamma_1 z-p_1)^{i_1} \dots (\alpha_k x+\beta_k y+\gamma_k z-p_k)^{i_k} dm.$$

Entwickeln wir dieses Integral nach Potenzen der Ebenencoordinaten α, β, γ, p, α_1, β_1, ... γ_k, p_k, so enthalten die Coefficienten wieder wie oben (5.) die Integrale:

$$\int x^n dm, \int x^{n-1} y\, dm, \int x^{n-1} z\, dm, \int x^{n-1} dm, \int x^{n-2} y^2 dm, \int x^{n-2} yz\, dm, \dots \int z\, dm, \int dm.$$

Da diese für zwei äquivalente Massensysteme gleiche Werthe haben (11. und 13.), so ergiebt sich: *Zwei Massensysteme, welche hinsichtlich ihrer n^{ten} Momente äquivalent sind, haben auch in Bezug auf jede Ebenengruppe gleiche n^{te} und niedrigere Momente.* Das n^{te} Moment in Bezug auf *eine* Ebene ist ein specieller Fall des Momentes in Bezug auf eine Ebenengruppe; wir erhalten das erstere, wenn wir alle Ebenen der Gruppe zusammenfallen lassen.

22. Halten wir die Ebenen E_1, E_2, ... E_k fest, so nimmt das n^{te} Moment:

$$\int r^i r_1^{i_1} r_2^{i_2} \dots r_k^{i_k} dm$$

für jede Lage der Ebene E einen bestimmten Werth an. *Wir können dasselbe ansehen als das i^{te} Moment eines neuen Massensystemes in Bezug auf E;* dasselbe entsteht aus dem gegebenen Systeme, wenn wir jedes Massenelement im Verhältniss von $r_1^{i_1} r_2^{i_2} \dots r_k^{i_k}$ zu eins vergrössern. Die Gleichung:

$$\int r^i r_1^{i_1} r_2^{i_2} \dots r_k^{i_k}\, dm = 0$$

repräsentirt also, wenn sie nicht für jede Lage der Ebene E identisch erfüllt ist, eine Fläche i^{ter} Classe, nämlich die i^{te} Nullfläche des neuen Massensystemes; dieselbe reducirt sich für $i = 1$ auf einen Punkt. Wie sie mit der n^{ten} Nullfläche des gegebenen Massensystemes zusammenhängt, lehrt der Satz (vgl. 23.):

Die Fläche i^{ter} Classe:

$$\int (\alpha x + \beta y + \gamma z - p)^i (\alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 z - p_1)^{n-i}\, dm = 0,$$

in deren Gleichung α, β, γ, p veränderliche und α_1, β_1, γ_1, p_1 gegebene Ebenencoordinaten bezeichnen, ist die $n-i^{te}$ Polare der festen Ebene $E_1(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, p_1)$ in Bezug auf die n^{te} Nullfläche des Massensystemes. Ebenso ist die Fläche i^{ter} Classe:

$$\int r^i r_1^{i_1} r_2^{i_2} \dots r_k^{i_k}\, dm = 0$$

die $n-i^{te}$ gemischte Polare der festen Ebenen E_1, E_2, ... E_k in Bezug auf dieselbe Nullfläche, wenn $i_1 + i_2 + \dots + i_k = n - i$ ist.

Alle diese Polarflächen sind, wie die n^{te} Nullfläche selbst, durch das Massensystem bestimmt; sie sind identisch dieselben bei zwei äquivalenten Systemen. Aus der Form ihrer Gleichungen fliesst sofort der bekannte Satz: *Wenn eine Ebene E die $n-i^{te}$ Polare der Ebene E_1 berührt, so berührt E_1 die i^{te} Polare der Ebene E.*

23. Wenn $F(\alpha, \beta, \gamma, p) = 0$ die homogene Gleichung einer Fläche n^{ter} Classe in Ebenencoordinaten ist, so erhalten wir allgemein für die erste Polare einer festen Ebene $E_1(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, p_1)$ in Bezug auf diese Fläche die Gleichung:

$$\frac{\alpha_1}{n} \cdot \frac{dF}{d\alpha} + \frac{\beta_1}{n} \cdot \frac{dF}{d\beta} + \frac{\gamma_1}{n} \cdot \frac{dF}{d\gamma} + \frac{p_1}{n} \cdot \frac{dF}{dp} = 0.$$

Die linke Seite dieser Gleichung ist eine homogene Function $n-1^{ten}$ Grades von α, β, γ, p; sie ist Null für die Coordinaten jeder Ebene E, welche die erste Polare von E_1 berührt, und erhält für jede andere Ebene E einen von Null verschiedenen Werth, welchen wir als ein *Gewicht* des Ebenenpaares

E, E_1 betrachten können. Fällt E mit E_1 zusammen, so wird wegen einer bekannten Eigenschaft der homogenen Functionen dieses Gewicht gleich demjenigen, welches die Function $F(\alpha, \beta, \gamma, p)$ der Ebene E_1 ertheilt, nämlich gleich $F(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, p_1)$. Bezeichnen wir die linke Seite der obigen Polarengleichung zur Abkürzung mit F_1, so leiten wir mit Benutzung einer festen Ebene $E_2(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2, p_2)$ aus dieser Function ein dritte $F_{1,2}$ folgendermassen ab:

$$F_{1,2} = \frac{\alpha_2}{n-1} \cdot \frac{dF_1}{d\alpha} + \frac{\beta_2}{n-1} \cdot \frac{dF_1}{d\beta} + \frac{\gamma_2}{n-1} \cdot \frac{dF_1}{d\gamma} + \frac{p_2}{n-1} \cdot \frac{dF_1}{dp}.$$

Die Gleichung $F_{1,2} = 0$ repräsentirt die gemischte zweite Polare des Ebenenpaares E_1, E_2 in Bezug auf die Fläche $F = 0$. Wir erhalten diese zweite Polare, wenn wir zu der Fläche $F = 0$ die erste Polare von *irgend einer* der Ebenen E_1 und E_2 bestimmen und sodann in Bezug auf diese Polare wieder die erste Polare der anderen Ebene aufsuchen; denn es ist $F_{1,2} = F_{2,1}$, d. h. die Function $F_{1,2}$ ändert sich nicht, wenn wir α_1, β_1, γ_1, p_1 mit respective α_2, β_2, γ_2, p_2 vertauschen. Setzen wir in $F_{1,2}$ die Coordinaten α, β, γ, p einer beliebigen Ebene E ein, so erhalten wir einen Werth, welchen wir als ein *Gewicht* der Ebenengruppe E, E_1, E_2 ansehen wollen, und welcher gleich $F(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, p_1)$ wird, wenn E und E_2 mit E_1 zusammenfallen. Durch Fortsetzung dieser Betrachtungen gelangt man zu den sämmtlichen Polaren von beliebigen Ebenengruppen in Bezug auf die Fläche $F(\alpha, \beta, \gamma, p) = 0$, sowie zu dem Begriffe des Gewichtes einer beliebigen Ebenengruppe, und man überzeugt sich leicht, dass diese Gewichte und jene Polaren ganz ebenso von einander abhängen, wie die n^{ten} Momente und alle verschiedenen Nullflächen eines Massensystemes.

24. Um die in (2.) und in (20.) aufgeworfenen Fragen gleichzeitig lösen zu können, wollen wir uns die n^{ten} Momente eines Massensystemes nicht durch die Massenvertheilung selbst, sondern durch die Gewichte gegeben denken, welche mittelst einer ganzen homogenen Function n^{ten} Grades $F(\alpha, \beta, \gamma, p)$ den sämmtlichen Ebenen und Ebenengruppen des Raumes beigelegt werden, oder was auf dasselbe hinauskommt, durch die n^{te} Nullfläche und das n^{te} Moment in Bezug auf eine beliebige Ebene (19.). Gelingt es uns dann, eine begrenzte Anzahl von Massenpunkten der Lage und Masse nach so zu bestimmen, dass ihre n^{ten} Momente für alle Ebenen des Raumes gleich den so gegebenen werden, auch wenn die gegebene Nullfläche eine ganz beliebige Fläche n^{ter} Classe ist, so sind jene Probleme nach Wunsch gelöst. Dabei wird uns der folgende, auch für Gewichte von Ebenengruppen gültige Satz gute Dienste leisten:

25. *Wenn das* n^{te} *Moment* $\int r r_1 r_2 \dots r_{n-1} dm$ *in Bezug auf eine bewegliche Ebene* E *und* $n-1$ *feste Ebenen* $E_1, E_2, \dots E_{n-1}$ *für vier, nicht durch einen Punkt gehende Lagen von* E *bekannt ist, so kann es für jede beliebige Lage von* E *berechnet werden; ist es bekannt für zwei in einer Geraden* g *oder für drei in einem Punkte* P *sich schneidende Lagen von* E*, so kann es für jede durch* g *resp.* P *gehende Lage von* E *berechnet werden.*

Für eine beliebige Lage von E ist nämlich $r = \alpha x + \beta y + \gamma z - p$, so dass wir für das n^{te} Moment den Ausdruck erhalten:

$$\alpha \int x r_1 r_2 \dots r_{n-1} dm + \beta \int y r_1 r_2 \dots r_{n-1} dm + \gamma \int z r_1 r_2 \dots r_{n-1} dm - p \int r_1 r_2 \dots r_{n-1} dm.$$

Zur Bestimmung der hierin vorkommenden Integrale genügt es aber, wenn wir die Werthe dieses Momentes für vier von einander unabhängige Werthensysteme der Ebenencoordinaten α, β, γ, p kennen. Soll E durch einen Punkt P gehen, dessen Coordinaten x', y', z' sind, so muss die Gleichung:

$$\alpha x' + \beta y' + \gamma z' - p = 0$$

erfüllt sein, und das n^{te} Moment in Bezug auf die n Ebenen wird gleich:

$$\alpha \int (x - x') r_1 r_2 \dots r_{n-1} dm + \beta \int (y - y') r_1 r_2 \dots r_{n-1} dm + \gamma \int (z - z') r_1 r_2 \dots r_{n-1} dm.$$

Ist der Werth dieser Summe für drei von einander unabhängige Werthensysteme von α, β, γ bekannt, so können wir die drei Integrale eindeutig bestimmen. Der auf die Gerade g bezügliche Theil des Satzes ergiebt sich ebenso aus der Bemerkung, dass die Gleichung einer durch g oder durch zwei Punkte von g gelegten Ebene nur zwei von einander unabhängige Ebenencoordinaten enthält. *Wenn also die* n^{ten} *Momente von zwei verschiedenen Massensystemen in Bezug auf jene* n *Ebenen gleichwerthig sind für zwei, drei oder vier von einander unabhängige Lagen der beweglichen Ebene* E*, so sind sie auch gleichwerthig für alle durch eine bestimmte Gerade oder einen bestimmten Punkt gehenden oder aber für alle beliebigen Lagen von* E. Dabei ist zu beachten, dass von den festen Ebenen $E_1, E_2, \dots E_{n-1}$ beliebig viele auf einander liegen dürfen.

§. 5. Anwendung auf die Trägheitsmomente.

26. Wir können hieraus einen neuen, sehr einfachen Beweis des in der Einleitung erwähnten Satzes ableiten: *Ein Massensystem* m *kann hinsichtlich seiner Trägheitsmomente auf unendlich viele Arten durch vier Massen-*

punkte ersetzt werden; dieselben bilden ein beliebiges Poltetraeder der zweiten Nullfläche von m. Ist der erste Theil dieses Satzes richtig, so ergiebt sich daraus der zweite Theil; denn ein vierpunktiges Massensystem ist immer ein Poltetraeder seiner eigenen zweiten Nullfläche, weil die erste Polare einer durch drei jener Massenpunkte gelegten Ebene in Bezug auf die zweite Nullfläche sich auf den vierten Punkt reducirt (22.). Wir wollen uns die Trägheitsmomente von m nicht durch die Massenvertheilung, sondern (24.) durch eine willkürliche homogene Function zweiten Grades der Ebenencoordinaten α, β, γ, p gegeben denken. Obgleich dann noch zu beweisen ist, dass zu diesen Trägheitsmomenten ein sie bedingendes reelles Massensystem wirklich existirt, so will ich mir der Bequemlichkeit wegen doch gestatten, von einem *gegebenen* Massensystem m zu reden, dessen Trägheitsmomente eben die gegebenen sind.

27. Seien nun 1, 2, 3, 4 die Eckpunkte irgend eines Poltetraeders der zweiten Nullfläche von m, sei i ein beliebiger dieser Punkte und m_i die ihm beizulegende, noch unbekannte Masse, sei endlich E_i die durch die übrigen drei Punkte gehende Ebene. Dann bestimmen wir m_i so, dass ihr Trägheitsmoment in Bezug auf ein aus E_i und einer beliebigen Ebene E bestehendes Ebenenpaar demjenigen von m in Bezug auf dasselbe Ebenenpaar gleich wird. Da nun auch für drei beliebig durch den Punkt i gehende Lagen der Ebene E die Trägheitsmomente der vier Massenpunkte und des gegebenen Systemes gleichwerthig (nämlich Null) sind in Bezug auf das Ebenenpaar E, E_i, so haben sie für jede beliebige Lage der Ebene E gleiche Werthe (25.). Die vier so berechneten Massen m_1, m_2, m_3, m_4 haben also für jedes Ebenenpaar E, E_i, dessen eine Ebene E ganz beliebig ist, während die andere E_i mit einer oder der anderen Fläche des Massentetraeders zusammenfällt, dasselbe Trägheitsmoment wie das Massensystem m. Daraus aber folgt (25.), dass für *jedes* willkürlich angenommene Ebenenpaar die Trägheitsmomente von (m_1, m_2, m_3, m_4) und von m gleichwerthig und somit beide Massensysteme wirklich aequivalent sind. — Durch drei Punkte kann ein Massensystem hinsichtlich seiner Trägheitsmomente nur dann ersetzt werden, wenn seine zweite Nullfläche sich auf eine in der Ebene dieser Punkte liegende Curve zweiter Classe reducirt. Jeder ausserhalb dieser Ebene liegende Punkt des Raumes kann bei einem derartigen Massensysteme als erste Polare der Ebene in Bezug auf die zweite Nullfläche angesehen werden (22.); doch wird die ihm beizulegende Masse Null, wenn er als Eckpunkt des Massentetraeders gewählt wird.

28. Die Grösse der Massen, welche den vier Punkten 1, 2, 3, 4 beizulegen sind, lässt sich weniger leicht aus der obigen Rechnung übersehen, als wenn wir die zweite Nullfläche zu Hülfe nehmen. Ich will zunächst voraussetzen, dieselbe habe einen Mittelpunkt S, der dann (8.) zugleich Schwerpunkt des Massensystemes sein muss; die Gesammtmasse m des gegebenen Systemes ist in diesem Falle von Null verschieden (vgl. 9. u. 14.). Sei x_1 der Abstand des Punktes 1 vom Schwerpunkte S, sei x_0 die zwischen S und der Ebene $\overline{234}$ liegende Strecke der Geraden $S1$ und a der auf $S1$ liegende Halbmesser der zweiten Nullfläche. Wegen der harmonischen Theilung des Durchmessers $2a$ ist dann:

$$x_0 . x_1 = a^2;$$

ferner ist für eine durch S parallel zu $\overline{234}$ gelegte Ebene das statische Moment des Massentetraeders (m_1, m_2, m_3, m_4) gleich Null, also:

$$m_1 x_1 + (m_2 + m_3 + m_4) x_0 = 0 \quad \text{oder} \quad m_1 x_1 = (m_1 - m) x_0.$$

Eliminiren wir x_0, so ergiebt sich:

$$\frac{x_1^2}{a^2} = \frac{m_1 - m}{m_1} \quad \text{oder} \quad m_1 = m \cdot \frac{a^2}{a^2 - x_1^2}.$$

Die erste dieser beiden Gleichungen lehrt uns: *Ist von einem der vier Punkte die Masse m_1 gegeben, so liegt derselbe auf einer zur zweiten Nullfläche ähnlichen und mit ihr concentrisch und ähnlich liegenden Fläche zweiter Ordnung;* homologe Sehnen dieser beiden ähnlichen Flächen verhalten sich wie $\sqrt{m_1 - m} : \sqrt{m_1}$. Aus der zweiten Gleichung berechnen wir die Masse m_1, wenn ihre Lage gegeben ist; auch folgt aus derselben: *Die einem Tetraederpunkte 1 beizulegende Masse m_1 hat das entgegengesetzte oder das gleiche Vorzeichen wie die Gesammtmasse m, je nachdem 1 durch die zweite Nullfläche vom Schwerpunkte getrennt ist oder nicht.* Nämlich im ersten Falle ist $x_1 > a$; im zweiten entweder a imaginär oder $x_1 < a$.

29. Ist die zweite Nullfläche ein Paraboloid, also ohne Mittelpunkt, so ist die Gesammtmasse $m = 0$ (9.), wie sich auch mit Hülfe der zu $\overline{234}$ parallelen Berührungsebene des Paraboloides zeigen lässt. Nämlich diese Ebene halbirt den Abstand d der Ebene $\overline{234}$ und ihres Poles 1; und da in Bezug auf dieselbe das Trägheitsmoment der vier Massen Null sein soll, so folgt:

$$m_1 \frac{d^2}{4} + (m_2 + m_3 + m_4) \frac{d^2}{4} = 0 \quad \text{oder} \quad m_1 + m_2 + m_3 + m_4 = 0.$$

Bei Berechnung der Grösse von m_1 kommt wesentlich das statische Maximal-

moment M des Systemes (vergleichbar dem magnetischen Moment eines Magneten*)) in Betracht. Ist nämlich l die zwischen 1 und der Ebene $\overline{234}$ liegende Strecke eines Durchmessers des Paraboloides, so ist m_1 aus der Gleichung:

$$m_1 . l = M$$

zu berechnen; dabei wird m_1 positiv oder negativ, je nachdem der Punkt 1 auf der einen oder der anderen Seite des Paraboloides liegt. *Ist die Masse* m_1 *gegeben, so liegt der Punkt 1 auf einem Paraboloide, welches mit der gegebenen zweiten Nullfläche durch eine zu den Durchmessern parallele Verschiebung um die Länge* $\frac{l}{2}$ *zusammenfällt;* dieses ergiebt sich aus der Gleichung $m_1 . l = M$ und einer schon vorhin angeführten Eigenschaft des Paraboloides.

30. Den ganz speciellen Fall, in welchem das Massensystem keinen Schwerpunkt besitzt (14.), können wir auf den allgemeinen zurückführen, indem wir das System durch Hinzufügung eines beliebigen Massenpunktes verändern. Auf diese Art ergiebt sich, dass dieses besondere System hinsichtlich seiner Trägheitsmomente durch fünf Punkte mit der Gesammtmasse Null ersetzt werden kann; jeder derselben ist der Schwerpunkt der übrigen vier, von zweien kann die Lage, von einem zugleich die Masse willkürlich angenommen werden. Da in diesem Falle die zweite Nullfläche sich auf eine unendlich ferne Curve zweiter Classe reducirt (15.), so können wir das System auch durch *drei unendlich ferne* Punkte ersetzen, deren Massen aber unendlich klein von der zweiten Ordnung werden. Diese drei Punkte bilden ein Poldreieck der unendlich fernen Curve, und auf sie reduciren sich die vorhin genannten fünf Massen, wenn zwei derselben zusammenfallen; denn letztere heben sich gegenseitig auf.

31. Wir dachten uns oben die Trägheitsmomente des Massensystemes m durch eine beliebige ganze homogene Function zweiten Grades der Ebenencoordinaten α, β, γ, p gegeben, und haben das Resultat gewonnen, dass sich zu denselben immer ein Massensystem von vier oder weniger Punkten construiren lässt, welches diese gegebenen Trägheitsmomente besitzt. Sind x_i, y_i, z_i die Coordinaten des Massenpunktes m_i, so lassen sich also diese Trägheitsmomente auch darstellen durch die viergliedrige Summe:

$$\sum_{i=1,2,3,4} (\alpha x_i + \beta y_i + \gamma z_i - p)^2 . m_i;$$

*) Vergl. *Gauss*, Intensitas vis magneticae terrestris ad mensuram absolutam revocata.

d. h.: *Jede ganze homogene Function zweiten Grades der vier Ebenencoordinaten α, β, γ, p lässt sich auf unendlich viele Arten als Summe von vier reellen Quadraten darstellen. Setzen wir diese Quadrate einzeln gleich Null, so erhalten wir die Gleichungen von vier Punkten, welche ein beliebiges Poltetraeder der Nullfläche jener Function bilden.*

Aus der gegenseitigen Lage eines solchen Quadrupels harmonischer Punkte ergiebt sich ferner auf Grund der Bemerkungen von (28.) und (29.):

Die vier Quadrate haben nur dann gleiche Vorzeichen, wenn die Nullfläche der gegebenen Function imaginär ist; im andern Falle haben ein oder zwei Quadrate das entgegengesetzte Vorzeichen der übrigen drei resp. zwei, je nachdem die Nullfläche keine oder unendlich viele Gerade enthält. Wenn sich die Nullfläche auf eine Curve zweiter Classe oder auch auf zwei Punkte reducirt, so fallen ein resp. zwei von den vier Quadraten weg. Nur in dem einzigen Falle, wenn die Nullfläche in eine unendlich ferne Curve ausartet, reichen wir mit vier endlichen Quadraten nicht aus, wohl aber mit fünf.

Ich glaubte jenen längst bekannten Satz von der Zerlegung einer quaternären quadratischen Form in vier Quadrate hier nicht unterdrücken zu sollen, weil er sich durch unsere Betrachtungen auf eine sehr einfache und anschauliche Art ergiebt.

§. 6. Massensysteme, deren n^{te} Nullfläche sich auf eine ebene Curve oder insbesondere auf n Punkte einer Geraden reducirt.

32. Die n^{te} Nullfläche reducirt sich auf eine ebene Curve n^{ter} Classe, wenn das Massensystem ganz in der Ebene dieser Curve enthalten ist, allgemeiner aber, wenn es sich von einem ebenen Massensystem unterscheidet um ein, hinsichtlich der n^{ten} Momente indifferentes System. Der Betrachtung dieser besonderen Systeme schicke ich einen Satz über die Flächen n^{ter} Classe voraus. Wir wissen, dass die $n-1^{\text{te}}$ Polare einer festen Ebene $E_1(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, p_1)$ in Bezug auf eine solche Fläche F allemal eine Fläche erster Classe ist (vgl. 23), sich also auf einen Punkt reducirt; auch darf ich als bekannt voraussetzen, dass dieser Punkt nur dann auf der Ebene E_1 liegt, wenn E_1 eine Berührungsebene der Fläche F n^{ter} Classe ist, und zwar fällt er alsdann mit dem Berührungspunkte zusammen. Ich behaupte nun:

Sind $F=0$, $G=0$ und $F+G=0$ die Gleichungen der Nullflächen von drei homogenen Functionen n^{ten} Grades der Ebenencoordinaten α, β,

γ, p, von denen die dritte gleich der Summe der beiden ersten ist, so liegen die $n-1^{ten}$ Polaren jeder beliebigen Ebene hinsichtlich dieser drei Nullflächen allemal in einer Geraden.

Es seien nämlich:

$$\alpha F_1+\beta F_2+\gamma F_3-pF_4 = 0$$

und

$$\alpha G_1+\beta G_2+\gamma G_3-pG_4 = 0$$

die Gleichungen dieser $n-1^{ten}$ Polaren in Bezug auf die Flächen $F=0$ und $G=0$, so folgt aus dem Bildungsgesetz dieser Gleichungen (mittelst Differentiation von F und G (23.)), dass wir für die $n-1^{te}$ Polare bezüglich der dritten Nullfläche die Gleichung erhalten müssen:

$$\alpha(F_1+G_1)+\beta(F_2+G_2)+\gamma(F_3+G_3)-p(F_4+G_4) = 0.$$

Wenn also die Coordinaten α, β, γ, p einer Ebene den Gleichungen von zwei dieser $n-1^{ten}$ Polaren genügen, so befriedigen sie auch die dritte Gleichung, woraus der Satz ohne Weiteres folgt.

33. Wenn die n^{te} Nullfläche eines Massensystemes sich auf eine ebene Curve n^{ter} Classe reducirt, so fällt die $n-1^{te}$ Polare jeder Berührungsebene dieser Curve mit dem Berührungspunkte zusammen (32.). Die erste Polare der Curvenebene wird folglich (22., Schluss) von jeder Berührungsebene der Curve berührt, kann also nicht von der $n-1^{ten}$ Classe sein, weil durch eine beliebige Gerade nicht bloss $n-1$, sondern n solche Berührungsebenen gelegt werden können. Wir haben deshalb den in (22.) vorgesehenen Ausnahmefall vor uns, und jede Ebene des Raumes kann als Berührungsebene der ersten Polare unserer Curvenebene betrachtet werden. Daraus aber folgt wiederum (22.), dass die $n-1^{te}$ Polare jeder beliebigen Ebene des Raumes in der Curvenebene liegen muss. Ich gründe hierauf den Beweis des Satzes: *Vergrössern wir das Massensystem durch ein in der Ebene seiner n^{ten} Nullfläche liegendes System, so reducirt sich nach wie vor die n^{te} Nullfläche auf eine in jener Ebene liegende Curve n^{ter} Classe.* Da nämlich die $n-1^{ten}$ Polaren jeder Ebene des Raumes in Bezug auf die n^{ten} Nullflächen der beiden zu summirenden Systeme in der Curvenebene liegen, so befinden sich (32.) in dieser Ebene auch die $n-1^{ten}$ Polaren aller Ebenen in Bezug auf die n^{te} Nullfläche ihrer Summe, und kein Punkt der letzteren Nullfläche kann demnach ausserhalb der Curvenebene liegen.

34. Jede Fläche $n-1^{ter}$ Classe kann in Bezug auf eine Curve n^{ter} Classe als erste Polare der Curvenebene betrachtet werden (33.), also auch

jede Fläche $n-i^{\text{ter}}$ Classe als i^{te} Polare derselben Ebene. Wir könnten dieses Resultat zum Ausgangspunkte wählen für den Beweis des folgenden Satzes, den ich jedoch hier als bekannt voraussetzen darf: *Die $n-i^{te}$ Polare einer beliebigen Ebene in Bezug auf eine Curve n^{ter} Classe ist eine Curve i^{ter} Classe. Dieselbe ändert sich nicht, wenn die Ebene sich um ihre Schnittlinie mit der Curvenebene dreht; sie kann auch als $n-i^{te}$ Polare dieser Schnittlinie aufgefasst werden und liegt mit der Curve n^{ter} Classe in einer Ebene.* Nehmen wir an, die Curve n^{ter} Classe liege in zwei Ebenen zugleich, so ergiebt sich hieraus: *Wenn die Curve n^{ter} Classe sich auf n Punkte einer Geraden reducirt, so besteht die $n-i^{te}$ Polare einer beliebigen Ebene in Bezug auf diese Curve aus i Punkten derselben Geraden. Diese i Punkte ändern ihre Lage nicht, wenn die Ebene um ihren Schnittpunkt mit der Geraden sich dreht; sie können auch als $n-i^{te}$ Polare dieses Schnittpunktes in Bezug auf die Curve aufgefasst werden.*

35. Wir fanden oben (17.) das n^{te} Moment eines Massensystemes in Bezug auf eine Ebene E gleich dem Producte aus der Gesammtmasse in die Abstände der Ebene von den n zu ihr parallelen Berührungsebenen der n^{ten} Nullfläche. Daraus folgt: *Wenn sich die n^{te} Nullfläche eines Massensystemes auf eine ebene Curve reducirt, so verhalten sich seine n^{ten} Momente in Bezug auf zwei Ebenen E und E_1, welche die Curvenebene in einer Geraden g unter den Winkeln φ und φ_1 schneiden, zu einander wie* $(\sin\varphi)^n$ *zu* $(\sin\varphi_1)^n$. Denn alsdann gehen die parallelen Berührungsebenen durch die zu g parallelen n Tangenten der Nullcurve; und die Abstände einer solchen Tangente von g, E und E_1 verhalten sich zu einander wie $1:\sin\varphi:\sin\varphi_1$. Dieser Beweis gilt freilich zunächst nur für den Fall, dass die Gesammtmasse von Null verschieden ist; den anderen besonderen Fall aber führen wir auf diesen zurück, indem wir das Massensystem vergrössern um ein anderes, in der Curvenebene liegendes, welches wir hernach wieder wegnehmen (33.). Für jede durch g gelegte Ebene können wir also sofort das n^{te} Moment berechnen, wenn wir es kennen für eine zur Curvenebene normale Ebene der Geraden g. Das Moment für diese Normalebene nenne ich der Kürze wegen *das n^{te} Moment des Massensystemes in Bezug auf die Gerade g.*

36. *Wenn sich die n^{te} Nullfläche eines Massensystemes auf n Punkte einer Geraden reducirt, so verhalten sich seine n^{ten} Momente in Bezug auf zwei Ebenen, welche die Gerade in einem Punkte P unter den Winkeln φ und φ_1 schneiden, wie* $(\sin\varphi)^n$ *zu* $(\sin\varphi_1)^n$. Nehmen wir eine der Ebenen

senkrecht zur Geraden an, verbinden sodann die Schnittlinie beider Ebenen durch eine dritte Ebene mit den n Punkten, und betrachten endlich diese Punkte als eine in dieser dritten Ebene liegende Curve n^{ter} Classe, so ist unser Satz auf den vorhergehenden (35.) zurückgeführt. Für jede durch P gehende Ebene können wir leicht das n^{te} Moment berechnen, wenn es für jene zu der Nullgeraden senkrechte Ebene bekannt ist. Das letztere Moment will ich *das n^{te} Moment des Massensystemes in Bezug auf den Schnittpunkt P* nennen.

37. Wenn die n^{te} Nullfläche eines Massensystemes sich auf eine ebene Curve reducirt, so verstehe ich unter seinem *n^{ten} Moment in Bezug auf eine Gruppe von n Geraden* der Curvenebene dasjenige in Bezug auf n Ebenen, welche in den Geraden zur Curvenebene senkrecht stehen. Liegt die n^{te} Nullfläche in einer Geraden, so rede ich in ähnlichem Sinne vom n^{ten} Moment des Systemes in Bezug auf n Punkte dieser Geraden. Diese n Punkte oder jene n Gerade können auch theilweise oder alle zusammenfallen. *Wenn die n^{ten} Momente von zwei derartigen Massensystemen in Bezug auf n Gerade (oder Punkte), von denen nur eine (einer) l in der Ebene (resp. Geraden) ihrer beiden Nullflächen beweglich ist, gleiche Werthe haben für drei (resp. zwei) von einander unabhängige Lagen von l, so sind sie auch gleichwerthig für jede andere Lage von l.* Denn verbinden wir diese drei oder zwei Lagen von l mit einem beliebigen Punkte resp. einer Axe des Raumes durch Ebenen, so sind (25.) die n^{ten} Momente der Massensysteme für jede Ebene dieses Punktes oder dieser Axe gleichwerthig, woraus (35. und 36.) der Satz folgt.

§. 7. Momente dritten Grades.

38. Wir haben jetzt alle Hülfsmittel an der Hand, um zu beweisen, dass ein Massensystem hinsichtlich seiner n^{ten} Momente durch eine begrenzte Anzahl von Massenpunkten ersetzt werden kann, auch wenn diese Momente nicht durch die Massenvertheilung, sondern durch irgend eine ganze homogene Function n^{ten} Grades von α, β, γ, p gegeben sind. Doch halte ich es für zweckmässig, den allgemeinen Fall zunächst durch das Beispiel $n=3$ zu erläutern. Ich behaupte: *Ein Massensystem m kann hinsichtlich seiner dritten Momente auf unendlich viele Arten durch zehn Massenpunkte ersetzt werden. Sechs derselben liegen in einer willkürlich angenommenen Ebene E; die übrigen vier bilden ein ganz beliebiges, ausserhalb E gelegenes Poltetraeder der ersten Polare von E in Bezug auf die dritte Nullfläche des Systemes. Von den sechs*

Massenpunkten der Ebene E liegen drei auf einer willkürlichen Geraden g von E; die übrigen drei liegen ausserhalb g und bilden ein ganz beliebiges Poldreieck einer bestimmten Curve zweiter Classe, welche durch g und die ersten vier Punkte bestimmt ist. Von den drei Punkten der Geraden g können endlich zwei willkürlich angenommen werden; sie bestimmen den dritten.

39. Sei F^3 die ganze homogene Function dritten Grades von α, β, γ, p, durch welche das dritte Moment des Massensystemes m nicht nur für jede einzelne Ebene, sondern auch (23.) für jede Gruppe von drei Ebenen gegeben ist. Sei E eine Ebene einer solchen Gruppe und fest angenommen, während die übrigen beiden beweglich bleiben; dann kann das dritte Moment bezüglich dieser Gruppe auch aufgefasst werden als zweites Moment eines neuen Massensystemes in Bezug auf das bewegliche Ebenenpaar (22.). Die zweite Nullfläche dieses neuen Massensystemes fällt zusammen mit der ersten Polare der Ebene E in Bezug auf die dritte Nullfläche $F^3 = 0$ des gegebenen. Jenes neue System kann hinsichtlich seiner Trägheitsmomente durch vier Massenpunkte ersetzt werden, welche ein Poltetraeder 1, 2, 3, 4 seiner zweiten Nullfläche bilden. Wir bestimmen vier solche Punkte, dividiren die ihnen beizulegenden Massen durch ihre respectiven Abstände von der festen Ebene E und bezeichnen die *Quotienten* mit m_1, m_2, m_3, m_4. Denken wir uns dann in den Eckpunkten des Poltetraeders 1, 2, 3, 4 die respectiven Massen m_1, m_2, m_3, m_4 concentrirt, so haben (22.) diese vier Massenpunkte für jede Gruppe von drei Ebenen, welcher E angehört, dasselbe dritte Moment wie das Massensystem m. Wir dürfen übrigens keinen der Punkte 1, 2, 3, 4 in der Ebene E annehmen, damit nicht die ihm beizulegende Masse unendlich wird. Die Masse m_1 können wir auch direct berechnen, indem wir ihr drittes Moment in Bezug auf die drei Ebenen E, $\overline{234}$ und E', von denen E' ganz beliebig ist, gleich demjenigen von m in Bezug auf dieselbe Ebenengruppe machen; und ebenso ergeben sich m_2, m_3, m_4 unmittelbar.

40. Vermindern wir das Massensystem m um die vier Massenpunkte m_1, m_2, m_3, m_4, so erhalten wir ein System m', dessen drittes Moment in Bezug auf jede, die E enthaltende Gruppe von drei Ebenen Null ist. Die zweite Polare jeder Ebene in Bezug auf die dritte Nullfläche von m' reducirt sich deshalb (22.) auf einen in E liegenden Punkt, und diese Nullfläche selbst muss sich folglich (33.) auf eine in E liegende Curve dritter Classe reduciren. Das dritte Moment vom m' können wir für jede Gruppe von drei Geraden der Ebene E als gegeben ansehen; denn für alle Ebenengruppen des Raumes

sind die dritten Momente derjenigen beiden Massensysteme m und (m_1, m_2, m_3, m_4) bekannt, deren Differenz m' ist. Nehmen wir von drei solchen Geraden die eine g fest in E an, so kann das dritte Moment von m' bezüglich dieser Gruppe auch als zweites Moment eines neuen Massensystemes in Bezug auf die übrigen beiden beweglichen Geraden aufgefasst werden. Die zweite Nullfläche dieses neuen Systemes ist die in E liegende erste Polare von g hinsichtlich der dritten Nullfläche von m'. Wir können also (27.) in den Eckpunkten 5, 6, 7 eines Poldreieckes dieser Polare drei Massen m_5, m_6, m_7 von solcher Grösse annehmen, dass deren drittes Moment für jede, die g enthaltende Gruppe von drei Geraden gleich demjenigen von m' wird. Wir bestimmen z. B. m_5 der Grösse nach, indem wir von den beiden beweglichen Geraden der Gruppe die eine mit *67* zusammenfallen lassen, die andere beliebig in E annehmen, und sodann das dritte Moment von m_5 gleich demjenigen von m' machen.

41. Vermindern wir jetzt das System m' um die drei Massenpunkte m_5, m_6, m_7, so erhalten wir ein Massensystem m'', dessen drittes Moment für jede Gruppe von drei Ebenen, von denen eine durch die Gerade g geht, verschwindet. Die zweite Polare jeder beliebigen Ebene bezüglich der dritten Nullfläche von m'' liegt folglich in jeder durch g gehenden Ebene, also auch in g selbst; diese Nullfläche reducirt sich auf drei in g liegende Punkte. Das dritte Moment von m'' können wir für jede Gruppe von drei Punkten der Geraden g als bekannt ansehen (vgl. 40.); halten wir einen dieser Punkte, P, fest, so können wir dieses dritte Moment als Trägheitsmoment eines neuen Massensystemes in Bezug auf die übrigen beiden beweglichen Punkte betrachten. Die zweite Nullfläche dieses neuen Systemes reducirt sich auf zwei Punkte von g, und fällt zusammen mit der ersten Polare einer beliebig durch P gelegten Ebene hinsichtlich der dritten Nullfläche von m''. Seien 8 und 9 zwei Punkte von g, welche einander conjugirt sind bezüglich jener zweipunktigen Nullfläche, so können wir denselben zwei solche Massen m_8 und m_9 beilegen, dass deren drittes Moment für jede den Punkt P enthaltende Gruppe von drei Punkten der g denselben Werth erhält, wie dasjenige von m'' für dieselbe Gruppe. Die Masse m_8 z. B. bestimmen wir, indem wir von den beiden willkürlichen Punkten der Gruppe einen mit 9 zusammenfallen lassen, den andern, Q, beliebig annehmen; dann ist sowohl für die Gruppe P, 9, Q als auch für P, 9, 8 das dritte Moment des Systemes m'' gleich demjenigen von m_8, und diese Uebereinstimmung findet folglich (37.) auch für jede andere Punktengruppe P, 9, R der Geraden g statt. Bestimmen wir ebenso m_9, so haben

die Massenpunkte m_8, m_9 für die beiden Punktengruppen P, 9, R und P, 8, R, und folglich (37.) für eine *jede* Punktengruppe P, Q, R von g, in welcher der feste Punkt P vorkommt, dasselbe dritte Moment wie das Massensystem m''.

42. Vermindern wir endlich wiederum das Massensystem m'' um die Massenpunkte m_8 und m_9, so erhalten wir ein Massensystem m''', dessen dritte Nullfläche sich auf den Punkt P reducirt; denn die zweite Polare jeder Ebene des Raumes hinsichtlich dieser Nullfläche fällt mit P zusammen. Die dritten Momente dieses Systemes m''' in Bezug auf zwei beliebige Ebenen sind folglich den Cuben der Abstände dieser Ebenen vom Punkte P proportional (17.), sodass wir m''' hinsichtlich seiner dritten Momente ersetzen können durch eine in P concentrirte Masse m_{10}. Letztere kann auch zugleich mit m_8 und m_9 und auf dieselbe Art wie diese Massen berechnet werden. Die Differenz von m''' und m_{10} ist indifferent hinsichtlich ihrer dritten Momente, und folglich sind die zehn Massenpunkte m_1, m_2, ... m_{10} dem Massensysteme m äquivalent, und unser Satz (38.) ist bewiesen.

43. Da wir uns die dritten Momente des Systemes m durch irgend eine ganze homogene Function dritten Grades von α, β, γ, p gegeben dachten, so gewinnen wir zugleich den algebraischen Satz (vgl. 31.):

Jede ganze homogene Function F^3 dritten Grades der Ebenencoordinaten α, β, γ, p lässt sich, wenn ihre Coefficienten reell sind, auf unzählige Arten als Summe von zehn reellen Cuben linearer homogener Functionen darstellen. Einzeln gleich Null gesetzt repräsentiren diese linearen Functionen zehn Punkte, von denen drei in einer Geraden g und noch drei andere in einer durch g gehenden Ebene E liegen, die übrigen vier aber ein ganz beliebiges Poltetraeder der ersten Polare von E hinsichtlich der Nullfläche jener Function F^3 bilden. Die Ebene E und die in ihr liegende Gerade g sind ganz beliebig anzunehmen, sodann auch jenes Poltetraeder. Von den drei in g liegenden Punkten können zwei, von den drei übrigen in E liegenden kann einer ganz beliebig, ein anderer sodann in einer gewissen Geraden willkürlich angenommen werden. Durch diese Annahmen sind aber alle zehn Punkte, sowie auch die Coefficienten jener zehn Cuben (als Massen der zehn Punkte) völlig bestimmt.

44. Wir können den zehn Punkten noch besondere gegenseitige Lagen ertheilen. Nehmen wir z. B. ausser der Ebene E noch die Ebene $\overline{234}$ willkürlich an, so können wir deren Schnittlinie mit E zur Geraden g wählen. Der Punkt 1 ist alsdann völlig bestimmt; denn er bildet mit 2, 3, 4 ein

Poltetraeder der ersten Polare von E bezüglich der dritten Nullfläche des Massensystemes und ebenso mit 5, 6, 7 ein beliebiges Poltetraeder der ersten Polare von $\overline{234}$ hinsichtlich derselben Nullfläche. Nun giebt es aber drei, wenn auch nicht immer reelle Strahlen des Punktes 1, welche einander conjugirt sind in Bezug auf jede dieser beiden ersten Polaren. Wir wollen die Schnittpunkte dieser Strahlen mit den Ebenen E und $\overline{234}$ als die Punkte 5, 6, 7 und 2, 3, 4 annehmen. Wir können sodann in den Ebenen $\overline{156}$ und $\overline{167}$ zwei von den drei auf g liegenden Massenpunkten annehmen; und sollte hierbei der Fall eintreten, dass der dritte auf g liegende Punkt in die Ebene $\overline{175}$ fiele (was sich wahrscheinlich durch passende Wahl der Ebenen E und $\overline{234}$ erreichen lässt), *so würden die zehn Punkte sich als die Schnittpunkte von fünf Ebenen darstellen.*

45. Ein Massensystem kann übrigens auch durch weniger als zehn Massenpunkte ersetzt werden hinsichtlich seiner dritten Momente. Bekanntlich giebt es im Raume unendlich viele Punkte, deren erste Polarflächen bezüglich einer Fläche dritter Ordnung Kegelflächen sind; dieselben liegen auf einer Fläche vierter Ordnung, der *Kernfläche* der gegebenen. Ebenso giebt es unendlich viele Ebenen, deren erste Polaren hinsichtlich der dritten Nullfläche eines Massensystemes ebene Curven sind. Wählt man eine dieser Ebenen für E, so reducirt sich das ausserhalb E liegende Massentetraeder auf ein Poldreieck der entsprechenden Curve zweiter Classe. Ebenso kann man die Gerade g so wählen, dass die drei in E, aber ausserhalb g liegenden Massenpunkte sich auf zwei reduciren; und von den drei Massenpunkten auf g können zwei so gewählt werden, dass der dritte die Masse Null erhält. Statt der zehn Massenpunkte haben wir alsdann sieben, welche jedoch keineswegs immer reell ausfallen; denn schon die Ebenen, deren erste Polarflächen hinsichtlich der dritten Nullfläche ebene Curven sind, können alle imaginär werden. Ob aber nicht ein Massensystem hinsichtlich seiner dritten Momente immer durch sieben reelle Massenpunkte ersetzt werden kann, von denen keine vier in einer Ebene liegen, bleibt eine offene, für die Theorie der Flächen dritter Classe nicht unwichtige Frage, die muthmasslich bejaht werden muss. Dieselbe ist gelöst, sobald man zu jeder Fläche dritter Classe sieben Punkte construiren kann, von denen je vier ein Poltetraeder der ersten Polare einer durch die übrigen drei gelegten Ebene bilden *).

*) Bekanntlich kann eine ganze homogene Function dritten Gerades von vier

§. 8. Ganze homogene Functionen n^{ten} Grades mit reellen Coefficienten.

46. *Ein Massensystem kann hinsichtlich seiner n^{ten} Momente durch $\frac{n.(n+1).(n+2)}{1.2.3}$ Massenpunkte ersetzt werden, und wenn seine n^{te} Nullfläche sich auf eine ebene Curve reducirt, sogar durch $\frac{n.(n+1)}{1.2}$ Punkte der Curvenebene; wenn aber jene Nullfläche in n Punkte einer Geraden ausartet, so genügen schon n Massenpunkte in dieser Geraden, um es zu ersetzen.* Der Beweis ist dem für $n=3$ soeben geführten so analog, dass ich ihn kurz fassen darf. Ich nehme an, der Satz sei richtig für $n=i-1$; wenn ich auf diese Annahme gestützt zeigen kann, dass er auch für $n=i$ gelten muss, so ist er allgemein bewiesen. Beim Beweise wird sich herausstellen, dass von den Massenpunkten eine Anzahl ganz willkürlich, andere in gewissen Ebenen oder Geraden willkürlich angenommen werden können, wie bei den Fällen $n=2$ oder 3. Die n^{ten} Momente des Systemes seien auch hier nicht durch die Massenvertheilung, sondern durch irgend eine ganze homogene Function n^{ten} Grades von α, β, γ, p gegeben. Zuerst will ich den letzten Theil des Satzes beweisen.

47. Die i^{te} Nullfläche des Systemes reducire sich also auf i Punkte einer Geraden g. Wir berechnen das i^{te} Moment für eine Gruppe von i Punkten dieser Geraden; wird einer dieser Punkte, P, festgehalten, so kann dieses Moment auch als $i-1^{tes}$ Moment eines neuen Systemes in Bezug auf die übrigen $i-1$ Punkte aufgefasst werden. Nach meiner Annahme kann dieses neue Massensystem durch $i-1$ Massenpunkte der Geraden g ersetzt werden, deren Massen dividirt durch ihre respectiven Abstände von P mit m_1, m_2, m_3, ... m_{i-1} bezeichnet werden mögen. Damit diese Quotienten endlich bleiben, darf keiner der Massenpunkte mit P zusammenfallen. Subtrahiren wir nun vom alten Massensystem die in den $i-1$ Punkten concentrirten Massen m_1, m_2, m_3, ... m_{i-1}, so erhalten wir ein System, dessen i^{te} Nullfläche sich auf den Punkt P reducirt; denn sein i^{tes} Moment ist Null für jede Gruppe von i Punkten, welcher P angehört, und folglich reducirt sich die $i-1^{te}$ Polare jeder nicht durch P gehenden Ebene auf P. Dieses ganz specielle Massen-

---

Variabeln, wie Herr *Sylvester* gefunden und Herr *Clebsch* (in diesem Journal Bd. 59 S. 193) zuerst bewiesen hat, im Allgemeinen auf eine einzige Art als Summe von *fünf* Cuben dargestellt werden. Dieselben sind aber keineswegs immer reell.

system können wir hinsichtlich seiner i^{ten} Momente durch eine in P concentrirte Masse m_i ersetzen (vgl. 42.), also auch das ursprünglich gegebene System durch die i Massenpunkte $m_1, m_2, \ldots m_i$.

48. Von den i Massenpunkten dürfen keine zwei zusammenfallen, und jeder ist die $i-1^{te}$ Polare der übrigen hinsichtlich der i^{ten} Nullfläche. Daraus und aus (41.) ergiebt sich, dass die Lage von $i-1$ derselben willkürlich auf der Geraden g angenommen werden darf, wodurch dann die Lage des letzten völlig bestimmt ist. Die Masse m_k eines beliebigen von ihnen ergiebt sich direct, wenn wir sein i^{tes} Moment für i Punkte, von denen einer beliebig auf g liegt, und die übrigen mit den anderen $i-1$ Massenpunkten zusammenfallen, gleich demjenigen des gegebenen Massensystemes machen. Also: *Wenn wir auf der Geraden g die Lagen von $i-1$ Massenpunkten willkürlich annehmen, so sind dadurch und durch die gegebenen i^{ten} Momente ihre Massen, sowie die Lage und Masse des i^{ten} Punktes völlig bestimmt.*

49. Reducirt sich die i^{te} Nullfläche des Massensystemes auf eine ebene Curve, so berechnen wir für eine Gruppe von i Geraden der Curvenebene E das i^{te} Moment. Ist eine dieser Geraden, g, fest, so können wir jenes i^{te} Moment auch als $i-1^{tes}$ Moment eines neuen Massensystemes hinsichtlich der übrigen $i-1$ Geraden auffassen. Letzteres ersetzen wir (was nach meiner Annahme möglich ist, da seine $i-1^{te}$ Nullfläche als erste Polare von g sich ebenfalls auf eine in E liegende Curve reducirt) durch $\frac{(i-1).i}{1.2}$ Massenpunkte, welche wir sofort durch ihre Abstände von der festen Geraden g dividiren. Die Quotienten betrachten wir als Massen, welche in den nämlichen $\frac{(i-1).i}{1.2}$ Punkten concentrirt sind, und subtrahiren sie von dem gegebenen Massensystem. Die i^{te} Nullfläche der Differenz reducirt sich dann auf die Gerade g, weil ihr i^{tes} Moment für jede Gruppe von i Ebenen, von denen eine durch g geht, Null wird, und folglich g die $i-1^{te}$ Polare jeder nicht durch g gehenden Ebene hinsichtlich jener i^{ten} Nullfläche enthalten muss. Diese Differenz kann also hinsichtlich ihrer i^{ten} Momente durch i Massenpunkte ersetzt werden (47.), und folglich das gegebene Massensystem, wie behauptet wurde, durch $i+\frac{(i-1).i}{1.2}$ oder $\frac{i.(i+1)}{1.2}$ Massenpunkte der Curvenebene E.

50. Eine leichte Ueberlegung ergiebt (vgl. 48.), dass i von diesen $\frac{i.(i+1)}{1.2}$ Punkten auf einer willkürlich in E angenommenen Geraden g liegen,

$i-1$ andere auf einer zweiten willkürlichen Geraden von E, wieder $i-2$ andere auf einer dritten u. s. w. Wir können also in der Ebene der i^{ten} Nullfläche $i-1$ Gerade willkürlich annehmen, von denen die erste i, die zweite $i-1$, überhaupt die k^{te} $i-k+1$ von den $\frac{i.(i+1)}{1.2}$ Massenpunkten enthalten soll. Dadurch ist der letzte Massenpunkt der Lage und Masse nach völlig bestimmt; er ist die $i-1^{\text{te}}$ gemischte Polare der $i-1$ Geraden hinsichtlich der i^{ten} Nullfläche. Auf jeder Geraden kann man dann noch alle auf ihr liegenden Massenpunkte bis auf einen der Lage nach willkürlich annehmen, wenn nur keine zwei zusammenfallen; ihre Massen, sowie Lage und Masse der noch übrig bleibenden Punkte sind dadurch völlig bestimmt. Man kann z. B. die $\frac{i.(i+1)}{1.2}$ Punkte so legen, dass sie bis auf einen noch über ein zweites System von $i-1$ Geraden in der soeben angegebenen Weise sich vertheilen; nur sind diese anderen $i-1$ Geraden nicht mehr ganz willkürlich, wie die ersteren es waren.

51. Den ersten Theil des Satzes (46.) beweisen wir auf ähnliche Art. Wir nehmen eine Ebene E willkürlich an und bestimmen ein System von $\frac{(i-1).i.(i+1)}{1.2.3}$ ausserhalb E gelegenen Massenpunkten so, dass ihr i^{tes} Moment für jede die E enthaltende Gruppe von i Ebenen gleich demjenigen des gegebenen Massensystemes wird (was nach den gemachten Annahmen möglich ist). Subtrahiren wir vom letzteren Systeme diese sämmtlichen Massenpunkte, so erhalten wir ein neues System, dessen i^{te} Nullfläche sich auf eine in E liegende Curve reducirt, welches also hinsichtlich der i^{ten} Momente durch $\frac{i.(i+1)}{1.2}$ in E enthaltene Massenpunkte ersetzt werden kann (49.). Folglich ist das gegebene System aequivalent einem Systeme von $\frac{i.(i+1)}{1.2}+\frac{(i-1).i.(i+1)}{1.2.3}$ oder $\frac{i.(i+1).(i+2)}{1.2.3}$ Massenpunkten, und der aufgestellte Satz (46.) ist seiner ganzen Ausdehnung nach bewiesen.

52. Von diesen $\frac{i.(i+1).(i+2)}{1.2.3}$ Massenpunkten können wir eine Anzahl der Lage nach willkürlich annehmen, nur dürfen keine zwei derselben zusammenfallen. Wir können zunächst beliebige $i-1$ Ebenen wählen, von denen die erste $\frac{i.(i+1)}{1.2}$, die zweite $\frac{(i-1).i}{1.2}$ und allgemein die k^{te}:

$$\frac{(i-k+1).(i-k+2)}{1.2}$$

von jenen Massenpunkten enthalten soll. Dadurch ist der letzte Massenpunkt der Lage und Masse nach völlig bestimmt; auf ihn reducirt sich die $i-1^{te}$ gemischte Polare jener $i-1$ Ebenen in Bezug auf die i^{te} Nullfläche des gegebenen Massensystemes. In der k^{ten} Ebene können sodann $i-k$ Gerade willkürlich angenommen werden, von denen die erste $i-k+1$, die zweite $i-k$ und allgemein die l^{te} $i-k-l+2$ von jenen Massenpunkten enthalten soll. Auf jeder solchen Geraden können wir endlich alle auf ihr befindlichen Massenpunkte bis auf einen einzigen willkürlich festlegen; ihre Massen, sowie die Lagen und Massen der übrigen Massenpunkte sind dadurch und durch die gegebenen i^{ten} Momente völlig bestimmt.

53. Das n^{te} Moment eines Systemes von Massenpunkten in Bezug auf eine Ebene $(\alpha, \beta, \gamma, p)$ lässt sich ausdrücken durch:

$$\Sigma(\alpha x_k+\beta y_k+\gamma z_k-p)^n . m_k,$$

wenn m_k und x_k, y_k, z_k Masse und Coordinaten eines beliebigen jener Punkte bezeichnen, und die Summe über alle vorhandenen Massenpunkte ausgedehnt wird. Jedes Glied dieser Summe ist also das Produkt aus einem Coefficienten m_k in die n^{te} Potenz einer linearen homogenen Function von α, β, γ, p. Daraus und aus (46.) folgt der algebraische Satz:

Jede ganze homogene Function n^{ten} Grades von vier Variabeln und mit reellen Coefficienten lässt sich auf unzählige Arten als Summe von $\frac{n.(n+1).(n+2)}{1.2.3}$ reellen n^{ten} Potenzen linearer homogener Functionen derselben Variabeln darstellen; und zwar kann von diesen linearen Functionen eine Anzahl ganz willkürlich bis auf einen constanten Factor angenommen werden. Jede solche Function von drei oder zwei Variabeln lässt sich ebenso als Summe von $\frac{n.(n+1)}{1.2}$ resp. n reellen n^{ten} Potenzen linearer homogener Functionen darstellen.

Der erste Theil des Satzes ist bewiesen für die Ebenencoordinaten α, β, γ, p, zwischen denen aber die Bedingung besteht:

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2 = 1.$$

Diese Bedingung können wir beseitigen, indem wir statt α, β, γ, p neue Variable α_1, β_1, γ_1, p_1 einführen mittelst der Gleichungen:

$$\frac{\alpha_1}{\alpha} = \frac{\beta_1}{\beta} = \frac{\gamma_1}{\gamma} = \frac{p_1}{p} = \delta;$$

denn sie geht alsdann über in die Gleichung:

$$\alpha_1^2+\beta_1^2+\gamma_1^2 = \delta^2,$$

welche gar nichts über die neuen Variabeln aussagt, weil δ ganz willkürlich ist. Die Gleichung zwischen der Function n^{ten} Grades und den n^{ten} Potenzen ändert sich zugleich nur insofern, als α_1, β_1, γ_1 und p_1 an die Stelle von α, β, γ, p treten. Der letzte Theil des Satzes entspricht dem Falle, in welchem die Nullfläche einer ganzen homogenen Function der Ebenencoordinaten sich auf eine ebene Curve oder auf n Punkte einer Geraden reducirt. Wir wählen die Curvenebene zur xz Ebene oder die Gerade zur x-Axe und setzen dann γ resp. β und γ Null, wodurch die Function in eine beliebige ganze homogene Function gleichen Grades von den Variabeln α, β, p resp. α, p übergeht. Die Bedingungsgleichungen:

$$\alpha^2+\beta^2=1 \quad \text{resp.} \quad \alpha^2=1$$

beseitigen wir wieder wie oben durch Einführung neuer Variabeln.

54. Wird unsere Beweisführung ihres mechanisch-geometrischen Gewandes entkleidet, so können wir sie auch auf Functionen von mehr als vier Variabeln anwenden, und erhalten allgemein den Satz:

Jede ganze homogene Function n^{ten} Grades von k Variabeln und mit reellen Coefficienten lässt sich auf unzählige Arten als Summe von $\frac{n.(n+1).(n+2)\dots(n+k-2)}{1.2.3\dots(k-1)}$ reellen n^{ten} Potenzen linearer homogener Functionen derselben Variabeln darstellen.

Aus (45.) ist ersichtlich, dass sich die Anzahl dieser n^{ten} Potenzen durch zweckmässige Wahl der linearen Functionen, soweit die letzteren willkürlich sind, im Allgemeinen verkleinern lässt. Diese Verkleinerung ist um so eher möglich, wenn auch lineare Functionen mit complexen Coefficienten zugelassen werden (vgl. 45, Anmerkung). Doch dürfte bei manchen Untersuchungen gerade die Willkürlichkeit einer Anzahl dieser Functionen von Vortheil sein. Zum Schluss möge noch der folgende Satz hier Platz finden, dessen Beweis in demjenigen von (46.) enthalten ist:

Man kann auf unendlich viele Arten ein Massensystem so bestimmen, dass sein n^{tes} Moment:

$$\int(\alpha x+\beta y+\gamma z-p)^n\,dm$$

in Bezug auf eine Ebene (α,β,γ,p) einer willkürlich gegebenen, ganzen homogenen Function n^{ten} Grades der Ebenencoordinaten α, β, γ, p gleich

wird. Die Gleichung:

$$\int (\alpha x + \beta y + \gamma z - p)^n dm = 0$$

kann demnach als diejenige einer ganz beliebigen Fläche n^{ter} Classe betrachtet werden.

Durch diese Auffassung der Flächen n^{ter} Classe als n^{ter} Nullflächen von Massensystemen wird, wie wir gesehen haben, die Polarentheorie dieser Flächen sehr einfach und anschaulich.

Zürich, den 12. Januar 1870.

Einige allgemeine Sätze über ebene Curven und über Flächen mit Anwendungen auf Curven und Flächen zweiter und dritter Ordnung.

(Von Herrn *Joerres* in Ahrweiler).

I. Sätze über ebene Curven.

1. „Kann man sich die ebene Curve P_{2n} entstanden denken durch zwei projectivische Büschel $(A_n B_n C_n \ldots)$ und $(A'_n B'_n C'_n \ldots)$, so kann man sich dieselbe auch entstanden denken durch zwei andere projectivische Büschel, von denen der eine die Curven A_n und A'_n, und der andere die Curven B_n und B'_n als die jenen bezüglich entsprechenden enthält." Dabei zeigt, wie überall auch im Folgenden, der einem Symbol angehängte Index die Ordnung der betreffenden Curve — und weiter unten auch der betreffenden Fläche — an. Ist $C_n \equiv A_n + \alpha B_n = 0$ die Gleichung der Curve C_n, und $C'_n \equiv A'_n + \beta B'_n = 0$ die Gleichung der Curve C'_n, so ist $\beta A_n B'_n = \alpha A'_n B_n$ die Gleichung der Curve P_{2n}. Ist $A''_n \equiv A_n + \gamma A'_n = 0$ die Gleichung einer beliebigen Curve des Büschels (A_n, A'_n), und $B''_n \equiv B_n + \delta B'_n = 0$ die Gleichung der entsprechenden Curve des Büschels (B_n, B'_n), so folgt hieraus als Gleichung für die von diesen Büscheln erzeugte Curve: $\delta A_n B'_n = \gamma A'_n B_n$. Diese Gleichung wird identisch mit der Gleichung von P_{2n}, wenn wir $\alpha : \beta = \gamma : \delta$ setzen.

2. Unter der Bedingung $\alpha : \beta = \gamma : \delta$ kann also P_{2n} entstehen sowohl aus den projectivischen Büscheln

$$(A_n B_n C_n \ldots) \quad \text{und} \quad (A'_n B'_n C'_n \ldots)$$

als auch aus den projectivischen Büscheln: $(A_n A'_n A''_n \ldots)$ und $(B_n B'_n B''_n \ldots)$.

Für die Curven dieser Büschel gilt nun der Satz: „Die dreimal n^2 Punkte $(A_n B'_n)$, $(C_n B''_n)$, $(C'_n A''_n)$ liegen auf derselben Curve S_n". Die Gleichungen von C_n und B''_n waren nämlich bezüglich: $A_n + \alpha B_n = 0$, $B_n + \delta B'_n = 0$; diese Curven schneiden sich daher auch auf einer Curve S_n, deren Gleichung $A_n - \alpha\delta B'_n$ ist. Ebenso schneiden sich C'_n und A''_n, deren Gleichungen bezüglich: $A'_n + \beta B'_n = 0$, $A_n + \gamma A'_n = 0$ waren, auf einer Curve, deren Gleichung: $A_n - \beta\gamma B'_n = 0$ ist. Da aber aus $\alpha : \beta = \gamma : \delta$ auch $\alpha\delta = \beta\gamma$ folgt, so ist die

letztere Curve wiederum die Curve S_n. Auf dieser schneiden endlich auch die Curven A_n und B'_n einander, wie aus der Gleichung $A_n - \alpha\delta B'_n = 0$ sofort hervorgeht.

Ebenso liegen auch die dreimal n^2 Schnittpunkte $(A'_n B_n)$, $(C_n A''_n)$, $(C'_n B''_n)$ auf derselben Curve n^{ter} Ordnung, deren Gleichung $\alpha B_n = \gamma A'_n$ oder $\beta B_n = \delta A'_n$ ist.

3. Schreibt man die ersteren 3 Paare von Curven, deren Schnittpunkte auf S_n liegen, in der Reihenfolge $A_n\, C_n\, C'_n\, B'_n\, B''_n\, A''_n$, so ist ersichtlich, dass jede zwei auf einander folgende Curven sich auf P_{2n} schneiden; dieses gilt auch von den Curven A''_n und A_n. Jene sechs Curven bilden demnach eine geschlossene Kette, deren gegenüberliegende Glieder einander auf S_n, und deren auf einander folgende Glieder einander auf P_{2n} schneiden. Diese Bemerkung führt uns zu den Sätzen der drei folgenden Nummern.

4. „Liegen die dreimal n^2 Schnittpunkte je zweier gegenüberliegender Curven der geschlossenen Kette: $A_n\, C_n\, C'_n\, B'_n\, B''_n\, A''_n$ auf einer Curve S_n, so liegen die 6 mal n^2 Schnittpunkte je zweier auf einander folgender Curven der Kette auf einer Curve P_{2n}." — Weil nämlich die Punkte $(A_n B'_n)$ auf S_n liegen, so hat die Gleichung von S_n die Form: $A_n - \lambda B'_n = 0$; da nun aber auch $(C_n B''_n)$ und $(C'_n A''_n)$ auf S_n liegen, so haben die Gleichungen für B''_n und A''_n bezüglich die Formen: $C_n - \mu(A_n - \lambda B'_n) = 0$, und $C'_n - \nu(A_n - \lambda B'_n) = 0$. Bestehen aber gleichzeitig irgend zwei auf einander folgende, oder auch die letzte und erste der 6 Gleichungen:

$$A_n = 0,\ C_n = 0,\ C'_n = 0,\ B'_n = 0,\ C_n - \mu(A_n - \lambda B'_n) = 0,\ C'_n - \nu(A_n - \lambda B'_n) = 0,$$

so wird immer auch die Gleichung: $A_n B'_n + \frac{1}{\lambda\mu\nu}(C'_n + \lambda\nu B'_n)(C_n - \mu A_n)$ befriedigt; diese Gleichung ist vom Grade $2n$, mithin ist der Satz bewiesen.

Der letzten Gleichung können wir auch noch folgende Formen geben:

$$C_n C'_n + \lambda\nu B'_n C_n - \mu A_n C'_n = 0, \text{ oder: } \frac{(C_n C'_n + \lambda\nu B'_n C_n - \mu A_n C'_n)(A_n - \lambda B'_n)}{S_n} = 0,$$

$$\text{oder: } \frac{A_n C'_n (C_n - \mu[A_n - \lambda B'_n]) - \lambda B'_n C_n (C'_n - \nu[A_n - \lambda B'_n])}{S_n} = 0,$$

$$\text{oder endlich: } \frac{A_n C'_n B''_n - \lambda B'_n A''_n C_n}{S_n} = 0.$$

Liegen die Schnittpunkte $(A_n B'_n)$, $(C_n B''_n)$, $(C'_n A''_n)$ auf einer Curve S_n, so lassen sich jene 6 Curven auf vierfache Weise zu einer Kette zusammenstellen, so dass jedesmal S_n die Durchschnittspunkte der gegenüberliegenden Glieder enthält. Demnach erhält man auch 4 Curven P_{2n}. Die 4 Ketten und

die Gleichungen der entsprechenden 4 Curven sind:

(I.) $A_n C_n C'_n B'_n B''_n A''_n$, $\frac{A_n C'_n B''_n - \lambda B'_n A''_n C_n}{S_n} = 0$, oder: $A_n B'_n + \frac{(C'_n + \lambda\nu B'_n)(C_n - \mu A_n)}{\lambda\mu\nu} = 0$,

(II.) $A_n C_n A''_n B'_n B''_n C'_n$, $\frac{A_n A''_n B''_n - \lambda B'_n C'_n C_n}{S_n} = 0$, oder: $A_n B'_n - \frac{(C'_n - \nu A_n)(C_n - \mu A_n)}{\lambda\mu\nu} = 0$,

(III.) $A_n B''_n C'_n B'_n C_n A''_n$, $\frac{A_n C'_n C_n - \lambda B'_n A''_n B''_n}{S_n} = 0$, oder: $A_n B'_n - \frac{(C'_n + \lambda\nu B'_n)(C_n + \lambda\mu B'_n)}{\lambda\mu\nu} = 0$,

(IV.) $A_n B''_n A''_n B'_n C_n C'_n$, $\frac{A_n A''_n C_n - \lambda B'_n C'_n B''_n}{S_n} = 0$, oder: $A_n B'_n + \frac{(C'_n - \nu A_n)(C_n + \lambda\mu B'_n)}{\lambda\mu\nu} = 0.$

Die Gleichung (I.) lehrt uns, dass die entsprechende Curve P_{2n} entstehen kann aus zwei projectivischen Curvenbüscheln, von denen der eine die Curven A_n, C_n, $C_n - \mu A_n$, und der andere die bezüglich entsprechenden Curven $C'_n + \lambda\nu B'_n$, C'_n, B'_n enthält. Ferner erhellt aus der Gleichung (I.), dass die entsprechende Curve P_{2n} auch entstehen kann durch zwei projectivische Curvenbüschel, von welchen der eine die Curven A_n, $C'_n + \lambda\nu B'_n$, $A''_n \equiv C'_n - \nu(A_n - \lambda B'_n)$ und der andere die bezüglich entsprechenden Curven $C_n - \mu A_n$, B'_n, $B''_n \equiv C_n - \mu(A_n - \lambda B'_n)$ enthält. Auf ähnliche Weise ergiebt sich, dass auch die andern Curven P_{2n} durch projectivische Büschel entstehen können.

5. Die durch die Gleichungen (I.), (II.), (III.), (IV.) bestimmten Curven haben noch folgende merkwürdige Beziehungen zu einander. Die Curven (I.) und (II.) haben mit einander ausser den $2n^2$ Schnittpunkten $(A_n C_n)$ und $(A'_n B''_n)$ noch $2n^2$ Schnittpunkte gemein, welche auch auf der Curve $C'_n + A''_n$ liegen. Die Curven (III.) und (IV.) haben mit einander ausser den $2n^2$ Schnittpunkten $(A_n B''_n)$ und $(B'_n C_n)$ noch $2n^2$ Schnittpunkte gemein, die auf jener selben Curve $C'_n + A''_n$ liegen. Ebenso haben (I.) und (III.) ausser den $2n^2$ Schnittpunkten $(A_n A''_n)$ und $(B'_n C'_n)$ noch $2n^2$ Punkte gemein, die auch auf der Curve $C_n + B''_n$ liegen. Die Curven (II.) und (IV.) haben ausser den $2n^2$ Schnittpunkten $(A_n C'_n)$ und $(A''_n B'_n)$ noch $2n^2$ Punkte gemein, die wiederum auf der Curve $C_n + B''_n$ liegen. Endlich haben die Curven (I.) und (IV.) ausser den $2n^2$ Punkten $(C_n C'_n)$ und $(B''_n A''_n)$ noch $2n^2$ Punkte gemein, die auf der Curve $A_n + \lambda B'_n$ liegen. Auf derselben Curve $A_n + \lambda B'_n$ liegen auch die $2n^2$ Punkte, welche die Curve (II.) und (III.) ausser den Schnittpunkten $(C_n A''_n)$ und $(C'_n B''_n)$ gemein haben. Bemerken wir nun noch, dass die Gleichung für S_n, ausser der Form: $A_n - \lambda B'_n = 0$, auch wegen der Gleichungen $A''_n \equiv C'_n - \nu(A_n - \lambda B'_n)$ und $B''_n \equiv C_n - \mu(A_n - \lambda B'_n)$ die Formen $C'_n - A''_n = 0$ und $C_n - B''_n = 0$ annehmen kann, so fällt in die Augen, dass die Curve $C'_n + A''_n$ von der Curve



S_n oder $C_n - A''_n$ durch die Curven C'_n und A''_n harmonisch getrennt wird, dass ferner $C_n + B''_n$ von S_n oder $C_n - B''_n$ von C_n und B''_n harmonisch getrennt wird, und dass endlich die Curve $A_n + \lambda B'_n$ von S_n oder $A_n - \lambda B'_n$ durch A_n und B'_n harmonisch getrennt werden. Dabei ist noch zu erwähnen, dass die Kette (II.) aus (I.) abgeleitet werden kann durch Vertauschung von C'_n und A''_n; auf dieselbe Weise kann man die Kette (IV.) aus (III.) ableiten. Ferner vertauscht man in den Ketten (I.) und (II.) die Glieder C_n und B''_n, so erhält man die Ketten (III.) und (IV.), und vertauscht man endlich in den Ketten (I.) und (II.) die Glieder A_n und B'_n, so erhält man die Ketten (IV.) und (III.).

6. „Bilden die Curven $A_n C_n C'_n B'_n B''_n A''_n$ eine geschlossene Kette der Art, dass die Schnittpunkte je zweier auf einander folgender Glieder der Kette auf derselben Curve P_{2n} liegen, so liegen die $3n^2$ Schnittpunkte je zweier einander gegenüberliegender Glieder auf derselben Curve S_n." Die Curven A_n, C'_n, B''_n stellen in ihrer Gesammtheit eine Curve der Ordnung $3n$ dar; ebenso stellen die Curven B'_n, A''_n, C_n eine solche Curve von der Ordnung $3n$ dar; die Gleichung einer beliebigen Curve P_{3n} des Büschels jener zwei Curven ist daher: $A_n C'_n B''_n - \lambda B'_n A''_n C_n$. Man kann nun λ so bestimmen, dass P_{3n} durch einen solchen Punkt von P_{2n} geht, der nicht zugleich ein Schnittpunkt zweier Glieder der Kette ist. Dann hat P_{2n} mit P_{3n} ausser diesem Punkte noch die Punkte $(A_n C_n)$, $(C_n C'_n)$, $(C'_n B'_n)$, $(B'_n B''_n)$, $(B''_n A''_n)$, $(A''_n A_n)$, also im Ganzen $6n^2+1$ Punkte gemein. Mithin zerfällt dann P_{3n} in die Curve P_{2n} und eine Curve S_n, auf welcher die Punkte $(A_n B'_n)$, $(C'_n A''_n)$, $(B''_n C_n)$ liegen müssen.

7. „Kann man sich eine Curve P_{n+m} entstanden denken durch zwei projectivische Büschel $(A_n B_n C_n \ldots)$ und $(A'_m B'_m C'_m \ldots)$, und ist H_{n-m} — vorausgesetzt, dass $n > m$ sei — eine beliebige Curve der Ordnung $n-m$, so kann man sich die Curve $P_{n+m}.H_{n-m}$, welche von der Ordnung $2n$ ist, entstanden denken durch die projectivischen Büschel $(A_n, B_n, C_n, \ldots)$ und $(A'_m . H_{n-m}, B'_m . H_{n-m}, C'_n . H_{n-m}, \ldots)$. Ist nun $C_n \equiv A_n + \alpha B_n$, $C'_m . H_{n-m} \equiv A'_m . H_{n-m} + \beta B'_m . H_{n-m}$, $A''_n \equiv A_n + \gamma A'_m . H_{n-m}$, $B''_n \equiv B_n + \delta B'_m . H_{n-m}$, und $\alpha : \beta = \gamma : \delta$, so kann man sich die Curve $P_{n+m}.H_{n-m}$ auch entstanden denken aus den projectivischen Büscheln $(A_n, A'_m . H_{n-m}, A''_n, \ldots)$ und $(B_n, B'_m . H_{n-m}, B''_n, \ldots)$. Die Schnittpunkte $(A_n, B'_m . H_{n-m})$, $(C'_m . H, A''_n)$, (B''_n, C_n) liegen auf einer Curve $S_n \equiv A_n - \alpha\delta B'_m H_{n-m}$. Die Schnittpunkte $(A_n H_{n-m})$ und $(A''_n H_{n-m})$ sind dabei gemäss der Gleichung von A''_n identisch. Die drei genannten Curvenpaare, deren Schnittpunkte auf S_n liegen, sind die Paare gegenüberliegender Glieder

der Kette A_n, C_n, $C'_m.H_{n-m}$, $B'_m.H_{n-m}$, B''_n, A''_n; je zwei auf einander folgende Glieder dieser Kette schneiden sich auf der Curve $P_{n+m}.H_{n-m}$. Der Beweis für diesen und die folgenden Sätze über Curven ist in den Nummern 1.—6. gegeben.

8. „Bilden die Curven $A_n C_n C'_m B'_m B''_n A''_n$ eine geschlossene Kette der Art, dass die 6 Gruppen Schnittpunkte je zweier auf einander folgender Glieder, mit Ausnahme von n^2-mn der Punkte $(A_n A''_n)$, auf derselben Curve P_{n+m} liegen, so liegen die genannten n^2-mn Punkte sammt den Schnittpunkten je zweier einander gegenüberliegender Glieder der Kette, also im Ganzen $n^2-mn+mn+n^2+mn = 2n^2+mn$ Punkte auf derselben Curve S_n." — Für den Beweis füge man die durch die im Satze hervorgehobenen n^2-mn Punkte jedenfalls gehende Curve H_{n-m} der Curve C'_m und der Curve B'_m bei.

9. „Bilden die Curven A_n, C_n, C'_m, B'_m, B''_n, A''_n eine geschlossene Kette der Art, dass die Schnittpunkte je zweier gegenüberliegender Glieder nebst n^2-mn der Punkte $(A_n A''_n)$ auf derselben Curve S_n liegen, so liegen die Schnittpunkte je zweier auf einander folgender Glieder mit Ausnahme der genannten n^2-mn Punkte auf derselben Curve P_{n+m}, welche auch als das Erzeugniss zweier projectivischer Büschel von den Ordnungen n und m betrachtet werden kann. Vertauscht man in der obigen Kette die Glieder C_n und B''_n, so erhält man eine neue Kette, welcher eine zweite Curve P_{n+m} entspricht. Diese beiden Curven P_{n+m} schneiden einander ausser in mn der Punkte $(A_n A''_n)$ und in den m^2 Punkten $(C'_m B'_m)$ noch in n^2+mn Punkten, die auf einer Curve S'_n liegen, welche von S_n durch C_n und B''_n harmonisch getrennt wird." Fügt man jeder der Curven C'_m, B'_m noch die Curve H_{n-m} bei, welche jedenfalls durch die im Satze hervorgehobenen n^2-mn der Punkte $(A_n A''_n)$ geht, so lässt sich der vorstehende Satz nach den Nummern 4. und 5. noch bedeutend erweitern.

10. Anwendung der Sätze 1.—6. auf Curven zweiter Ordnung. Setzt man in den Nummern 1.—6. $n=1$, so hat man den *Pascal*schen Satz und dessen Umkehrung. Aus Nummer 5. ergiebt sich aber noch folgende Erweiterung desselben: „Sind a, b, c, d, e, f in dieser Reihenfolge die Seiten eines *Pascal*schen Sechseckes — dessen gegenüberliegende Seiten sich auf derselben Geraden s schneiden — so sind sie dies auch für folgende 4 Reihenfolgen:

$$abcdef, \quad abfdec, \quad aecdbf, \quad aefdbc.$$

Die 6 Ecken liegen jedesmal auf einem Kegelschnitt; diese vier Kegelschnitte seien K_1, K_2, K_3, K_4. Die beiden erstern besitzen ein Chordalenpaar, welches

aus der Geraden $(ab)-(de)$ und einer Geraden s_2 besteht, die durch den Schnittpunkt (be) geht und durch c, f von s harmonisch getrennt wird. Die Curven K_3 und K_4 besitzen ein Chordalenpaar, welches aus der Geraden $(ae)-(db)$ und der schon genannten Geraden s_2 besteht. K_1 und K_3 besitzen ein Chordalenpaar, welches aus der Geraden $(af)-(cd)$ und einer Geraden s_3 besteht, welche von s durch e und b harmonisch getrennt wird. Dieselbe Gerade s_3 ist auch eine Chordale für K_2 und K_4, die conjugirte Chordale ist die Gerade $(ac)-(df)$. Die Curven K_1 und K_4 endlich besitzen ein Chordalenpaar, welches aus der Geraden $(bc)-(ef)$ und einer Geraden s_4 besteht, die von s durch a und d harmonisch getrennt wird. Dieselbe Gerade s_4 ist auch eine gemeinsame Chordale für K_2 und K_3, die conjugirte Chordale ist die Gerade $(bf)-(ec)$."

Die vorstehende Erweiterung des *Pascal*schen Satzes kann man auch rein synthetisch beweisen. Dazu ist nur beispielsweise zu zeigen, dass K_1 und K_2 ausser der Chordale $(ab)-(de)$ oder s_2' eine dieser conjugirte Chordale s_2 besitzen, die dadurch bestimmt ist, dass sie von s durch c, f harmonisch getrennt ist. Zu diesem Zwecke erinnern wir daran, dass, wenn eine Gerade g durch einen Basispunkt eines Curvenbüschels zweiter Ordnung geht, und wenn eine Gerade g' durch einen zweiten Basispunkt des Büschels geht, dann die Curven des Büschels auf g und g' zwei einander perspectivische Gebilde erzeugen. Es gehören nun K_1, K_2, $s_2 s_2'$ demselben Büschel an; die Gerade a geht durch den Basispunkt (ab) und schneidet die genannten Curven bezüglich in (af), (ac), (as_2); die Gerade d geht durch den Basispunkt (de) und schneidet die genannten Curven bezüglich in (dc), (df) und (ds_2). Mithin gehen die drei Geraden $(af)-(dc)$, $(ac)-(df)$, $(as_2)-(ds_2)$ durch denselben Punkt, oder m. a. W., s_2 geht durch den Schnittpunkt der Geraden $(af)-(dc)$ und $(ac)-(df)$; dieser Schnittpunkt ist aber von dem Punkte (ad) auf s durch c, f harmonisch getrennt. Ebenso ergiebt sich, dass s_2 durch den Schnittpunkt der Geraden $(bc)-(ef)$ und $(ec)-(bf)$ geht, welcher Punkt von dem Punkte (be) auf s durch c, f harmonisch getrennt wird. Mithin wird die Gerade s_2 selbst von s durch c, f harmonisch getrennt.

11. Für *die Curven dritter Ordnung* ergiebt sich beispielsweise folgender Satz: „Ist C_3 das Erzeugniss der projectivischen Büschel $(A_2 B_2 C_2 \dots)$ und $O(abc\dots)$, ist ferner m eine beliebige Gerade, so erzeugen die projectivischen Büschel $(A_2, am, A_2'', \dots)$ und $(B_2, bm, B_2'', \dots)$ ausser der Geraden m ebenfalls die Curve C_3, wenn nur die Projectivität so bestimmt wird, dass A_2'' und B_2''

einen Punkt mit C_3 gemein haben; es liegen dabei die Punkte (A_2, A_2'', m), $(A_2 b)$, $(C_2 B_2'')$, $(A_2'' c)$ auf derselben Curve S_2." Oder auch: „Ist C_3 das Erzeugniss der projectivischen Büschel $(A_2 B_2 C_2 \ldots)$ und $0(abc\ldots)$, und ist A_2'' eine beliebige durch $(A_2 a)$ gehende Curve, so schneidet diese A_2 noch in zwei Punkten einer Geraden m; die Punkte $(B_2 b)$, $(B_2 m)$ und die 4 Punkte, welche A_2'' ausser $(A_2 a)$ mit C_3 gemein hat, liegen auf derselben Curve B_2'', und die 10 Punkte (A_2, A_2'', m), $(A_2 b)$, $(A_2'' c)$, $(C_2 B_2'')$ liegen auf derselben Curve S_2; die 10 Punkte (B_2, B_2'', m), $(B_2 a)$, $(B_2'' c)$, $(C_2 A_2'')$ liegen endlich auf derselben Curve S_2'."

Einer *Curve vierter Ordnung* C_4 gehören nach Nr. 4. die 6×4 Schnittpunkte der auf einander folgenden Glieder der Kette $A_2 C_2 C_2' B_2' B_2'' A_2''$ an, wenn die 3×4 Schnittpunkte je zweier gegenüberliegender Glieder auf derselben Curve S_2 liegen. Liegen 9 jener 6×4 Punkte auf einer Curve S_2', so zerfällt C_4 in diese Curve S_2' und in eine Curve S_2''. Es können aber höchstens 12 jener 6×4 Punkte auf einer Curve zweiter Ordnung liegen; mithin liegen auch wirklich 12 dieser Punkte auf S_2' und die übrigen 12 auf S_2''. Nimmt man im Besondern an, dass die 8 Punkte $(A_2 C_2)$, $(C_2' B_2')$ und noch ein Punkt von $(B_2'' A_2'')$ auf S_2' liegen, so liegen auch die 3 übrigen der Punkte $(B_2'' A_2'')$ auf S_2', und die 12 Punkte $(A_2'' A_2)$, $(C_2 C_2')$, $(B_2' B_2'')$ liegen auf S_2''. Man kann in diesem Falle die 6 gegebenen Curven auch so zu einer Kette vereinigen, dass S_2' die Schnittpunkte je zweier gegenüberliegender Glieder enthält: S_2 und S_2'' enthalten dann die Schnittpunkte je zweier auf einander folgender Glieder. Endlich kann man auch die 6 Curven so zu einer Kette verbinden, dass S_2'' die Schnittpunkte je zweier gegenüberliegender Glieder enthält, und dass S_2 und S_2' abwechselnd die Schnittpunkte je zweier auf einander folgender Glieder enthalten.

II. Sätze über Flächen.

12. Versteht man unter den Symbolen A_n, B_n, C_n, ..., die in den vorhergehenden Nummern ebene Curven bedeuten, Flächen von der vom Index angezeigten Ordnung, setzt man ferner dem entsprechend an die Stelle der Ausdrücke „n^2 Punkte" oder „mn Punkte" oder „Punkte $(A_n B_n)$" u. dgl. bezüglich die Ausdrücke „räumliche Curve der Ordnung n^2" oder „räumliche Curve der Ordnung mn" oder „Linie $(A_n B_n)$" u. dgl., so lassen sich ganz wie oben folgende Sätze herleiten:

a) „Kann man sich eine Fläche P_{2n} entstanden denken durch zwei projectivische Büschel $(A_n B_n C_n \ldots)$ und $(A'_n B'_n C'_n \ldots)$, und ist: $C_n \equiv A_n + \alpha B_n$, $C'_n \equiv A'_n + \beta B_n$, $A'_n \equiv A_n + \gamma A'_n$, $B'_n \equiv B_n + \delta B'_n$, und $\alpha : \beta = \gamma : \delta$, so kann man sich die Fläche P_{2n} auch entstanden denken aus den projectivischen Büscheln $(A_n A'_n A''_n \ldots)$ und $(B_n B'_n B''_n \ldots)$. Die Gleichung von P_{2n} ist dabei: $\beta A_n B_n = \alpha A'_n B'_n$. Die Schnittlinien $(A_n B'_n)$, $(C_n B''_n)$, $(C'_n A''_n)$ liegen dabei auf derselben Fläche S_n; diese enthält also die Schnittlinien je zweier gegenüberliegender Flächen der Kette $A_n C_n C'_n B_n B''_n A''_n$; je zwei auf einander folgende Glieder dieser Kette schneiden sich in einer der Fläche P_{2n} angehörigen Linie.“

b) „Bilden die Flächen $A_n C_n C'_n B_n B''_n A''_n$ eine geschlossene Kette der Art, dass die 3 Schnittlinien je zweier einander gegenüberliegender Glieder auf einer Fläche S_n liegen, so liegen die Schnittlinien je zweier auf einander folgender Glieder auf einer Fläche P_{2n}, welche auch als das Erzeugniss zweier projectivischer Flächenbüschel der Ordnung n betrachtet werden kann. Man kann aber die 6 gegebenen Flächen auch noch in 3 andern Arten zu einer Kette verbinden, so zwar, dass die Paare gegenüberliegender Glieder identisch bleiben; jeder dieser Ketten entspricht dann eine neue Fläche P_{2n}. Die 4 Ketten sind:

I. $A_n C'_n C_n B_n B_n A_n$; II. $A_n C_n A''_n B'_n B''_n C'_n$; III. $A_n B''_n C'_n B'_n C_n A''_n$;
IV. $A_n B_n A''_n B'_n C_n C'_n$.

Die diesen Ketten entsprechenden Flächen bezeichnen wir bezüglich mit I, II, III, IV. Die Gleichungen dieser Flächen findet man in No. 4. Die Schnittlinie irgend zweier dieser Flächen ist von der Ordnung $4n^2$; dieselbe zerfällt jedoch in eine Linie von der Ordnung $2n^2$ und zwei Linien von der Ordnung n^2; die beiden letztern sind jedesmal auch Schnittlinien von zweien der 6 gegebenen Flächen. Sehen wir von diesen ab und berücksichtigen also nur jene Schnittlinien von der Ordnung $2n^2$, so gilt der Satz: Die Schnittlinien (I, II) und (III, IV) liegen auf einer Fläche der Ordnung n, die von der Fläche S_n durch die Flächen C_n, A_n harmonisch getrennt wird; ferner liegen die Schnittlinien (I, III) und (II, IV) auf einer Fläche der Ordnung n, die von S_n durch C_n, B_n harmonisch getrennt wird; enlich liegen die Schnittlinien (I, IV) und (II, III) auf einer Fläche der Ordnung n, die von S_n durch A_n und B'_n harmonisch getrennt wird.“

c) „Bilden die Flächen $A_n C_n C'_n B_n B'_n A''_n$ eine Kette der Art, dass die 6 Schnittlinien je zweier auf einander folgender Glieder auf einer Fläche P_{2n} liegen, so liegen die 3 Schnittlinien je zweier einander gegenüberliegender

Glieder auf einer Fläche S_n, und P_{2n} kann sowohl als das Erzeugniss zweier projectivischer Büschel $(A_n C_n)$ und $(B'_n C'_n)$ — wobei C_n und C'_n einander entsprechen — betrachtet werden, als auch als das Erzeugniss zweier projectivischer Büschel $(A_n A''_n)$ und $(B'_n B''_n)$; dabei entsprechen A''_n und B''_n einander.

13. *a*) „Kann man sich eine Fläche P_{n+m} entstanden denken durch zwei projectivische Büschel $(A_n B_n C_n \ldots)$ und $(A'_m B'_m C'_m \ldots)$, und ist H_{n-m} — vorausgesetzt, dass $n > m$ sei — eine beliebige Fläche der Ordnung $n-m$, so kann man sich die Fläche $P_{n+m}.H_{n-m}$ entstanden denken durch die projectivischen Büschel $(A_n B_n C_n \ldots)$ und $(A'_m.H_{n-m}, B'_m.H_{n-m}, C'_m.H_{m-n}, \ldots)$. Ist nun $C_n \equiv A_n + \alpha B_n$, $C'_m.H_{n-m} \equiv A'_m.H_{n-m} + \beta B'_m.H_{n-m}$, $A''_n \equiv A_n + \gamma A'_m.H_{n-m}$, $B''_n \equiv B_n + \delta B'_m.H_{n-m}$, und $\alpha:\beta = \gamma:\delta$, so kann man sich die Fläche $P_{n+m}.H_{n-m}$ auch entstanden denken durch die projectivischen Büschel $(A_n, A'_m.H_{n-m}, A''_n, \ldots)$ und $(B_n, B'_m.H_{n-m}, B''_n, \ldots)$. Die Schnittlinien $(A_n, B'_m.H_{n-m})$, (C_n, B''_n) und $(C'_m.H_{n-m}, A''_n)$ liegen dabei auf derselben Fläche S_n; dabei sind aber die Schnittlinien (A_n, H_{n-m}) und (A''_n, H_{n-m}) identisch. Die 3 genannten Flächenpaare, deren Schnittlinien auf S_n liegen, sind die Paare gegenüberliegender Glieder der Kette A_n, C_n, $C'_m.H_{n-m}$, $B'_m.H_{n-m}$, B''_n, A''_n; je zwei auf einander folgende Glieder dieser Kette schneiden sich auf $P_{n+m}.H_{n-m}$."

b) „Bilden die Flächen $A_n C_n C'_m B'_m B''_n A''_n$ eine geschlossene Kette der Art, dass die Schnittlinie $(A_n A''_n)$ in zwei Linien von den Ordnungen nm und $n(n-m)$ zerfällt, und dass diese letztere Linie, sowie die Durchschnittslinien je zweier einander gegenüberliegender Glieder der Kette auf derselben Fläche S_n liegen, so liegt die genannte Linie der Ordnung nm sowie die sonstigen Schnittlinien je zweier auf einander folgender Glieder der Kette auf derselben Fläche P_{n+m}. Vertauscht man in obiger Kette die Glieder C_n und B''_n, so erhält man eine neue Fläche P_{n+m}, welche jene erstere ausser in zwei Linien von den Ordnungen m^2 und mn noch in einer Linie von der Ordnung $n(n+m)$ schneidet, durch welche es eine Fläche der Ordnung n giebt, die von S_n durch C_n und B''_n harmonisch getrennt wird." Berücksichtigt man, dass es durch die Linie von der Ordnung $n(n-m)$ eine einzige Fläche H_{n-m} giebt, und fügt man diese Fläche sowohl der Fläche C'_m als auch der Fläche B'_m bei, so kann man unsern Satz noch aus No. 12. *b*) erweitern.

c) „Bilden die Flächen $A_n C_n C'_m B'_m B''_n A''_n$ eine geschlossene Kette der Art, dass die Linie $(A_n A''_n)$ in zwei Linien von den Ordnungen $n(n-m)$ und mn zerfällt, und dass diese letztere Linie sowie die andern 5 Schnittlinien

je zweier auf einander folgender Glieder der Kette auf derselben Fläche P_{n+m} liegen, so liegen die Durchschnittslinien je zweier einander gegenüberliegender Glieder sammt jener Linie von der Ordnung $n(n-m)$ auf derselben Fläche S_n.“

14. Für das *einmanteliges Hyperboloid* folgt aus No. 13. der Satz: „Ist A, C, C', B', B'', A'' eine geschlossene Kette von 6 Ebenen der Art, dass je zwei auf einander folgende Ebenen sich in einer Geraden eines einmanteligen Hyperboloids schneiden, so liegen die Geraden (AB'), (CB''), $(C'A'')$ in derselben Ebene S.“ Sind a, b, c drei Gerade der einen Schaar einer Regelfläche zweiter Ordnung, und sind p, q, r drei Gerade der anderen Schaar, so lassen sich aus den durch irgend zwei dieser 6 Geraden gehenden Ebenen 6 verschiedene solcher Ketten bilden, nämlich:

$$apbqcr, \quad aqbrcp, \quad arbpcq,$$
$$apbrcq, \quad arbqcp, \quad aqbpcr.$$

Für die erste dieser Ketten sind dann die Ebenen A, C, C', B', B'', A'' beziehlich identisch mit den Ebenen ap, pb, bq, qc, cr, ra, und so ähnlich bei den folgenden Ketten. Jeder der 6 Ketten entspricht eine Ebene S; die Ebene S der ersten Kette ist z. B. die durch die Punkte (aq), (br), (cp) gehende Ebene. Von den 3 ersteren Ketten haben je zwei drei nicht auf einander folgende Ebenen gemein; die entsprechenden drei Ebenen S gehen durch dieselbe Gerade, in welcher der Schnittpunkt der Ebenen ap, br, cq, der Schnittpunkt der Ebenen ar, bq, cp, und der Schnittpunkt der Ebenen aq, bp, cr liegen. Ebenso haben je zwei der 3 letzten Ketten drei nicht auf einander folgende Ebenen gemein; die drei entsprechenden Ebenen S gehen ebenfalls durch dieselbe Gerade, in welcher die 3 Schnittpunkte (ap, bq, cr), (aq, br, cp), (ar, bp, cq) liegen.

Nach dem Reciprocitätsgesetze folgt nun auch ferner, dass die 3 Verbindungslinien der Punktepaare (ap) und (qc), (pb) und (cr), (bq) und (ra) durch denselben Punkt σ gehen; in derselben Weise ordnet sich jeder der 5 übrigen Ketten auch ein Punkt σ zu. Die Punkte σ der drei ersteren Ketten liegen in einer Geraden, in welcher sich die drei Verbindungsebenen $(ap)-(br)-(cq)$, $(ar)-(bq)-(cp)$, $(aq)-(bp)-(cr)$ schneiden. Ebenso liegen die den 3 letzteren Ketten entsprechenden Punkte σ in einer Geraden, in welcher sich die 3 Verbindungsebenen $(ap)-(bq)-(cr)$, $(aq)-(br)-(cp)$, $(ar)-(bp)-(cq)$ schneiden.

Bilden die Ebenen A, C, C', B', B'', A'' eine geschlossene Kette der Art, dass die 3 Schnittgeraden je zweier gegenüberliegender Ebenen, nämlich

(AB'), (CB''), $(C'A'')$ in derselben Ebene S liegen, so liegen die 6 Geraden, in welchen sich je zwei auf einander folgende Ebenen der Kette schneiden, auf derselben Regelfläche zweiter Ordnung. Aus den gegebenen 6 Ebenen lassen sich im Ganzen 4 Ketten der betreffenden Eigenschaft bilden, nämlich:

I. $ACC'B'B''A''$, II. $ACA''B'B''C'$, III. $AB''C'B'CA''$, IV. $AB''A''B'CC'$.

Jeder dieser 4 Ketten entspricht eine Regelfläche. Irgend zwei von ihnen schneiden einander in zwei Geraden derselben Ebene, so z. B. haben die Flächen I. und II. die Geraden (AC) und $(B'B'')$ mit einander gemein, und diese Geraden liegen in einer Ebene, weil die 4 Ebenen A, C, B', B'' sich in demselben Punkte von S schneiden. Ausserdem schneiden daher irgend zwei jener Regelflächen einander noch in einer ebenen Curve zweiter Ordnung, welche immer reell ist. Diese Curve liegt für I. und II. in derselben Ebene S_2, in welcher auch die betreffende Curve für III. und IV. liegt. Ebenso liegen die ebenen Curven (I, III) und (II, IV) in derselben Ebene S_3, und die ebenen Curven (I, IV) und (II, III) liegen in derselben Ebene S_4. Dabei geht S_2 durch die Gerade $(C'A''S)$ und wird von S durch C', A'' harmonisch getrennt; ebenso sind (SCS_3B'') und (SAS_4B') harmonische Ebenenbüschel."

Diese Sätze über Regelflächen sind im Obigen — abgesehen von dem allgemeinen Beweise in Nr. 12. — auch für sich rein synthetisch bewiesen durch die zugesetzten Andeutungen; wo diese fehlen, mag der Leser sie leicht ergänzen. Den letzten Satz kann man, wenn man das ganze Gebilde durch eine beliebige Ebene schneidet, aus dem entsprechenden in Nr. 10. für Curven zweiten Grades synthetisch bewiesenen Satze ableiten.

15. Anwendung auf *Flächen dritter Ordnung.* „Schneiden sich zwei Flächen zweiter Ordnung A_2 und A_2'' in zwei ebenen Curven r_2 und r_2', und liegt r_2' sowie jede andere Schnittcurve irgend zweier auf einander folgender Glieder der Kette $A_2C_2C_1'B_1'B_2''A_2''$ in derselben Fläche F_3 dritter Ordnung, so liegen die Curven (A_2B_1'), (C_2B_2''), $(C_1'A_2'')$ und r_2 auf derselben Fläche zweiter Ordnung und umgekehrt." Hierbei schneiden C_1' und B_1' einander in einer der 27 Geraden von F_3 und da C_2 durch die in C_1 liegende ebene Curve geht, so schneidet es F_3 noch in einer Raumcurve vierter Ordnung, durch welche es noch unendlich viele Flächen zweiter Ordnung giebt, die sämmtlich F_3 noch in je einer ebenen Curve zweiter Ordnung schneiden, deren Ebene durch die Gerade $(C_1'B_1')$ geht; mithin — da A_2 eine von jenen Flächen ist — geht auch die Ebene von r_2' durch diese Gerade. Man kann daher den obigen Satz auch so aussprechen: „Gehört die Gerade g der Fläche F_3 an, und sind R_1,

C'_1, B'_1 drei Ebenen durch g, so schneidet jede von ihnen die Fläche noch in je einer Curve zweiter Ordnung; legt man durch die Curve in R_1 zwei beliebige Flächen A_2 und A''_2, so schneiden diese einander noch in einer zweiten Curve r_2 zweiter Ordnung, und sie schneiden F_3 noch in zwei Raumcurven r_4 und r'_4. Durch r_4 und die ebene Curve in C'_1 giebt es dann eine Fläche C_2, durch r'_4 und die ebene Curve in B'_1 giebt es eine Fläche B''_2, und es liegen r_2 sowie die Curven $(A_2 B'_1)$, $(C_2 B''_2)$, $(C'_1 A''_2)$ auf derselben Fläche S_2." Bekanntlich bilden die 27 Geraden einer Fläche F_3 45 Dreiecke, wobei jede Gerade in 5 Dreiecken vorkommt. Bezeichnet man die 27 Geraden mit den Ziffern von 1 bis 27, so kann man jene Dreiecke so bezeichnen:

1.2.3, 1.4.5, 1.6.7, 1.8.9, 1.10.11, 2.12.13, 2.14.15, 2.16.17, 2.18.19,
3.20.21, 3.22.23, 3.24.25, 3.26.27, 4.12.20, 4.14.22, 4.16.24, 4.18.26,
5.13.21, 5.15.23, 5.17.25, 5.19.27, 6.12.23, 6.14.21, 6.17.26, 6.19.24,
7.13.22, 7.15.20, 7.16.27, 7.18.25, 8.12.25, 8.15.26, 8.16.21, 8.19.22,
9.13.24, 9.14.27, 9.17.20, 9.18.23, 10.12.27, 10.15.24, 10.17.22, 10.18.21,
11.13.26, 11.14.25, 11.16.23, 11.19.20.

Nimmt man nun 1 als die oben genannte Gerade g, und die Ebenen 1.2.3, 1.4.5, 1.6.7 bezüglich als die Ebenen R_1, C'_1, B'_1, so kann man das Ebenenpaar 2.12.13, 3.20.21 als Fläche A_2, und das Ebenenpaar 2.17.16, 3.26.27 als Fläche A''_2 nehmen; die Curve r_2 ist dann das Geradenpaar (2.12.13, 3.26.27), (3.20.21, 2.17.16). Die Geraden 12, 13, 20, 21 bilden die Curve r_4; durch sie und die Geraden 4, 5 geht das Ebenenpaar 4.12.20, 5.13.21, dieses Paar ist demnach die Fläche C_2. Die Geraden 17, 16, 26, 27 bilden die Curve r'_4; durch sie und die Geraden 6, 7 geht das Ebenenpaar 6.17.26, 7.16.27, welches also die Fläche B''_2 ist. Demnach liegen die 10 Geraden (2.12.13, 3.26.27), (3.20.21, 2.17.16), (1.6.7, 2.12.13), (1.6.7, 3.20.21), (4.12.20, 6.17.26), (4.12.20, 7.16.27), (5.13.21, 7.16.27), (5.13.21, 6.17.26), (1.4.5, 2.17.16), (1.4.5, 3.27.26) auf derselben Regelfläche. Die erste, vierte, fünfte, siebente und neunte Gerade gehören der einen Geradenschaar an; die 5 andern gehören der andern Schaar an. In dieser Bemerkung liegt zugleich ein directer Beweis unseres Satzes. — Die oben auftretenden Dreiecke kann man auch so schreiben:

$$(\alpha.)\ \begin{cases} 1.\ 2.\ 3 \\ 4.12.20 \\ 5.13.21 \end{cases} \quad \text{und} \quad (\beta.)\ \begin{cases} 1.\ 2.\ 3 \\ 6.17.26 \\ 7.16.27. \end{cases}$$

Dabei erhält man immer eines der auftretenden Dreiecke, wenn man in (α.) oder (β.) eine horizontale oder eine vertikale Reihe nimmt. Die Ebenen 1.2.3, 4.12.20, 5.13.21 bilden ein Trieder T, die 3 Ebenen 1.4.5, 2.12.13, 3.20.21 bilden das jenem conjugirte Trieder T_1 (vgl. die *Steiner*schen Sätze über Flächen dritten Grades, sowie das Werk von Herrn *Sturm* und den Aufsatz von Herrn *Cremona* in diesem Journal über denselben Gegenstand). Ebenso bilden die Ebenen 1.2.3, 6.17.26, 7.16.27 ein Trieder T', und die Ebenen 1.6.7, 2.17.16, 3.26.27 bilden das jenem conjugirte Trieder T_1'; die beiden Triederpaare haben die Ebene 1.2.3 gemein. Man kann daher obigen Satz auch so aussprechen: „Sind T, T_1 und T', T_1' zwei Paare conjugirter Trieder von F_3, und haben T und T' eine Ebene gemein, so schneiden die beiden andern Ebenen von T die beiden andern Ebenen von T' in 4 Geraden, welche mit den 6 Geraden, in welchen die drei Ebenen von T_1 die 3 Ebenen von T_1' ausser in den 3 Geraden, die in der den Triedern T und T' gemeinsamen Ebene liegen, schneiden, auf derselben Regelfläche R liegen.“ — Das Dreieck 1.2.3 kommt in 16 Triedern, und also auch in 16 Paaren conjugirter Trieder vor. Das Triederpaar (TT_1) hat demnach mit 15 Triederpaaren das Dreieck 1.2.3 gemein; unter diesen giebt es aber drei, welche auch noch das Dreieck 1.4.5, drei, welche noch das Dreieck 2.12.13, und drei, welche noch das Dreieck 3.20.21 mit (TT_1) gemein haben. Mithin giebt es nur 6 Triederpaare, welche mit (TT_1) blos das Dreieck 1.2.3 gemein haben. Folglich ordnen sich dem Dreiecke 1.2.3 nur $\frac{16.6}{2} = 48$ Regelflächen R zu, und da sich jedem andern der 45 Dreiecke dieselbe Anzahl zuordnet, so ergiebt sich der Satz: „Jeder Fläche F_3 ordnen sich $45.48 = 2160$ Regelflächen R zu.“

16. Es bleibt dem Leser überlassen, die den vorstehenden Sätzen reciproken Sätze selbst zu formuliren.

Ahrweiler, 9. Januar 1870.

Courbure en un point multiple d'une surface.

(Par M. *L. Painvin* à Lyon.)

1. Je suppose qu'une surface ait un point multiple d'ordre p; si l'on prend ce point pour origine des coordonnées, l'équation de la surface aura la forme suivante:

$$(1.)\quad S=\varphi_p(x,y,z)+\varphi_{p+1}(x,y,z)+\varphi_{p+2}(x,y,z)+\cdots+\varphi_m(x,y,z)=0,$$

φ_i désignant une fonction de degré i et homogène par rapport aux variables x, y, z; le *cône tangent* à la surface au point multiple d'ordre p a pour équation

$$(2.)\quad \varphi_p(x,y,z) = 0.$$

Considérons une génératrice quelconque de ce cône, les équations de cette génératrice seront

$$(3.)\ (G)\quad \frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c},$$

les constantes a, b, c devant satisfaire à l'équation de condition

$$(4.)\quad \varphi_p(a,b,c)=0,\quad \text{ou}\quad a\frac{\partial\varphi_p}{\partial a}+b\frac{\partial\varphi_p}{\partial b}+c\frac{\partial\varphi_p}{\partial c}=0;$$

l'équation du plan tangent au cône (2.) suivant la génératrice G sera

$$(5.)\ (T)\quad x\frac{\partial\varphi_p}{\partial a}+y\frac{\partial\varphi_p}{\partial b}+z\frac{\partial\varphi_p}{\partial c} = 0.$$

Je vais maintenant étudier la courbure d'une section de la surface S par un plan quelconque passant par le point multiple O.

2. L'équation d'un plan quelconque, passant par la génératrice G, pourra s'écrire

$$(6.)\ (P)\quad z = \alpha x+\beta y,$$

α et β étant des constantes arbitraires liées par la seule relation

$$(6\text{bis.})\quad c = \alpha a+\beta b.$$

Si nous imaginons, dans le plan (P), un cercle tangent en O à la branche de la courbe de section qui touche la génératrice (G), ce cercle pourra être regardé comme situé sur une sphère qui touche en O le plan tangent (T) au cône (2.) suivant la génératrice (G); l'équation de cette sphère est

$$(7.)\quad C = \lambda\Big(x\frac{\partial\varphi_p}{\partial a}+y\frac{\partial\varphi_p}{\partial b}+z\frac{\partial\varphi_p}{\partial c}\Big)+x^2+y^2+z^2 = 0,$$

λ étant une constante arbitraire.

Le plan (P) coupe la surface S et la sphère C suivant deux courbes S' et C'; le nombre des points coïncidant avec O et communs aux deux courbes S' et C' est évidemment égal au nombre des points coïncidant avec O et communs aux projections S_1 et C_1 de ces deux courbes sur un plan quelconque, et inversement, pourvu que le plan de projection ait une position arbitraire par rapport au plan sécant.

Les projections, sur le plan des xy, des deux courbes de section s'obtiendront en remplaçant z par sa valeur (6.) dans les équations (1.) et (7.).

Pour la sphère (C), on trouve

$$(8.) \qquad C_1 = \mu(bx-ay)+x^2+y^2+(\alpha x+\beta y)^2 = 0$$

après avoir posé

$$(8\text{ bis.}) \qquad \mu = \lambda \frac{\frac{\partial \varphi_p}{\partial a} + \alpha \frac{\partial \varphi_p}{\partial c}}{b};$$

pour la surface (S), on aura

$$(9.) \quad S_1 = (bx-ay)\psi(x,y)+\varphi_{p+1}(x,y,\alpha x+\beta y)+\varphi_{p+2}(x,y,\alpha x+\beta y)+\cdots = 0,$$

$\psi(x,y)$ étant une fonction homogène du degré $(p-1)$ définie par l'identité

$$(10.) \qquad \varphi_p(x,y,\alpha x+\beta y) = (bx-ay)\psi(x,y).$$

On a le droit d'écrire cette identité, puisque la projection de la courbe de section sur le plan des xy doit avoir pour tangente la projection de la génératrice G.

3. Notation: Je désignerai par $N((C, C'))$ le nombre des points coïncidant avec l'origine des coordonnées et communs aux deux courbes C et C'.

Ces préliminaires posés, je forme l'équation

$$\Sigma = \mu S_1 - C_1 . \psi(x,y) = 0,$$

c. à. d. en développant

$$(11.) \quad \begin{cases} \Sigma = [\mu\varphi_{p+1}(x,y,\alpha x+\beta y) - \psi(x,y)\{x^2+y^2+(\alpha x+\beta y)^2\}] \\ \qquad + \mu\varphi_{p+2}(x,y,\alpha x+\beta y) + \mu\varphi_{p+3}(x,y,\alpha x+\beta y)+\cdots = 0; \end{cases}$$

et l'on a visiblement

$$N((S_1, C_1)) = N((\Sigma, C_1)).$$

Or si λ reste arbitraire, $(bx-ay)$ n'est pas diviseur dans les termes du moindre degré dans l'équation de Σ; les courbes C_1 et Σ ont donc $(p+1)$ points seulement communs et coïncidant avec l'origine O; c'est dire que le cercle C' a, avec la courbe S' de section, un *contact effectif* du 1er ordre seulement. Pour que le contact effectif soit d'un ordre plus élevé, il faut et il suffit que

$(bx-ay)$ soit diviseur de l'ensemble des termes du moindre degré dans l'équation de Σ, et pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit que l'ensemble de ces termes s'annule lorsqu'on y fait $x=a$, $y=b$. On trouve ainsi la condition

$$(1^\circ.)\quad \lambda\frac{\frac{\partial\varphi_p}{\partial a}+\alpha\frac{\partial\varphi_p}{\partial c}}{b}\cdot\varphi_{p+1}(a,b,\alpha a+\beta b)-\psi(a,b).[a^2+b^2+(\alpha a+\beta b)^2]=0.$$

Différentions l'identité (10.) par rapport à x, par exemple; puis, dans l'identité ainsi obtenue, faisons $x=a$, $y=b$, et ayons égard à la relation (6 bis.), il vient

$$(2^\circ.)\quad \frac{\partial\varphi_p}{\partial a}+\alpha\frac{\partial\varphi_p}{\partial c} = b\,\psi(a,b).$$

D'après cette dernière égalité, la relation (1°.) donne:

$$(12.)\quad \lambda\varphi_{p+1}(a,b,c) = a^2+b^2+c^2;$$

on a toujours la condition

$$(12\,\text{bis.})\quad \varphi_p(a,b,c) = 0.$$

Remarquons que la valeur de λ est indépendante des arbitraires α et β; nous en verrons plus loin les conséquences.

4. Pour déterminer les éléments du cercle osculateur, je remarque que son centre est le pied de la perpendiculaire abaissée du centre de la sphère (7.) sur le plan sécant (6.); le carré de son rayon sera égal au carré du rayon de la sphère moins le carré de la distance du centre de cette sphère au plan sécant.

Or les coordonnées du centre de la sphère (7.) sont

$$(13.)\quad x_0=-\frac{\lambda}{2}\frac{\partial\varphi_p}{\partial a},\quad y_0=-\frac{\lambda}{2}\frac{\partial\varphi_p}{\partial b},\quad z_0=-\frac{\lambda}{2}\frac{\partial\varphi_p}{\partial c};$$

les équations d'une droite, passant par ce point et perpendiculaire au plan (6.), seront

$$(14.)\quad \frac{x+\frac{\lambda}{2}\frac{\partial\varphi_p}{\partial a}}{\alpha}=\frac{y+\frac{\lambda}{2}\frac{\partial\varphi_p}{\partial b}}{\beta}=\frac{z+\frac{\lambda}{2}\frac{\partial\varphi_p}{\partial c}}{-1};$$

en joignant à ces dernières équations l'équation (6.) du plan sécant, savoir

$$(14\,\text{bis.})\quad z=\alpha x+\beta y,\qquad \text{avec}\qquad (15.)\quad c=\alpha a+\beta b,$$

on aura le centre du cercle osculateur. Le rayon R du cercle osculateur sera

$$(16.)\quad R^2=\frac{\lambda^2}{4}\left[\left(\frac{\partial\varphi_p}{\partial a}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi_p}{\partial b}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi_p}{\partial c}\right)^2\right]-\frac{\lambda^2}{4}\frac{\left[\alpha\frac{\partial\varphi_p}{\partial a}+\beta\frac{\partial\varphi_p}{\partial b}-\frac{\partial\varphi_p}{\partial c}\right]^2}{\alpha^2+\beta^2+1};$$

λ a la valeur définie par l'égalité (12.).

Remarque. Il est facile de constater que le cercle ainsi obtenu a, avec la courbe de section, *un contact effectif* du second ordre, au moins. En effet, eu égard à la valeur (12.), l'équation (11.) de la courbe Σ prend la forme:

$$(17.)\quad \Sigma' = (bx-ay)\chi(x,y)+\mu\varphi_{p+2}(x,y,\alpha x+\beta y)+\mu\varphi_{p+2}(x,y,\alpha x+\beta y)+\cdots = 0,$$

formons maintenant la combinaison

$$\Sigma'' = \mu.\Sigma' - C_1.\chi(x,y) = 0,$$

c. à. d. en développant

$$(18.)\quad \begin{cases} \Sigma'' = [\mu^2\varphi_{p+2}(x,y,\alpha x+\beta y) - \chi(x,y)\{x^2+y^2+(\alpha x+\beta y)^2\}] \\ \qquad +\mu^2\varphi_{p+3}(x,y,\alpha x+\beta y)+\cdots = 0. \end{cases}$$

Or on a visiblement

$$N((S_1, C_1)) = N((\Sigma', C_1)) = N((\Sigma'', C_1));$$

d'ailleurs les courbes C_1 et Σ'' ont, en général, $(p+2)$ points communs et coïncidant avec l'origine O; il peut arriver dans certains cas que ce nombre soit plus élevé; il résulte de là que le cercle précédemment obtenu a un contact effectif du second ordre au moins avec la courbe de section.

5. Lorsque le plan sécant, passant par la génératrice G, est perpendiculaire au plan tangent (T), c. à. d. lorsque la *section est normale*, le rayon de courbure a pour valeur

$$(19.)\quad 2R_0 = \frac{(a^2+b^2+c^2)}{\varphi_{p+1}(a,b,c)}\sqrt{\left(\frac{\partial\varphi_p}{\partial a}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi_p}{\partial b}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi_p}{\partial c}\right)^2}.$$

Le rayon de courbure est nul quand le plan sécant, passant par la génératrice G, touche le cône tangent à la surface S en son point multiple.

Lorsque la génératrice G est une des *tangentes inflexionnelles* de la surface S, le rayon de courbure est constamment infini quelle que soit la position du plan sécant autour de cette génératrice. On sait en effet que lorsqu'une surface possède un point multiple d'ordre p, il y a $p(p+1)$ droites rencontrant la surface en $(p+2)$ points coïncidant avec le point multiple; ces droites, que je nommerai tangentes inflexionnelles, sont les tangentes communes aux deux cônes

$$\varphi_p(x,y,z) = 0, \qquad \varphi_{p+1}(x,y,z) = 0.$$

6. Le cercle osculateur est situé sur la sphère (7.); comme la valeur (12.) de λ est indépendante de α et β, il en résulte que, lorsque le plan sécant tourne autour de la génératrice G, les cercles de courbure, tangents en O à la droite G, restent toujours sur une sphère fixe. Le lieu des centres

de ces cercles est donc l'intersection d'une sphère touchant en O le plan T (5.), de rayon sous-double de celui de la sphère (7.), par un plan passant par le point O et perpendiculaire à la génératrice. Le lieu de ces centres est, parsuite, défini par les équations

$$(20.)\quad \begin{cases} ax+by+cz=0, \\ 2(x^2+y^2+z^2)\varphi_{p+1}(a,b,c)+(a^2+b^2+c^2)\left(x\frac{\partial\varphi_p}{\partial a}+y\frac{\partial\varphi_p}{\partial b}+z\frac{\partial\varphi_p}{\partial c}\right)=0, \\ \varphi_p(a,b,c)=0. \end{cases}$$

On arriverait facilement à ce résultat en éliminant α, β et λ, entre les équations (12.), (14.), (14bis.) et (15.).

7. De l'analyse qui précède nous concluons ce premier théorème:

Théorème I. *Lorsqu'une surface possède un point multiple, O, d'ordre p, et qu'un plan sécant tourne autour d'une génératrice fixe, G, du cône tangent, le lieu des centres des cercles osculateurs en O à la branche de courbe qui touche cette génératrice, est un cercle situé dans un plan perpendiculaire à la droite G et touchant en O le plan tangent au cône suivant cette génératrice. Le théorème de Meunier est donc encore vrai dans le cas d'un point multiple, pourvu que le plan sécant tourne autour d'une tangente proprement dite à la surface en ce point multiple.*

Lorsque la génératrice G est une des $p(p+1)$ tangentes inflexionnelles de la surface S en son point multiple, le rayon de courbure est infini; le lieu des centres est la droite de l'infini située dans le plan perpendiculaire à cette génératrice.

8. Si le plan sécant tourne d'une manière quelconque autour du point multiple, le lieu des centres des cercles osculateurs à toutes les sections en ce point multiple s'obtiendra en éliminant a, b, c, entre les trois équations homogènes (20.). L'équation résultante sera, par rapport à x, y, z, du degré

$$(1.)\quad p(p+1)+2.p.1+0.1(p+1), \quad \text{c. à. d.} \quad p(p+3);$$

le lieu des centres de courbure est donc une surface d'ordre $p(p+3)$.

9. Ajoutons que, pour cette surface, l'origine est un point multiple d'ordre $p(p+2)$. Considérons en effet une droite arbitrairement choisie et passant par l'origine:

$$(D)\quad \frac{x}{A}=\frac{y}{B}=\frac{z}{C}=\varrho;$$

ϱ est la distance à l'origine du point (x,y,z) de cette droite; A, B, C, sont des quantités déterminées. Cherchons les intersections de cette droite avec

la surface définie par les équations (20.); on trouve après avoir remplacé x, y, z, par les valeurs qui précèdent et supprimé la solution $\varrho = 0$:

$$(21.)\quad \begin{cases} 2\varrho(A^2+B^2+C^2).\varphi_{p+1}(a,b,c)+(a^2+b^2+c^2)\left[A\dfrac{\partial\varphi_p}{\partial a}+B\dfrac{\partial\varphi_p}{\partial b}+C\dfrac{\partial\varphi_p}{\partial c}\right]=0, \\ Aa+Bb+Cc=0, \\ \varphi_p(a,b,c)=0. \end{cases}$$

Si on élimine a, b, c, entre les équations (21.), on aura une équation en ϱ qui déterminera tous les points, distincts de l'origine, où la droite (D) rencontre la surface lieu des centres. Or l'équation résultante sera, par rapport à ϱ, du degré

$$1.1.p+0.p(p+1)+0.1.(p+1), \quad \text{c. à. d.} \quad p.$$

Ainsi une droite quelconque, passant par l'origine, ne rencontre la surface lieu des centres qu'en p points distincts de l'origine; il y a, par conséquent, $[p(p+3)-p]$ points d'intersection confondus avec cette origine, laquelle est, par suite, pour la surface en question un point multiple d'ordre $p(p+2)$.

10. Remarquons encore que le cône des directions asymptotiques de la surface lieu des centres se compose de p fois le cône imaginaire $(x^2+y^2+z^2=0)$, et de $p(p+1)$ plans respectivement perpendiculaires aux tangentes inflexionnelles de la surface proposée S en son point multiple.

Cherchons en effet la trace de la surface, lieu des centres, sur le plan de l'infini; pour cela, remplaçons x, y, z, par $\frac{x}{t}$, $\frac{y}{t}$, $\frac{z}{t}$, dans les équations (20.), puis faisons $t=0$; il reste

$$(22.)\quad \varphi_{p+1}(a,b,c)=0, \quad \varphi_p(a,b,c)=0, \quad ax+by+cz=0,$$

après avoir supprimé la solution $x^2+y^2+z^2=0$. Or les deux premières équations admettent $p(p+1)$ solutions en $\frac{a}{c}$, $\frac{b}{c}$; ce sont n° [5.] les directions des $p(p+1)$ tangentes inflexionnelles de la surface S; à chacune de ces solutions correspond, d'après la troisième des équations (22.), un plan perpendiculaire à la direction de la tangente inflexionnelle. Les trois équations (22.) déterminent donc $p(p+1)$ plans passant par l'origine et respectivement perpendiculaires aux tangentes inflexionnelles de la surface S. Le cône des directions asymptotiques se compose donc d'abord de ces $p(p+1)$ plans; il comprend, en outre, un certain nombre de fois le cône $x^2+y^2+z^2=0$; et comme le cône des directions asymptotiques est du degré $p(p+3)$, il devra donc renfermer ce dernier cône un nombre de fois marqué par l'expression $\frac{p(p+3)-p(p+1)}{2}$ ou p.

11. Cherchons la transformée par rayons vecteurs réciproques de la surface, lieu des centres de courbure, en prenant le point O pour pôle de transformation.

Si x, y, z, sont les coordonnées d'un point quelconque m, et si $\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z}$ sont les coordonnées du point correspondant M, les formules de la transformation sont

$$\frac{x}{\mathrm{x}} = \frac{y}{\mathrm{y}} = \frac{z}{\mathrm{z}} = \frac{\mathrm{k}^2}{\mathrm{x}^2+\mathrm{y}^2+\mathrm{z}^2}.$$

Si l'on substitue ces valeurs de x, y, z, dans les équations (20.), on trouve:

$$(23.)\quad \begin{cases} \mathrm{k}^2\varphi_{p+1}(a,b,c)+\frac{1}{2}(a^2+b^2+c^2)\left(\mathrm{x}\frac{\partial\varphi_p}{\partial a}+\mathrm{y}\frac{\partial\varphi_p}{\partial b}+\mathrm{z}\frac{\partial\varphi_p}{\partial c}\right)=0, \\ a\mathrm{x}+b\mathrm{y}+c\mathrm{z}=0, \\ \varphi_p(a,b,c)=0. \end{cases}$$

Le résultat de l'élimination de a, b, c, entre les équations (23.) sera, par rapport à $\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z}$, du degré

$$1.p.1+1.p(p+1)+0.1.(p+1), \quad \text{c. à. d.} \quad p(p+2);$$

c'est l'ordre de la transformée.

En raisonnant comme au n° [9.], on verrait que l'origine O est, pour cette dernière surface, un point multiple d'ordre $p(p+1)$.

12. De là résulte la proposition suivante:

Théorème II. *Lorsqu'une surface S possède un point O, multiple d'ordre p; si un plan tourne autour du point O, le lieu des centres des cercles osculateurs en O aux diverses branches des sections faites par ce plan, est une surface (Γ) d'ordre $p(p+3)$.*

Le point O est un point multiple d'ordre $p(p+2)$ pour la surface (Γ); le cône des directions asymptotiques de cette surface se compose de p fois le cône imaginaire $x^2+y^2+z^2=0$ et de $p(p+1)$ plans respectivement perpendiculaires aux tangentes inflexionnelles de la surface S relatives à son point multiple.

Si l'on prend le point O pour pôle de transformation, la transformée par rayons vecteurs réciproques de la surface (Γ) est une surface d'ordre $p(p+2)$; le point O est multiple d'ordre $p(p+1)$ pour cette dernière surface.

13. J'énoncerai encore cette proposition:

Théorème III. *Les plans qui, passant par le point O multiple d'ordre p, coupent la surface S suivant des courbes pour lesquelles un des rayons de*

courbure en O est égal à une longueur donnée, enveloppent un cône de la classe $2p(p+2)$.

En effet, R étant la longueur donnée du rayon de courbure, les équations (12.), (15.) et (16.) donnent

$$(24.)\quad \begin{cases} 4R^2(\alpha^2+\beta^2+1)[\varphi_{p+1}(a,b,c)]^2 = \\ \left[(\alpha^2+\beta^2+1)\left(\left(\frac{\partial\varphi_p}{\partial a}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi_p}{\partial b}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi_p}{\partial c}\right)^2\right)-\left(\alpha\frac{\partial\varphi_p}{\partial a}+\beta\frac{\partial\varphi_p}{\partial b}-\frac{\partial\varphi_p}{\partial c}\right)^2\right], \\ a\alpha+b\beta = c, \qquad \varphi_p(a,b,c) = 0. \end{cases}$$

Pour déterminer la classe du cône enveloppé par le plan mobile

$$z = \alpha x+\beta y,$$

je remarquerai que α et β peuvent être regardées comme les coordonnées tangentielles de la trace de ce plan sur le plan $z=1$; l'enveloppe de cette trace s'obtiendra donc en éliminant $a, b, c,$ entre les trois équations (24.). Or l'équation résultante sera, par rapport à $\alpha, \beta,$ du degré

$$2.(1.p)+1.(p(2p+2))+0.1.(2p+2), \quad \text{c. à. d.} \quad 2p(p+2);$$

c'est la classe du cône enveloppé par le plan mobile.

---

14. Les propriétés que je viens d'indiquer, et je crois qu'elles n'ont jamais été signalées, ont été établies en supposant que le point multiple considéré est le plus général de son espèce. Les résultats obtenus peuvent se modifier lorsqu'il s'agit des variétés du point multiple. D'ailleurs la méthode analytique, dont je viens de poser les principes, s'applique sans difficulté aucune à tous les cas, si particuliers qu'ils soient.

Je prendrai pour exemple le *point double;* on sait que ce point donne lieu aux trois variétés suivantes:

1°. Le cône tangent est un cône proprement dit: *point double conique;*

2°. Le cône tangent se réduit à deux plans distincts: *point double de rebroussement conique;*

3°. Le cône tangent se réduit à deux plans coincidents: *point double de rebroussement plan.*

Les énoncés généraux qui précèdent s'appliquent au point double ordinaire, et même à un *point simple,* il n'est donc pas besoin de les répéter.

Point double de rebroussement conique.

1°. *Un plan quelconque, passant par l'axe de rebroussement OZ (intersection des deux plans tangents), coupe la surface S suivant une courbe ayant un rebroussement en O, OZ est la tangente de rebroussement; la courbure en ce point de la courbe de section est infinie; il y a exception pour trois directions du plan sécant; dans ces derniers cas, il y a deux cercles osculateurs, et ces cercles ont avec la courbe de section un contact effectif du 3ème ordre.*

2°. *Lorsque le plan sécant tourne autour d'une droite fixe OA située dans un des deux plans tangents, ZOT_1 par exemple, le lieu des centres des cercles osculateurs en O et touchant la droite OA est un cercle; ce cercle touche le plan ZOT_1 et se trouve dans un plan perpendiculaire à OA. Si la droite OA est une des tangentes inflexionnelles de la surface S situées dans le plan ZOT, le lieu du centre est la droite de l'infini située dans le plan perpendiculaire à cette droite OA.*

3°. *Le lieu des centres des cercles osculateurs en O des sections planes de la surface S est une surface (Γ) du 10ème ordre; cette surface Γ se décompose en deux surfaces du 5ème ordre Γ' et Γ''; ces deux dernières surfaces passent par le cercle imaginaire de l'infini, et pour chacune d'elles l'origine O est un point quadruple, le cône tangent en O se réduit à quatre plans distincts.*

Point double de rebroussement plan.

Les tangentes proprement dites en O sont dans un même plan que je nomme *plan de rebroussement;* ce plan coupe la surface suivant une courbe ayant un point triple en O, soient T_1, T_2, T_3, les tangentes en ce point triple.

1°. *Lorsqu'un plan passe par le point O, le cercle osculateur en O à la courbe de section est un cercle de rayon nul (la courbure est infinie), tant que le plan sécant ne passe pas par une des tangentes T_1, T_2, T_3.*

Lorsque le plan sécant passe par une de ces tangentes, T_1 par exemple, un cercle quelconque, touchant en O la courbe de section, a avec cette courbe un contact effectif du second ordre; il y a alors deux cercles osculateurs ayant avec la courbe, en O, un contact effectif du 3ème ordre.

Quand le plan sécant tourne autour de la tangente T_1, par exemple, les centres des cercles osculateurs proprement dits décrivent une courbe située dans un plan passant par O et perpendiculaire à la droite T_1. Cette courbe est du 4ème ordre; elle a un point de rebroussement en O; les points circulaires à l'infini sont des points doubles. La courbe en question se réduit à deux

cercles quand la droite T_1 résulte de la superposition de deux des tangentes au point triple de la section de la surface par le plan de rebroussement.

2°. *Dans le cas très-particulier où le plan de rebroussement coupe la surface suivant une courbe ayant un point quadruple en O, il y a deux cercles osculateurs en O pour la section faite par un plan quelconque passant par le point O; ces deux cercles auront avec la courbe un contact effectif du 3ème ordre au moins.*

Lorsque le plan sécant tourne autour d'une droite fixe située dans le plan de rebroussement, le lieu des centres des cercles osculateurs en O se compose de deux cercles situés dans un plan perpendiculaire à la droite fixe et touchant en O le plan de rebroussement.

Lorsque le plan sécant tourne d'une manière quelconque autour du point O, le lieu des centres des cercles osculateurs est une surface (Γ) du 8ème ordre. Le point O et un point sextuple tri-planaire pour la surface Γ; le cercle imaginaire de l'infini est une courbe double; le cône des directions asymptotiques se compose de deux fois le cône imaginaire $x^2+y^2+z^2=0$ et de quatre plans respectivement perpendiculaires aux tangentes du point quadruple de la section de la surface S par le plan de rebroussement.

Lyon, 23 Février 1870.

Ueber Singularitäten der allgemeinen Fläche n^{ter} Ordnung.

(Von Herrn *Rudolf Sturm* in Bromberg.)

In folgender Abhandlung erlaube ich mir die Resultate meiner Versuche mitzutheilen, die Probleme, welche in *Salmon-Fiedlers* Analytischer Geometrie des Raumes Bd. II, Art. 325 aufgestellt und Art. 326, 336—339 beantwortet sind, auf eine mehr geometrische Weise zu lösen; noch nicht gelungen ist es mir, den Grad der Fläche der dreifachen Tangenten auf ebenso einfache Weise zu ermitteln.

1. Suchen wir zuerst den Grad der Fläche der vierpunktig berührenden Geraden oder Biosculanten*) der Fläche F^n zu bestimmen. Der Berührungspunkt einer solchen Geraden muss sich auf den drei ersten Polarflächen jedes ihrer Punkte befinden. Die ersten Polaren der Punkte einer beliebigen Geraden L bilden ein Büschel B^{n-1} $(n-1)^{ter}$ Ordnung; ferner durch einen beliebigen Punkt O gehen stets so viele r^{te} Polaren von Punkten auf L, als diese Gerade Punkte mit der $(n-r)^{ten}$ Polare von O gemein hat, also $n-(n-r)=r$, mithin 2 zweite, 3 dritte Polaren.

Durch jeden Punkt x' einer Geraden G gehen also 2 zweite Polaren von Punkten auf L, denen zwei erste Polaren mit $2(n-1)$ Punkten x auf G entsprechen; der (einzigen) ersten Polare eines Punktes von L, welche durch einen Punkt x auf G geht, entspricht eine zweite Polare mit $n-2$ Punkten x' auf G. Also jedem Punkt x' entsprechen $2(n-1)$ Punkte x und jedem Punkte x entsprechen $n-2$ Punkte x', folglich giebt es $2(n-1)+n-2=3n-4$ Coincidenzen. Die Curven, in denen sich die ersten und zweiten Polaren der Punkte von L begegnen, erzeugen demnach eine Fläche $P_{1,2}$ von der Ordnung $3n-4$, auf der ersichtlich die Grundcurve des Büschels B^{n-1} — von der Ordnung $(n-1)^2$ — sich doppelt befindet, da durch jeden ihrer Punkte zwei zweite Polaren von Punkten von L gehen. Ebenso erzeugen die ersten und dritten

*) Ich erlaube mir, diese Benennung vorzuschlagen, und in ähnlicher Weise die Benennungen Osculante, Triosculante für die dreipunktig, fünfpunktig berührenden Geraden. Doppelte Inflexionstangente (Wendetangente oder Osculante) möchte ich eher eine an zwei getrennten Stellen osculirende Gerade nennen.

Polaren der Punkte von L eine Fläche $P_{1,3}$ von der Ordnung $3(n-1)+n-3 = 2(2n-3)$, welche die Grundcurve von B^{n-1} dreifach enthält. Beide Flächen haben mithin ausser dieser Grundcurve noch eine Curve von der Ordnung $2(3n-4)(2n-3)-2.3(n-1)^2 = 6n^2-22n+18$ gemein. Diese begegnet F^n in $n(6n^2-22n+18)$ Punkten. An den n Stellen aber, wo L die Fläche F^n trifft, haben die drei Polaren je 6 Punkte gemein, weil sie sich dort berühren und dieselben Inflexionstangenten haben *); ziehen wir also diese $6n$ Punkte von den obigen ab, so bleiben $n(6n^2-22n+12) = 2n(n-3)(3n-2)$ Punkte auf F^n, durch welche die drei ersten Polaren eines Punktes auf L gehen, in denen also Biosculanten von F^n berühren, welche der Geraden L begegnen; demnach *ist die Fläche V der vierpunktig berührenden Geraden (Biosculanten) T_4 von F^n von dem Grade $2n(n-3)(3n-2)$.*

2. Die Fläche $P_{1,2}$ von der Ordnung $3n-4$ (die Wendepolarfläche der Geraden L in Bezug auf F^n) durchschneidet F^n in *einer Curve W von der Ordnung $n(3n-4)$, der Curve derjenigen Punkte auf F^n, deren eine Inflexionstangente die Gerade L trifft;* dieselbe hat $n(n-1)^2$ Doppelpunkte τ, die Schnittpunkte von F^n mit der Grundcurve von B^{n-1}, welche auf $P_{1,2}$ doppelt liegt, also Punkte, deren beide Wendetangenten die Gerade L treffen; es sind dies die Berührungspunkte der $n(n-1)^2$ Tangentenebenen von L an F^n.

3. Durch jeden Punkt der Geraden L gehen $\frac{1}{2}n(n-1)(n-2)(n-3)$ Doppeltangenten von F^n**), und in jeder Ebene durch L liegen $\frac{1}{2}n(n-2)(n^2-9)$ solche Doppeltangenten, folglich *ist die Fläche D der sich auf L stützenden Doppeltangenten vom Grade*

$$\tfrac{1}{2}n(n-1)(n-2)(n-3)+\tfrac{1}{2}n(n-2)(n^2-9) = (n+1)n(n-2)(n-3)$$

und hat die Gerade L zur $\frac{1}{2}n(n-1)(n-2)(n-3)$-fachen Linie. *Die Berührungscurve T dieser Doppeltangenten ist von der Ordnung $n(n-3)(n^2+2n-4)$,* nämlich $2.\frac{1}{2}n(n-2)(n^2-9)+n(n-3)(n+2)$, denn $(n-3)(n+2)$ Doppeltangenten haben in jedem der n Punkte (F^n, L) ihren einen Berührungspunkt ***). Auf der Curve T sind ferner die $n(n-1)^2$ Punkte τ ebenfalls $(n-3)(n+2)$-fache Punkte, weil die $(n-3)(n+2)$ Tangenten, welche in jedem derselben und noch in einem andern Punkte die Fläche F^n berühren, in der Tangentenebene von τ liegen, also L treffen.

---

*) *Cremona,* Teoria delle superficie Nr. 70.
**) Ebenda Nr. 67.
***) Ebenda Nr. 70.

4. Diese Curve T begegnet nun der Fläche $P_{1,2}$ in $(3n-4)n(n-3)(n^2+2n-4)$ Punkten. Ziehen wir davon ab erstens die n Punkte $s=(F^n, L)$, welche auf T $(n-3)(n-2)$-fach sind, auf $P_{1,2}$ zwar nur einfach, aber doch doppelt rechnen, weil F^n und $P_{1,2}$ sich in ihnen tangiren (denn die erste und zweite Polare von s berühren sich in s, durchschneiden sich demnach in einer zweimal durch s gehenden und $P_{1,2}$ angehörigen Curve, deren beide Aeste von der gemeinsamen Tangentenebene d. i. zugleich von der von F^n berührt werden, so dass diese zwei in s berührende Tangenten von $P_{1,2}$ enthält, also $P_{1,2}$ in s tangirt), zweitens die $n(n-1)^2$ Punkte r, welche auf $P_{1,2}$ doppelt, auf T $(n-3)(n+2)$-fach liegen, so bleiben

$$(3n-4)n(n-3)(n^2+2n-4)-2n(n-3)(n+2)-2n(n-1)^2(n-3)(n+2)$$
$$=n(n-3)(n^3+2n^2-16n+8)$$

Punkte übrig.

Dies sind Punkte, deren eine Inflexionstangente der Geraden L begegnet, weil sie sich auf der Curve $W=(P_{1,2}, F^n)$ befinden; da sie aber auch auf T liegen, so muss in jedem eine Gerade die Fläche berühren, welche nochmals tangirt und auch die Gerade L trifft; verschieden können aber diese beiden Tangenten nicht sein, weil sonst ihre Ebene, die Tangentenebene des Punktes, durch L ginge, was doch nur bei den schon abgezogenen Punkten s geschieht. Also haben wir es entweder mit Biosculanten oder mit Inflexionstangenten zu thun, die noch in einem andern Punkte einfach berühren. Nach No. 1 ist die Zahl jener $2n(n-3)(3n-2)$ und ist doppelt zu rechnen, da der Berührungspunkt einer Biosculante zwei benachbarte Punkte von T, wie auch von W repräsentirt, denn die Biosculante ist erstens eine Doppeltangente und zweitens in zwei auf einander folgenden Punkten Inflexionstangente. Also ergiebt sich die Anzahl der die Gerade L treffenden Wendetangenten, welche noch in einem andern Punkte einfach berühren,

$$n(n-3)(n^3+2n^2-16n+8)-4n(n-3)(3n-2)=n(n-3)(n-4)(n^2+6n-4).$$

Folglich ist die Fläche Z der Wendetangenten $T_{3,2}$, welche ausser ihrer Osculation mit F^n noch eine einfache Berührung eingehen, vom Grade $n(n-3)(n-4)(n^2+6n-4)$.

5. Da die Curve W (No. 2) *einen ebenen Schnitt* C^n von F^n in $n(3n-4)$ Punkten trifft, so begegnen $n(3n-4)$ Wendetangenten, deren Osculationspunkte auf C^n liegen, der Geraden L, folglich *erzeugen die Wendetangenten der Punkte von C^n eine Fläche K vom Grade $n(3n-4)$.* Da in jedem Punkte von C^n

zwei Inflexionstangenten berühren, so *ist C^n ersichtlich doppelt auf K gelegen* und repräsentirt, weil beide Mäntel von K, die sich in C^n durchschneiden, die Fläche F^n längs C^n osculiren, einen Schnitt von der Ordnung $2.3n$; der übrige Schnitt M der beiden Flächen K und F^n ist demnach von der Ordnung $n^2(3n-4)-6n$. In so vielen Punkten trifft derselbe also auch die Curve C^n. Ziehen wir von denselben die $3n(n-2)(n-3)$ Punkte ab, in denen die $3n(n-2)$ Inflexionstangenten von C^n dieser Curve ausser in den Punkten der Osculation begegnen, so bleiben uns diejenigen Punkte von C^n, auf deren einer Inflexionstangente ein vierter Punkt (von den $n-3$ auf der Curve M gelegenen) sich noch mit dem Osculationspunkte vereinigt hat, mithin die auf C^n befindlichen Berührungspunkte τ_4 von Biosculanten T_4. Nun ist

$$n^2(3n-4)-6n-3n(n-2)(n-3) = n(11n-24).$$

Folglich *ist die Curve (τ_4) der Berührungspunkte der vierpunktig berührenden Geraden T_4 von der Ordnung $n(11n-24)$*, weil sie in so vielen Punkten der Ebene von C^n begegnet.

6. *Die Wendetangenten von F^n, welche einer Geraden L begegnen, erzeugen eine Fläche J von dem Grade $n(n^2-4)$*, denn von jedem Punkte auf L gehen $n(n-1)(n-2)$ Wendetangenten aus *) und in jeder Ebene durch L liegen $3n(n-2)$. Die Summe dieser beiden Zahlen ist aber $n(n^2-4)$; auf J ist die Gerade L $n(n-1)(n-2)$-fach. — Die Osculationscurve dieser Wendetangenten ist, weil in jedem der n Punkte s zwei osculiren, die im Allgemeinen nicht in eine beliebig durch L gelegte Ebene fallen, von der Ordnung $3n(n-2)+2n = n(3n-4)$, worin wir das schon in Nr. 2 erhaltene Resultat wiederfinden, mit dem Unterschiede freilich, dass dort diese Curve als Schnitt von F^n mit einer Fläche von der Ordnung $3n-4$ erkannt wurde, was sehr wesentlich ist.

7. In No. 3 fanden wir, dass die Curve der Berührungspunkte der die Gerade L treffenden Doppeltangenten der Fläche F^n von der Ordnung $n(n-3)(n^2+2n-4)$ ist und also in so vielen Punkten der Schnittcurve C^n begegnet; daraus ergiebt sich, dass die Doppeltangenten, deren einer Berührungspunkt auf C^n liegt, eine Fläche Δ vom Grade $n(n-3)(n^2+2n-4)$ erzeugen, welche die Curve C^n zur $(n-3)(n+2)$-fachen Curve besitzt, da, wie schon mehrmals erwähnt, in jedem Punkte von F^n $(n-3)(n+2)$ noch an einer andern Stelle berührende Geraden tangiren. Alle $(n-3)(n+2)$ Mäntel

---

*) Teoria delle superficie, Nr. 67.

der Fläche Δ, welche sich in dieser vielfachen Curve C^n durchschneiden, tangiren F^n längs derselben; Δ hat also mit F^n ausser C^n noch einen Schnitt von der Ordnung

$$n^2(n-3)(n^2+2n-4)-2n(n-3)(n+2)=n(n-3)(n-2)(n^2+4n+2)$$

gemein, welcher ersichtlich in zwei Theile zerfällt, die Curve B der zweiten Berührungspunkte der einmal auf C^n berührenden Doppeltangenten und die der ferneren einfachen Schnittpunkte S. B ist offenbar doppelt zu rechnen. Die Schnittpunkte derselben mit C^n sind erstens die $n(n-2)(n^2-9)$ Berührungspunkte der Doppeltangenten von C^n, von denen jeder bei seinem Genossen auftritt, und zweitens die $n(11n-24)$ Berührungspunkte von Biosculanten, die nach Nr. 5 auf C^n liegen; folglich hat die Berührungscurve B die Ordnung $n(n-2)(n^2-9)+n(11n-24)=n(n^3-2n^2+2n-6)$. *Die zweiten Berührungspunkte aller Doppeltangenten von F^n, deren einer Berührungspunkt auf einer ebenen Schnittcurve liegt, bilden eine Curve von der Ordnung* $n(n^3-2n^2+2n-6)$. Folglich ist die Ordnung der Curve S der einfachen Schnittpunkte

$$n(n-3)(n-2)(n^2+4n+2)-2n(n^3-2n^2+2n-6)=n(n-4)(n^3+n^2-4n-6).$$

Die einfachen Schnittpunkte aller einmal auf C^n berührenden Doppeltangenten von F^n erzeugen also *eine Curve von der Ordnung* $n(n-4)(n^3+n^2-4n-6)$.

Unter deren Begegnungspunkten mit C^n befinden sich auch die $\frac{1}{2}n(n-2)(n^2-9)(n-4)$ einfachen Schnittpunkte der Doppeltangenten von C^n und zwar jeder doppelt, da er bei beiden Berührungspunkten auftritt; ziehen wir diese ab, so bleiben

$$n(n-4)(n^3+n^2-4n-6)-n(n-2)(n^2-9)(n-4) = n(n-4)(3n^2+5n-24)$$

Punkte. Das sind Punkte von C^n, in denen eine Doppeltangente berührt, von deren einfachen Schnittpunkten mit F^n sich noch einer mit dem Berührungspunkte auf C^n vereinigt hat, so dass die Doppeltangente eine Tangente $T_{3,2}$ ist, deren Osculationspunkt τ_3 auf C^n liegt. Demnach *bilden die Osculationspunkte τ_3 derjenigen Geraden $T_{3,2}$, welche F^n an einer Stelle osculiren, an einer andern einfach tangiren, eine Curve (τ_3) von der Ordnung* $n(n-4)(3n^2+5n-24)$.

8. Die in Nr. 6 betrachtete Fläche J vom Grade $n(n^2-4)$, gebildet durch die Wendetangenten der Fläche F^n, welche sich auf L stützen, hat mit F^n ausser der Curve, längs deren sie osculirt, und welche von der Ordnung $n(3n-4)$ ist, noch eine Curve von der Ordnung $n^2(n^2-4)-3n(3n-4)$ $=n(n^3-13n+12)=n(n-3)(n^2+3n-4)$ gemein, welche auch in so vielen

Punkten der Curve C^n begegnet. Folglich *ist die Fläche Ω der von den Punkten auf C^n gelegten und anderwärts osculirenden Inflexionstangenten vom Grade $n(n-3)(n^2+3n-4)$.* Da von jedem Punkte auf F^n $(n-3)(n^2+2)$ anderwärts osculirende Wendetangenten ausgehen *), so ist C^n auf Ω eine $(n-3)(n^2+2)$-fache Curve; demnach haben F^n und Ω noch einen Schnitt gemein von der Ordnung

$$n^2(n-3)(n^2+3n-4)-n(n-3)(n^2+2)=n(n-3)(n^3+2n^2-4n-2).$$

Diese Curve zerfällt auch in zwei Theile, nämlich den Ort O der Osculationspunkte der von den Punkten auf C^n ausgehenden Wendetangenten, welcher dreifach zu rechnen ist, und den Ort Σ der im Allgemeinen nicht auf C^n gelegenen einfachen Schnittpunkte dieser Tangenten. Die Begegnungspunkte der Curve O mit C^n sind erstens die $n(11n-24)$ Berührungspunkte von Biosculanten, die sich auf C^n befinden, und zweitens die $3n(n-2)$ Wendepunkte von C^n, deren jeder bei den $n-3$ weiteren Schnittpunkten seiner Wendetangente auftritt; folglich ist O von der Ordnung $n(11n-24)+(n-3)3n(n-2)=n(3n^2-4n-6)$. *Die Osculationspunkte der von den Punkten der Curve C^n an F^n gelegten Inflexionstangenten erzeugen eine Curve von der Ordnung $n(3n^2-4n-6)$.* Mithin ist die Ordnung der Curve Σ $n(n-3)(n^3+2n^2-4n-2)-3n(3n^2-4n-6)$ $=n(n-2)(n-4)(n^2+5n+3)$. *Die übrigen im Allgemeinen nicht auf C^n gelegenen einfachen Schnittpunkte der sich auf C^n stützenden Wendetangenten der Fläche F^n bilden eine Curve von der Ordnung $n(n-2)(n-4)(n^2+5n+3)$.* Unter den Begegnungspunkten dieser Curve mit C^n befinden sich offenbar die $(n-3)3n(n-2)$ einfachen Schnittpunkte der Wendetangenten von C^n und zwar jeder $(n-4)$mal, da er bei seinen $n-4$ Genossen auftritt; es bleiben folglich

$$n(n-2)(n-4)(n^2+5n+3)-3n(n-2)(n-3)(n-4)=n(n-2)(n-4)(n^2+2n+12).$$

Das sind Punkte auf C^n, von denen solche anderwärts osculirende Inflexionstangenten ausgehen, von deren $n-4$ übrigen einfachen Schnittpunkten sich noch einer mit dem Punkte auf C^n vereinigt hat, also welche auf C^n tangiren, mithin Gerade $T_{3,2}$.

Demnach *bilden die Punkte τ_2 der einfachen Berührung derjenigen Geraden $T_{3,2}$, welche F^n an einer Stelle osculiren, an einer andern einfach tangiren, eine Curve (τ_2) von der Ordnung $n(n-2)(n-4)(n^2+2n+12)$.*

---

*) Teoria delle superficie No. 70.

9. Auf ähnliche Weise können wir die Ordnung der Curve der Berührungspunkte der dreifachen Tangenten von F^n ermitteln. In No. 3 ergab sich die Fläche D der die Gerade L treffenden Doppeltangenten von F^n von der Ordnung $(n+1)n(n-2)(n-3)$ und die Curve T ihrer Berührungspunkte von der Ordnung $n(n-3)(n^2+2n-4)$; mithin durchschneidet D die Fläche F^n noch in einer Curve von der Ordnung

$$n^2(n+1)(n-2)(n-3)-2n(n-3)(n^2+2n-4) = n(n-3)(n-4)(n^2+n-2),$$

welche der Curve C^n demnach in so vielen Punkten begegnet. Folglich *erzeugen die von den Punkten von C^n ausgehenden und anderwärts doppelt berührenden Geraden eine Fläche Φ vom Grade $n(n-3)(n-4)(n^2+n-2)$*; da jeder Punkt von F^n $\frac{1}{2}(n-3)(n-4)(n^2+n+2)$ an andern Stellen berührende Doppeltangenten aussendet *), so liegt C^n auf Φ $\frac{1}{2}(n-3)(n-4)(n^2+n+2)$-fach, und Φ hat mit F^n ausser C^n noch eine Curve gemein von der Ordnung

$$n^2(n-3)(n-4)(n^2+n-2)-\tfrac{1}{2}n(n-3)(n-4)(n^2+n+2) = \tfrac{1}{2}n(n-3)(n-4)(2n^3+n^2-5n-2),$$

welche wiederum in zwei Theile zerfällt, die Curve H der Berührungspunkte der aus den Punkten von C^n gesandten Doppeltangenten und die der übrigen im Allgemeinen ausserhalb C^n befindlichen Schnittpunkte derselben, L. Die Begegnungspunkte der Curve H mit C^n sind erstens die $n(n-2)(n^2-9)$ Berührungspunkte der Doppeltangenten von C^n, jeder $(n-4)$-fach gerechnet, weil er bei den $n-4$ einfachen Schnittpunkten seiner Doppeltangente auftritt, und zweitens die $n(n-4)(3n^2+5n-24)$ Punkte von C^n, in denen eine Gerade die Fläche F^n osculirt, welche noch anderwärts tangirt, folglich (Nr. 7) hat die Curve H die Ordnung

$$n(n-2)(n^2-9)(n-4)+n(n-4)(3n^2+5n-24) = n(n-4)(n^3+n^2-4n-6).$$

Legt man also von allen Punkten der Curve C^n an F^n die Doppeltangenten, so erzeugen deren Berührungspunkte eine Curve von der Ordnung $n(n-4)(n^3+n^2-4n-6)$.

Für die Curve L bleibt deshalb die Ordnung

$$\tfrac{1}{2}n(n-3)(n-4)(2n^3+n^2-5n-2)-2n(n-4)(n^3+n^2-4n-6)$$
$$= \tfrac{1}{2}n(n-2)(n-4)(n-5)(2n^2+5n+3).$$

Die einfachen Schnittpunkte der obigen Tangenten mit F^n (ausser dem auf C^n, von welchem die Tangente ausgeht) bilden eine Curve von der Ordnung $\frac{1}{2}n(n-2)(n-4)(n-5)(2n^2+5n+3)$.

Ziehen wir von den Begegnungspunkten dieser Curve mit C^n die $\frac{1}{2}n(n-2)(n^2-9)(n-4)$ einfachen Schnittpunkte der Doppeltangenten von C^n,

*) Teoria delle superficie No. 70.

jede ubei seinen $n-5$ Genossen gerechnet, ab, so bleiben

$$\tfrac{1}{2}n(n-2)(n-4)(n-5)(2n^2+5n+3)-\tfrac{1}{2}n(n-2)(n^2-9)(n-4)(n-5)$$
$$= \tfrac{1}{2}n(n-2)(n-4)(n-5)(n^2+5n+12)$$

Punkte übrig. Von diesen Punkten auf C^n gehen Doppeltangenten aus, von deren $n-5$ übrigen einfachen Schnittpunkten sich noch einer mit dem auf C^n liegenden vereinigt, so dass die Gerade dort eine dritte Berührung eingeht. Also *ist die Curve der Berührungspunkte der dreifachen Tangenten der Fläche F^n von der Ordnung* $\tfrac{1}{2}n(n-2)(n-4)(n-5)(n^2+5n+12)$.

10. Die Fläche V der Biosculanten T_4 ist vom Grade $2n(n-3)(3n-2)$ und hat mit der Fläche F^n ausser der Biosculationscurve (τ_4), welche die Ordnung $n(11n-24)$ hat, noch eine Curve von der Ordnung $2n^2(n-3)(3n-2)-4n(11n-24) = 2n(n-4)(3n^2+n-12)$ gemein. Demnach giebt es auf F^n stets eine Curve von der Ordnung $2n(n-4)(3n^2+n-12)$, deren Punkte je eine anderwärts vierpunktig berührende Gerade aussenden. — Ebenso hat die Fläche Z der Geraden $T_{3,2}$, welche F^n an einer Stelle osculiren, an einer andern tangiren, da sie vom Grade $n(n-3)(n-4)(n^2+6n-4)$ ist, mit F^n ausser der Osculations- und der Berührungscurve, deren Ordnungen resp. $n(n-4)(3n^2+5n-24)$ und $n(n-2)(n-4)(n^2+2n+12)$ sind, noch eine Curve von der Ordnung

$$n^2(n-3)(n-4)(n^2+6n-4)-3n(n-4)(3n^2+5n-24)-2n(n-2)(n-4)(n^2+2n+12)$$
$$= n(n-4)(n-5)(n^3+6n^2-n-24)$$

gemein; also bilden die Punkte auf F^n, von denen Gerade ausgehen, die diese Fläche an einer Stelle osculiren, an einer andern tangiren, eine Curve von der Ordnung $n(n-4)(n-5)(n^3+6n^2-n-24)$.

11. Die ersten Polaren einer Geraden G in Bezug auf F^n bilden ein Büschel B^{n-1} $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung, welches durch die Ebene von C^n in einem Curvenbüschel dieser Ordnung geschnitten wird; $n(3n-5)$ Curven desselben berühren die Curve C^n *), mithin treffen $n(3n-5)$ Schnittgeraden von Tangentenebenen der Fläche F^n in Nachbarpunkten von C^n die Gerade G; dies sind Generatricen *der developpablen Fläche A, welche F^n längs C^n umschrieben ist; also ist diese Fläche von der Ordnung* $n(3n-5)$.

Dass sie von der Klasse $n(n-1)$ ist, ist leicht einzusehen. Die Fläche A schneidet F^n ausser in der Curve C^n, längs deren sie sich berühren, in einer Curve U von der Ordnung $n^2(3n-5)-2n = n(n-2)(3n+1)$, welche

*) *Cremona,* Teoria delle curve piane Nr. 87.

C^n ebenso oft trifft. Die Erzeugende der Fläche A, welche F^n im Punkte p von C^n berührt, ist ersichtlich die conjugirte Tangente zu der Tangente der Curve C^n im Punkte p, folglich den beiden Inflexionstangenten des Punktes p harmonisch zugeordnet *); daraus geht hervor, dass, wenn die Tangente von C^n selbst eine Inflexionstangente ist, ihre conjugirte, also die Generatrix von A mit ihr zusammenfällt; *die* $3n(n-2)$ *Wendetangenten* w *der Curve* C^n *sind* demnach *Erzeugende der Fläche* A und bilden mit C^n einen vollen ebenen Schnitt. Die $3n(n-2)(n-3)$ einfachen Schnittpunkte dieser Wendetangenten gehören zu den $n(n-2)(3n+1)$ Begegnungspunkten (C^n, U). Die weitern Begegnungspunkte weisen auf Generatricen hin, auf welchen sich mit dem auf C^n gelegenen Berührungspunkte p noch einer von den $n-2$ übrigen, auf U liegenden Schnittpunkten vereinigt hat, welche mithin in p osculiren, also selber Inflexionstangenten sein müssen. Da aber die Generatrix g von A stets der Tangente t von C^n in p in Bezug auf die beiden Inflexionstangenten von p harmonisch zugeordnet ist, so können hier, wo g selbst osculirt, nur zwei Fälle eintreten: entweder, wenn p zwei verschiedene Inflexionstangenten hat, muss g mit t identisch, also t eine Wendetangente w von C^n und p deren Wendepunkt ω sein; oder p hat nicht zwei verschiedene Wendetangenten, ist also ein parabolischer Punkt, und g muss sich mit der einzigen Wendetangente vereinigen. Die nach Abzug der oben erwähnten Punkte übrig bleibenden $n(n-2)(3n+1)-3n(n-2)(n-3)=10n(n-2)$ müssen sich also zusammensetzen aus den $3n(n-2)$ Wendepunkten der Curve C^n und aus den $4n(n-2)$ Punkten der parabolischen Curve, die auf C^n liegen **); woraus hervorgeht, dass die erstern doppelt zu rechnen sind. Die Curve U berührt also in den Wendepunkten von C^n diese Curve C^n, was damit zusammenhängt, dass die Cuspidalcurve von A (welche von der Ordnung $6n(n-2)$ ist, weil die ersten Polaren so vieler Punkte einer beliebigen Ebene — oder ihre Durchschnittscurven mit der Ebene von C^n — diese Curve dreipunktig berühren ***)) die Curve C^n in deren $3n(n-2)$ Wendepunkten tangirt (mithin die Ebene von C^n sonst nicht mehr schneidet) und also auch die Fläche F^n.

12. *Der Berührungskegel* $\mathfrak{K}$ *von einem Punkte* $\mathfrak{P}$ *an die Fläche* F^n, welcher von der $n(n-1)^{ten}$ Ordnung und der $n(n-1)^{2\,ten}$ Klasse ist, *durchschneidet die Fläche* F^n *ausser in der Berührungscurve* $\mathfrak{B}$ $n(n-1)^{ter}$ *Ordnung noch in einer*

*) Teoria delle superficie No. 31.

**) Ebenda No. 67.

***) Teoria delle curve piane No. 103.

zweiten Curve 𝔖, *deren Ordnung* $n^2(n-1)-2n(n-1)=n(n-1)(n-2)$ *ist.* Dieselbe begegnet der Berührungscurve 𝔅 so oft, als sie die erste Polarfläche $\mathfrak{P}^{n-1}$ von 𝔓 trifft, also $n(n-1)^2(n-2)$-mal. Diese Begegnungspunkte müssen sich nothwendig auf die Osculationspunkte der von 𝔓 ausgehenden Wendetangenten und die Berührungspunkte der durch 𝔓 gelegten Doppeltangenten vertheilen. Jener sind $n(n-1)(n-2)$, die Zahl dieser ist $2.\frac{1}{2}n(n-1)(n-2)(n-3)$; damit sie zusammen $n(n-1)^2(n-2)$ geben, muss die erstere Zahl verdoppelt werden.

Im Allgemeinen trifft eine Kante des Kegels 𝔎 die Berührungscurve 𝔅 in einem Punkte und damit F^n in zwei Punkten, also ausserdem noch in $n-2$ der Curve 𝔖 angehörigen Punkten. Jede der $n(n-1)(n-2)$ von 𝔓 ausgehenden Inflexionstangenten w berührt im Osculationspunkte ω, der ja auf der zweiten Polarfläche von 𝔓 liegt, welche die erste von 𝔓 in Bezug auf $\mathfrak{P}^{n-1}$ ist, diese letztere Fläche $\mathfrak{P}^{n-1}$, also auch die Berührungscurve, trifft dort die Fläche F^n in 3 benachbarten Punkten und ausserdem dieselbe noch in $n-3$ der Curve 𝔖 angehörigen Punkten ω', welche Rückkehrpunkte von 𝔖 sind, da w eine Rückkehrkante von 𝔎 ist. Eine beliebige durch w gelegte Ebene schneidet 𝔎 noch in $n(n-1)-2$ Kanten; auf w und auf diesen müssen sich die $n(n-1)(n-2)$ Spuren der Curve 𝔖 befinden. Auf w liegen die $n-3$ Spitzen ω' und der Punkt ω, auf den $n(n-1)-2$ Kanten $[n(n-1)-2](n-2)$ gewöhnliche Punkte, also haben wir in ω

$$n(n-1)(n-2)-(n-3)2-[n(n-1)-2](n-2)=2$$

Punkte von 𝔖 zu suchen. Jede der $\frac{1}{2}n(n-1)(n-2)(n-3)$ von 𝔓 ausgehenden Doppeltangenten trifft 𝔅 in zwei Punkten δ und in denselben F^n viermal, also ausserdem noch in $n-4$ Punkten δ', durch welche 𝔖 zweimal geht; man findet wieder leicht, dass wir in den beiden δ

$$n(n-1)(n-2)-(n-4)2-[n(n-1)-2](n-2) = 4,$$

in jedem also zwei Punkte von 𝔖 zu suchen haben. *Es berührt in jedem der Punkte δ und ω die von 𝔓 ausgehende Gerade (Doppeltangente oder Wendetangente) die Curve* 𝔖. Da aber die Doppeltangenten die erste Polarfläche nicht tangiren, so schneidet 𝔖 dieselbe blos in den Punkten δ, hingegen in den Punkten ω, in denen ja die Wendetangenten $\mathfrak{P}^{n-1}$ tangiren, wird diese Fläche von 𝔖 berührt; daher war bei der obigen Betrachtung die Zahl der Osculationspunkte zu verdoppeln.

Bromberg, März 1870.

Beweis der *Hermite*schen Verwandlungstafeln für die elliptischen Modularfunctionen.

(Von Herrn *L. Schläfli* in Bern.)

In seiner Schrift „sur la théorie des équations modulaires et la résolution de l'équation du cinquième degré" (1859) hat Herr *Hermite* zwei Tafeln für die Verwandlung der zwei Modularfunctionen $k^{\frac{1}{4}}$, $(kk')^{\frac{1}{12}}$ gegeben, ohne, wie es scheint, deren Beweis irgendwo mitgetheilt zu haben. Ich hatte diese Schrift vor längerer Zeit mit grossem Interesse gelesen und mir namentlich auch über die genannten zwei Tafeln Rechenschaft gegeben. Ich kam in dieser Beziehung zur Erkenntniss, dass man, um die Hauptgattung der Substitutionen, wo das Modulquadrat in sich selbst verwandelt wird, von den fünf übrigen Gattungen zu trennen, mit Vortheil eine Kettenbruchsentwicklung gebraucht, wo alle Theilnenner gerade sind, aber sowohl positiv als negativ sein dürfen, und dass eine solche immer möglich ist, wenn Zähler und Nenner der zu entwickelnden Rationalzahl modulo 2 incongruent sind. Mein hochgeschätzter Freund, Herr *Königsberger* in Heidelberg, hatte unlängst die Güte, mir unerwarteter Weise einen Beweis der ersten *Hermite*schen Tafel, der in den mathematischen Annalen von *Clebsch* und *Neumann* erschienen ist, zuzusenden. Da seine Behandlung der Sache von der Art, wie ich mir dieselbe zurecht gelegt habe, verschieden ist, so ergreife ich den Anlass und nehme mir die Freiheit, hier meine Ansicht des Gegenstandes auszusprechen.

1. Denkt man sich die zwei Periodicitätsmaasse elliptischer Functionen, die *Jacobi* mit $2K$, $2iK'$ bezeichnet, als Functionen des Modulquadrats $x = k^2$, die zunächst für den Fall, wo x zwischen 0 und 1 liegt, und $\log\frac{16}{x}$ reell verstanden wird, durch

$$K(x) = \pi\sum_{n=0}^{\infty}\binom{-\frac{1}{2}}{n}^2 x^n,$$

$$L(x) = i\sum_{n=0}^{\infty}\binom{-\frac{1}{2}}{n}^2 x^n\left(\log\frac{16}{x} - 4\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)\right)$$

bezeichnet und definirt werden mögen, so bekommt dieses Functionenpaar 0, 1, ∞ zu logarithmischen Polen, und man hat in Bezug auf den Pol 1 die Transformation $K(1-x) = -iL(x)$, $L(1-x) = iK(x)$. Macht x etwa von

einem ursprünglichen Stande M zwischen 0 und 1, wo die Summenreihen als Werthe der zwei Functionsstämme gelten, λ Umläufe um 0 und kehrt nach M zurück, so ist ein Zweigpaar $K(x)$, $2\lambda . K(x)+L(x)$ entstanden, das also durch die Substitution

$$\begin{pmatrix}1 . 0\\ 2\lambda . 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 . 1\\ 1 . 2\lambda\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 . 1\\ 1 . 0\end{pmatrix}$$

in das Stammpaar verwandelt wird. In derselben Weise entspricht μ Umläufen um 1 die Substitution

$$\begin{pmatrix}1 . -2\mu\\ 0 . \ 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 . 1\\ 1 . 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 . \ 1\\ 1 . -2\mu\end{pmatrix}.$$

Gebraucht man die nöthige Vorsicht in der Auffassung des Weges der unabhängigen Variabeln x, so haben diese Substitutionen unbeschränkte Geltung, und man kann sie zusammensetzen. Läuft z. B. das Modulquadrat x von M aus, wo das Stammpaar gilt *), λ Male um 0, dann μ Male um 1 und kehrt nach M zurück, so entsteht ein Zweigpaar, das durch die Substitution

$$\begin{pmatrix}0 . 1\\ 1 . 2\lambda\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 . 1\\ 1 . 0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0 . 1\\ 1 . 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 . \ 1\\ 1 . -2\mu\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 . 1\\ 1 . 2\lambda\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 . \ 1\\ 1 . -2\mu\end{pmatrix}$$

im Stammpaar ausgedrückt wird **). Bedeuten nun a_1, b_1, a_2, b_2, ... a_n, b_n gerade Zahlen, die positiv oder negativ sein können, und von denen entweder a_1 oder b_n oder beide zugleich Null sein dürfen ***), und läuft die Variable x von M aus $\frac{1}{2}a_1$ Male um 0, dann $-\frac{1}{2}b_1$ Male um 1, dann $\frac{1}{2}a_2$ Male um 0, dann $-\frac{1}{2}b_2$ Male um 1, und so fort, endlich $-\frac{1}{2}b_n$ Male um 1 und kehrt nach M zurück, so möge das so entstandene Zweigpaar durch die Substitution $\begin{pmatrix}\alpha . \beta\\ \gamma . \delta\end{pmatrix}$ im Stammpaare ausgedrückt werden. Dann ist

$$\begin{pmatrix}\alpha . \beta\\ \gamma . \delta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 . 1\\ 1 . a_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 . 1\\ 1 . b_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 . 1\\ 1 . a_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 . 1\\ 1 . b_2\end{pmatrix}\cdots\begin{pmatrix}0 . 1\\ 1 . a_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 . 1\\ 1 . b_n\end{pmatrix},$$

und wenn man gewisse ganze Functionen der Elemente a_1, b_1, ... b_n, die

---

*) Der Weg der Variabeln x besteht eigentlich aus μ Umläufen um 1 (am Ende dieser Umwicklung liegt das Argument des Zweigpaares, in welches die vorangehende Substitution transformirt, und welches durch die nachfolgende Substitution in das Stammpaar transformirt wird), aus $-\mu$ Umläufen um 1, aus λ Umläufen um 0 und endlich aus μ Umläufen um 1.

**) Damit in der Zusammensetzung alle elementaren Substitutionen gleichartig werden, gebrauche ich solche, deren Maass -1 ist; die Auflösung der zusammengesetzten Substitution entspricht dann genau dem Process der Kettenbruchsentwicklung.

***) Ein inneres Element dieser Zahlenreihe Null anzunehmen, liegt keine Veranlassung vor, da $\begin{pmatrix}0 . 1\\ 1 . a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 . 1\\ 1 . 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 . 1\\ 1 . b\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 . \ 1\\ 1 . a+b\end{pmatrix}$ ist.

ich mir *Kettenausdrücke* zu nennen erlaube, auf dieselbe Weise bezeichnet, wie *Gauss* in den disq. arithm. §. 27, so hat man

$$\alpha = [b_1, a_2, \ldots a_n], \qquad \beta = [b_1, a_2, \ldots a_n, b_n],$$
$$\gamma = [a_1, b_1, a_2, \ldots a_n], \qquad \delta = [a_1, b_1, a_2, \ldots a_n, b_n],$$

ferner $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$; β, γ sind gerade, und $\alpha \equiv \delta \equiv 1$ (mod. 4). Umgekehrt kann jede Substitution $\begin{pmatrix}\alpha \,.\, \beta \\ \gamma \,.\, \delta\end{pmatrix}$, deren Maass 1 ist, und wo $\alpha \equiv 1$ (mod. 4), $\beta \equiv \gamma \equiv 0$ (mod. 2), in eine gerade Menge elementarer Substitutionen $\begin{pmatrix}0 \,.\, 1 \\ 1 \,.\, 2\lambda\end{pmatrix}$ aufgelöst werden. Wenn nämlich δ abs. $> \gamma$, so ist es möglich, die rationale Zahl $\frac{\delta}{\beta}$ in einen Kettenbruch mit lauter geraden Theilnennern a_1, b_1, ... a_n, b_n (a_1 wird null sein, wenn δ abs. $< \beta$), deren Menge gerade sein wird, zu entwickeln; und wenn δ abs. $< \gamma$, so entwickle man $\frac{\gamma}{\alpha}$ in einen Kettenbruch mit lauter geraden Theilnennern a_1, b_1, ... a_n, deren Menge wegen der geraden Eigenschaft des Zählers γ ungerade sein wird, und nehme $b_n = 0$ als letztes Element hinzu, so kann man nun auch $\frac{\delta}{\beta}$ als Werth des Kettenbruchs mit der geraden Menge gerader Theilnenner a_1, b_1, ... a_n, b_n betrachten, was freilich auf dasselbe hinauskommt, wie wenn er nur die $2n-2$ Theilnenner a_1, b_1, ... b_{n-1} hätte. Zum Behufe der spätern Betrachtung muss ich nun wissen, wie diese ganze Function, die ich Kettenausdruck nenne, vollständig entwickelt beschaffen ist.

2. Ein Kettenausdruck ist eine Summe, die das Product aller seiner Elemente und alle diejenigen Producte enthält, die durch Weglassung eines oder mehrerer Paare unmittelbar auf einander folgender Elemente entstehen; die weggelassenen Paare selbst brauchen nicht unmittelbar auf einander zu folgen; ist die Menge der Elemente gerade, so können die weggelassenen Paare die Gesammtheit der Elemente ausmachen, und dann ist 1 als Term hinzuzusetzen. Hieraus folgt sogleich $\alpha \equiv \delta \equiv 1$ (mod. 4);

$$\beta \equiv b_1 + b_2 + \cdots + b_n, \qquad \gamma \equiv a_1 + a + \cdots + a_n \quad \text{(mod. 8)}.$$

Aber im Folgenden haben wir nöthig, Σa und Σb nicht nur (mod. 8), sondern (mod. 16) durch α, β, γ, δ darzustellen und zwar so, dass eine Multiplication der vier Substitutionselemente mit -1 die Ausdrücke für Σa und Σb nicht ändert. Ist $A = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \Sigma a$, und bedeutet M die Summe der binären Producte im Kettenausdruck für α, und N die Summe der ternären Producte im Kettenausdruck für γ, so ist $\alpha \equiv 1 + M$, $\gamma \equiv A + N$ (mod. 16), und A, M,



N sind resp. durch 2, 4, 8 theilbar; daher $\alpha\gamma - A \equiv N + AM$ (mod. 16). Setzt man nun der Kürze wegen $A_1 = a_2 + a_3 + \cdots + a_n$, $A_2 = a_3 + a_4 + \cdots + a_n$, ..., $A_{n-2} = a_{n-1} + a_n$, $A_{n-1} = a_n$, so ist

$$M = b_1 A_1 + b_2 A_2 + \cdots + b_{n-1} A_{n-1},$$

$$N = b_1 A_1 (A - A_1) + b_2 A_2 (A - A_2) + \cdots + b_{n-1} A_{n-1} (A - A_{n-1})$$

$$= AM - (b_1 A_1^2 + b_2 A_2^2 + \cdots + b_{n-1} A_{n-1}^2).$$

Da nun $2AM \equiv 0$ (mod. 16), so folgt

$$A - \alpha\gamma \equiv b_1 A_1^2 + b_2 A_2^2 + \cdots + b_{n-1} A_{n-1}^2 \quad (\text{mod. } 16).$$

Aber $A_1(A_1 - 2) \equiv 0$ (mod. 8), weil A_1 gerade ist, und so fort. Daher auch, weil b_1, b_2, ... b_{n-1} gerade sind,

$$A - \alpha\gamma \equiv 2(b_1 A_1 + b_2 A_2 + \cdots + b_{n-1} A_{n-1}) \equiv 2(\alpha - 1) \quad (\text{mod. } 16);$$

und weil $\alpha \equiv 1$ (mod. 4), so ist $2 \equiv \alpha + 1$ (mod. 4); folglich $2(\alpha - 1) \equiv (\alpha + 1)(\alpha - 1)$ (mod. 16). Also endlich

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n \equiv \alpha\gamma + \alpha^2 - 1 \quad (\text{mod. } 16),$$

ein Ausdruck, der sich nicht ändert, wenn α, β, γ, δ in $-\alpha$, $-\beta$, $-\gamma$, $-\delta$ übergehen. Liest man die Reihe der Elemente rückwärts, so hat man ebenso

$$b_1 + b_2 + \cdots + b_n \equiv \alpha\beta + \alpha^2 - 1 \quad (\text{mod. } 16).$$

3. Wir wollen nun das Modulquadrat x als Function des Verhältnisses der zwei Periodicitätsmaasse betrachten und setzen zunächst für die Functionsstämme, wenn x noch auf ursprüngliche Weise zwischen 0 und 1 liegt,

$$\frac{L(x)}{K(x)} = z, \quad i\pi z = \log q, \quad x = \varphi^8(z), \quad 1 - x = \chi^8(z), \quad x(1-x) = \psi^{24}(z),$$

und verstehen im genannten Falle $\varphi(z)$, $\chi(z)$, $\psi(z)$ positiv. Nach *Jacobis* fundamenta p. 89 ist dann

$$\varphi(z) = 2^{\frac{1}{2}} e^{\frac{i\pi z}{8}} \frac{\Pi(1+q^{2n})}{\Pi(1+q^m)}, \quad \chi(z) = \frac{\Pi(1-q^m)}{\Pi(1+q^m)}, \quad \psi(z) = \frac{2^{\frac{1}{6}} e^{\frac{i\pi z}{24}}}{\Pi(1+q^m)},$$

wo n jede positive ganze Zahl, m jede positive ungerade Zahl bedeutet. Ferner ist

$$\varphi\left(-\frac{1}{z}\right) = \chi(z), \quad \chi\left(-\frac{1}{z}\right) = \varphi(z), \quad \psi\left(\frac{1}{z}\right) = \psi(z).$$

Befreit man in diesen Formeln das Periodenverhältniss z von der Beschränkung lateral (also q von derjenigen reell) zu sein, und setzt abkürzend

$$\frac{i\pi}{8} = \log\varrho, \quad \frac{i\pi}{24} = \log\varepsilon,$$

so folgt aus denselben sogleich

$$\varphi(1+z) = \varrho \frac{\varphi(z)}{\chi(z)}, \quad \chi(1+z) = \frac{1}{\chi(z)}, \quad \psi(1+z) = \varepsilon \frac{\psi(z)}{\chi(z)}.$$

Von diesen einfachsten Verwandlungen, aus denen, wenn man ihre Inversionen hinzu nimmt, alle übrigen zusammengesetzt werden können, werde ich später Gebrauch machen. Jetzt betrachte ich nur diejenigen Verwandlungen, die den obigen der Periodicitätsmaasse $K(x)$, $L(x)$ entsprechen, wenn $x = \varphi^8$ entweder $\frac{a}{2}$ Umläufe um 0, oder $-\frac{b}{2}$ Umläufe um 1 macht und auf denselben Werth zurückkehrt; sie sind, wenn man die dritte Modularfunction vorläufig ausser Acht lässt:

$$\varphi(a+z) = \varrho^a \varphi(z), \quad \chi(a+z) = \chi(z); \quad \varphi\Big(\frac{z}{1+bz}\Big) = \varphi(z), \quad \chi\Big(\frac{z}{1+bz}\Big) = \varrho^{-b}\chi(z).$$

Man hat also, wenn $\begin{pmatrix}\alpha \,.\, \beta \\ \gamma \,.\, \delta\end{pmatrix}$ genau dieselbe zusammengesetzte Substitution bedeutet wie oben, worin also nicht nur β, γ gerade sind, sondern namentlich auch $\alpha \equiv 1$ (mod. 4),

$$\varphi\Big(\frac{\gamma+\delta z}{\alpha+\beta z}\Big) = \varrho^{\Sigma a}\varphi(z), \quad \chi\Big(\frac{\gamma+\delta z}{\alpha+\beta z}\Big) = \varrho^{-\Sigma b}\chi(z),$$

wo $A \equiv \Sigma a \equiv \alpha\gamma + \alpha^2 - 1$, $B \equiv -\Sigma b \equiv -\alpha\beta + \alpha^2 - 1$ (mod. 16) vermöge der in §. 2 ausgeführten Rechnung. Da nunmehr die Ausdrücke sich nicht ändern, wenn die vier Substitutionselemente entgegengesetzt genommen werden, so fällt die Bedingung $\alpha \equiv 1$ (mod. 4) weg, und nur die Bedingung, dass β, γ gerade seien, bleibt übrig.

Es giebt für die Exponenten A, B noch andere Ausdrücke, die eben so einfach sind wie die soeben gefundenen. Da $\alpha\delta = \beta\gamma + 1 \equiv 1$ (mod. 4), so ist $\alpha \equiv \delta$ (mod. 4), folglich $\alpha - \delta$ entweder $\equiv 0$ oder $\equiv 4$ (mod. 8). Im zweiten Falle ist $\alpha\delta \equiv 5$, daher $\beta\gamma \equiv 4$ (mod. 8), folglich sind $\frac{\beta}{2}$, $\frac{\gamma}{2}$ ungerade. Da nun auch $\frac{\alpha+\delta}{2}$ ungerade ist, so folgt $\beta+\alpha+\delta \equiv 0$, $\gamma+\alpha+\delta \equiv 0$ (mod. 4). In beiden Fällen hat man also:

$$(\alpha-\delta)(\gamma+\alpha+\delta) \equiv 0, \qquad (\alpha-\delta)(\beta+\alpha+\delta) \equiv 0 \quad (\text{mod. } 16);$$

daher auch

$$A \equiv \alpha\gamma + \alpha^2 - 1 \equiv \gamma\delta + \delta^2 - 1, \qquad B \equiv -\alpha\beta + \alpha^2 - 1 \equiv -\beta\delta + \delta^2 - 1;$$

ferner $A + B \equiv \alpha(\gamma - \beta) \equiv \delta(\gamma - \beta)$ (mod. 16). Da nun

$$\alpha(\beta\gamma+1) - \delta = (\alpha^2-1)\delta \equiv 0, \qquad \delta(\beta\gamma+1) - \alpha = \alpha(\delta^2-1) \equiv 0 \quad (\text{mod. } 8),$$

so folgt, wenn man diese zwei Congruenzen mit der geraden Zahl $\gamma - \beta$

multiplicirt,

$$A+B \equiv (\beta-\gamma)(\alpha\beta\gamma-\delta) \equiv (\beta-\gamma)(\beta\gamma\delta-\alpha) \quad (\text{mod. } 16),$$

was bei der Verwandlung der dritten Modularfunction wird benutzt werden.

4. Sind einmal die Exponenten A, B bei der Hauptgattung der Substitutionen gefunden, so ist das Geschäft bei den fünf übrigen Gattungen bald erledigt. Da

$$\begin{pmatrix}1 . 1\\0 . 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 . 1\\-1 . 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 . 0\\-1 . 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 . -1\\1 . \;\;0\end{pmatrix},$$

so findet man mit Hülfe der schon angeführten Ausdrücke für $\varphi\left(-\frac{1}{z}\right)$, etc.

$$\varphi\left(\frac{z}{1+z}\right) = \frac{1}{\varphi(z)}, \qquad \chi\left(\frac{z}{1+z}\right) = \varrho^{-1}\frac{\chi(z)}{\varphi(z)}.$$

Es sei fortan $Z = \frac{\gamma+\delta z}{\alpha+\beta z}$, $\alpha\delta-\beta\gamma = 1$.

Wenn nur β gerade ist, so ist $\begin{pmatrix}\alpha . \beta\\\gamma . \delta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha-\beta . \beta\\\gamma-\delta . \delta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 . 0\\1 . 1\end{pmatrix}$, wo nun die zwei Substitutionselemente $\gamma-\delta$, β gerade sind. Man hat also

$$\varphi(Z) = \varrho^A\frac{\varphi(z)}{\chi(z)}, \qquad \chi(Z) = \varrho^B\frac{1}{\chi(z)},$$

wo $A \equiv 1+[(\gamma-\delta)\delta+\delta^2-1] \equiv \gamma\delta$, $B \equiv -\beta\delta+\delta-1$ (mod. 16).

Wenn nur γ gerade ist, so ist $\begin{pmatrix}\alpha . \beta\\\gamma . \delta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha . \beta-\alpha\\\gamma . \delta-\gamma\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 . 1\\0 . 1\end{pmatrix}$, wo die zwei Elemente $\beta-\alpha$ und γ gerade sind. Daher hat man

$$\varphi(Z) = \varrho^A\frac{1}{\varphi(z)}, \qquad \chi(Z) = \varrho^B\frac{\chi(z)}{\varphi(z)},$$

wo $A \equiv \alpha\gamma+\alpha^2-1$, $B \equiv -1+[-\alpha(\beta-\alpha)-\alpha^2+1] \equiv -\alpha\beta$ (mod. 16).

Die drei noch übrigen Gattungen kommen auf die behandelten drei zurück, indem man $\begin{pmatrix}\alpha . \beta\\\gamma . \delta\end{pmatrix}$ durch $\begin{pmatrix}0 . 1\\-1 . 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\gamma . -\delta\\\alpha . \;\;\beta\end{pmatrix}$ ersetzt. Man gewinnt folgende Uebersicht, wo die Gattungen nach Herrn *Hermite* beziffert sind, und wo durchweg der Modul 16 gilt.

(I.) *β, γ sind gerade.* $\varphi(Z) = \varrho^A\varphi(z)$, $\chi(Z) = \varrho^B\chi(z)$,

$$A \equiv \alpha\gamma+\alpha^2-1 \equiv \gamma\delta+\delta^2-1, \quad B \equiv -\alpha\beta+\alpha^2-1 = -\beta\delta+\delta^2-1,$$

$$A-B \equiv \alpha(\beta+\gamma) \equiv \delta(\beta+\gamma), \quad A+B \equiv (\beta-\gamma)(\alpha\beta\gamma-\delta) \equiv (\beta-\gamma)(\beta\gamma\delta-\alpha).$$

(V.) *Nur β ist gerade.* $\varphi(Z) = \varrho^A\frac{\varphi(z)}{\chi(z)}$, $\chi(Z) = \varrho^B\frac{1}{\chi(z)}$,

$$A \equiv \gamma\delta, \quad B \equiv \alpha\beta+\alpha^2-1 \equiv -\beta\delta+\delta^2-1,$$

$$A-B \equiv \alpha\gamma, \quad A+B \equiv (\beta-\gamma)(\beta\gamma\delta-\alpha).$$

(III.). *Nur γ ist gerade.* $\varphi(Z) = \varrho^A \frac{1}{\varphi(z)}, \quad \chi(Z) = \varrho^B \frac{\chi(z)}{\varphi(z)},$

$$A \equiv \alpha\gamma + \alpha^2 - 1 \equiv -\gamma\delta + \delta^2 - 1, \quad B \equiv -\alpha\beta,$$
$$A - B \equiv \beta\delta, \quad A + B \equiv (\beta - \gamma)(\alpha\beta\gamma - \delta).$$

(II.). *α, δ sind gerade.* $\varphi(Z) = \varrho^A \chi(z), \quad \chi(Z) = \varrho^B \varphi(z),$

$$A \equiv -\gamma\delta + \gamma^2 - 1 \equiv \beta\delta + \beta^2 - 1, \quad B \equiv -\alpha\gamma + \gamma^2 - 1 \equiv \alpha\beta + \beta^2 - 1,$$
$$A - B \equiv \gamma(\alpha - \delta) \equiv -\beta(\alpha - \delta), \quad A + B \equiv (\alpha + \delta)(\beta - \alpha\gamma\delta) \equiv (\alpha + \delta)(\alpha\beta\delta - \gamma).$$

(VI.). *Nur α ist gerade.* $\varphi(Z) = \varrho^A \frac{\chi(z)}{\varphi(z)}, \quad \chi(Z) = \varrho^B \frac{1}{\varphi(z)},$

$$A \equiv -\gamma\delta, \quad B \equiv -\alpha\gamma + \gamma^2 - 1 \equiv -\alpha\beta + \beta^2 - 1,$$
$$A - B \equiv \beta\delta, \quad A + B \equiv (\alpha + \delta)(\beta - \alpha\gamma\delta).$$

(IV.). *Nur δ ist gerade.* $\varphi(Z) = \varrho^A \frac{1}{\chi(z)}, \quad \chi(Z) = \varrho^B \frac{\varphi(z)}{\chi(z)},$

$$A \equiv \gamma\delta + \gamma^2 - 1 \equiv \beta\delta + \beta^2 - 1, \qquad B \equiv \alpha\beta,$$
$$A - B \equiv \alpha\gamma, \qquad A + B \equiv (\alpha + \delta)(\alpha\beta\delta - \gamma).$$

Ich unterdrücke die Beweise, die für manche der hier vorkommenden Congruenzen noch zu geben wären, da sie den frühern ähnlich werden, wenn man die Hauptgattung der Substitutionen herstellt. Die Ausdrücke für $A - B$ dienen zur Verwandlung von $\frac{\varphi(z)}{\chi(z)}$, und diejenigen für $A + B$ werde ich sogleich zur Transformation der dritten Modularfunction gebrauchen.

5. Es sei $\log \varepsilon = \frac{i\pi}{24}$, und C ein modulo 48 zu bestimmender Exponent zu ε. Aus der vorigen Tafel ersieht man unmittelbar folgende drei Verwandlungsformeln:

wenn β, γ gerade, oder wenn α, δ gerade (I, II), $\psi(Z) = \varepsilon^C \psi(z)$,

wenn nur α, oder wenn nur γ gerade (VI, III), $\psi(Z) = \varepsilon^C \frac{\psi(z)}{\varphi(z)}$,

wenn nur β, oder wenn nur δ gerade (V, IV), $\psi(Z) = \varepsilon^C \frac{\psi(z)}{\chi(z)}$.

Die vorige Tafel giebt $\varphi(z)\chi(z)$ mit einem Factor

$$\varrho^{A+B} = \varepsilon^{3(A+B)}.$$

Da nun 3 zu 16 prim ist, so folgt $C \equiv A + B$ (mod. 16), und die Tafel giebt hierfür im Ganzen die vier Ausdrücke

$$(\alpha + \delta)(\beta - \alpha\gamma\delta), \quad (\beta - \gamma)(\beta\gamma\delta - \alpha), \quad (\beta - \gamma)(\alpha\beta\gamma - \delta), \quad (\alpha + \delta)(\alpha\beta\delta - \gamma).$$

Untersuchen wir dieselben modulo 3, so finden wir, dass alle vier mit

einander congruent sind. Unterscheidet man nämlich die drei Fälle: *a*) wenn $\alpha\delta \equiv 0$, also $\beta\gamma \equiv -1$; *b*) wenn $\beta\gamma \equiv 0$, also $\alpha\delta \equiv 1$; *c*) wenn $\alpha\delta \equiv -1$, also $\beta\gamma \equiv 1$; so überzeugt man sich leicht, dass jeder der vier Ausdrücke wird: *a*) $\equiv \beta(\alpha+\delta)$, *b*) $\equiv -\alpha(\beta-\gamma)$, *c*) $\equiv 0$. Es ist ferner klar, dass modulo 3 die Nenner $\varphi(z)$, $\chi(z)$ auf C keinen Einfluss ausüben, da ihre Verwandlungen nur Potenzen von $\varrho = \varepsilon^3$ mit sich führen. Man braucht daher nur einen der vier Ausdrücke, z. B. $(\alpha+\delta)(\alpha\beta\delta-\gamma)$ zu betrachten. Behält er, wenn man eine der zwei Substitutionen $\begin{pmatrix} 0 . 1 \\ -1 . 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 1 . 0 \\ 1 . 1 \end{pmatrix}$, aus denen und deren Inversion man alle Substitutionen zusammensetzen kann, der vorliegenden $\begin{pmatrix} \alpha . \beta \\ \gamma . \delta \end{pmatrix}$ voranschickt, jedes Mal seine Form, und ist er für die identische Substitution richtig, so ist er überhaupt richtig. Bei $\begin{pmatrix} 1 . 0 \\ 0 . 1 \end{pmatrix}$ ist der Ausdruck $\equiv 0$, wie es sein soll. Lässt man $\begin{pmatrix} 0 . 1 \\ -1 . 0 \end{pmatrix}$ der Substitution $\begin{pmatrix} \alpha . \beta \\ \gamma . \delta \end{pmatrix}$ vorangehen, ersetzt demnach $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ resp. durch $\gamma, \delta, -\alpha, -\beta$, so geht der Ausdruck in $(\beta-\gamma)(\beta\gamma\delta-\alpha)$ über, hat also seinen Werth mod. 3 nicht geändert, was mit $\psi\left(-\frac{1}{Z}\right) = \psi(Z)$ übereinstimmt. Lässt man $\begin{pmatrix} 1 . 0 \\ 1 . 1 \end{pmatrix}$ vorangehen, ersetzt demnach γ, δ resp. durch $\gamma+\alpha, \delta+\beta$, so möge C (so will ich den fraglichen Ausdruck für den Augenblick bezeichnen) in D übergehen. Da $\psi(1+Z) = \varepsilon\frac{\psi(Z)}{\chi(Z)}$, so ist zu prüfen, ob $D \equiv C+1$ sei. Man hat

$$D \equiv (\alpha+\delta+\beta)(\alpha\beta\delta-\gamma+\alpha(\beta^2-1)),$$

$$D-C-\alpha\delta+\beta\gamma \equiv \alpha(\beta^2-1)(\alpha+2\delta+\beta) \equiv D-C-1;$$

da $\beta(\beta^2-1) \equiv 0$, so folgt $D-C-1 \equiv \alpha(\beta^2-1)(\alpha-\delta)$. Wenn $\beta \equiv 0$, so ist $\alpha-\delta \equiv 0$; wenn β nicht $\equiv 0$, so ist $\beta^2-1 \equiv 0$. Also ist stets $D-C-1 \equiv 0$. Demnach sind obige vier Ausdrücke für C nicht nur mod. 16, sondern auch mod. 3 richtig, und man hat folgende Tafel für die Verwandlungen der dritten Modularfunction:

(I, II) $\psi(Z) = \varepsilon^C\psi(z)$, (VI, III) $\psi(Z) = \varepsilon^C\frac{\psi(z)}{\varphi(z)}$, (V, IV) $\psi(Z) = \varepsilon^C\frac{\psi(z)}{\chi(z)}$,

$$\left.\begin{array}{lll} \text{wenn } \alpha \text{ gerade} & \text{(II, VI)}, & C \equiv (\alpha+\delta)(\beta-\alpha\gamma\delta), \\ \text{wenn } \beta \text{ gerade} & \text{(I, V)}, & C \equiv (\beta-\gamma)(\beta\gamma\delta-\alpha), \\ \text{wenn } \gamma \text{ gerade} & \text{(I, III)}, & C \equiv (\beta-\gamma)(\alpha\beta\gamma-\delta), \\ \text{wenn } \delta \text{ gerade} & \text{(II, IV)}, & C \equiv (\alpha+\delta)(\alpha\beta\delta-\gamma). \end{array}\right\} \text{(mod. 48)}$$

6. Werden die zwei Periodicitätsmaasse $2K$, $2iK'$ als Functionen ihres Verhältnisses z betrachtet und mit $K(z)$, $L(z)$ bezeichnet, so kann man die

den sechs Substitutionsgattungen entsprechenden Verwandlungen des ersten Periodicitätsmaasses, wie folgt, darstellen:

$$\begin{array}{ccc} \text{(I, II)} & \text{(VI, III)} & \text{(V, IV)} \\ K(Z)=i^E(\alpha+\beta z)K(z), & =i^E\varphi^4(z)(\alpha+\beta z)K(z), & =i^E\chi^4(z)(\alpha+\beta z)K(z), \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l|l|l} \text{(I)}\ E\equiv\alpha-1\equiv\delta-1\ (\text{mod. }4) & \text{(VI)}\ E\equiv\gamma & \text{(V)}\ E\equiv\delta-1 \\ \text{(II)}\ E\equiv-\beta\equiv\gamma & \text{(III.)}\ E\equiv\alpha-1 & \text{(IV)}\ E\equiv-\beta \end{array}\right|.$$

Diese leicht zu beweisende Tafel soll den §. 1 ergänzen.

7. Ich erlaube mir noch eine Bemerkung über solche Transformationen der dritten Modularfunction, wo das Substitutionsmaass eine ungerade Zahl n ist, dass nämlich die Relationen zwischen $\psi(z)$ und $\psi(nz)$, wenn n nicht durch 3 theilbar ist, eine einfachere Gestalt haben, als diejenigen zwischen $\varphi(z)$ und $\varphi(nz)$. Es sei

$$s=2^{\frac{1}{4}}\psi(z),\qquad t=2^{\frac{1}{4}}\psi(nz),$$

so hat man:

für $n=5$, $\quad \frac{s^6+t^6}{s^3t^3}+(st)^2-\left(\frac{2}{st}\right)^2=0,$

für $n=7$, $\quad \frac{s^8+t^8}{s^4t^4}-\left((st)^3+\left(\frac{2}{st}\right)^3\right)+7=0,$

für $n=11$, $\quad \frac{s^{12}+t^{12}}{s^6t^6}+\left((st)^5-\left(\frac{2}{st}\right)^5\right)-11\left((st)^3-\left(\frac{2}{st}\right)^3\right)+44\left(st-\frac{2}{st}\right)=0,$

für $n=13$, $\quad \frac{s^{14}+t^{14}}{s^7t^7}+13\frac{s^{10}+t^{10}}{s^5t^5}+52\frac{s^6+t^6}{s^3t^3}+78\frac{s^2+t^2}{st}+\left((st)^6-\left(\frac{2}{st}\right)^6\right)=0,$

für $n=17$, $\quad \frac{s^{18}+t^{18}}{s^9t^9}-34\frac{s^{12}+t^{12}}{s^6t^6}+\frac{s^6+t^6}{s^3t^3}\left[17\left((st)^4+\left(\frac{2}{st}\right)^4\right)+119\right]$

$$-\left((st)^8+\left(\frac{2}{st}\right)^8\right)+34\left((st)^4+\left(\frac{2}{st}\right)^4\right)+340=0,$$

für $n=19$, $\quad \frac{s^{20}+t^{20}}{s^{10}t^{10}}+114\frac{s^{12}+t^{12}}{s^6t^6}+95\frac{s^8+t^8}{s^4t^4}\left((st)^3-\left(\frac{2}{st}\right)^3\right)$

$$+\frac{s^4+t^4}{s^2t^2}\left[19\left((st)^6+\left(\frac{2}{st}\right)^6\right)-95\right]$$

$$+\left((st)^9-\left(\frac{2}{st}\right)^9\right)+38\left((st)^3-\left(\frac{2}{st}\right)^3\right)=0.$$

Wenn dagegen der ungerade Multiplicator n durch 3 theilbar ist, so hat man eine Relation zwischen $\psi^3(z)$ und $\psi^3(nz)$, die um nichts einfacher ist als diejenige zwischen $\varphi(z)$ und $\varphi(nz)$. Es sei

$$S=2\psi^3(z),\qquad T=2\psi^3(nz),$$

so hat man:

$$\text{für } n=3,\quad \frac{S^4+T^4}{S^2T^2}+ST-\frac{8}{ST}=0,$$

$$\text{für } n=9,\quad \frac{S^{12}+T^{12}}{S^6T^6}+28\frac{S^{10}+T^{10}}{S^5T^5}+298\frac{S^8+T^8}{S^4T^4}+1548\frac{S^6+T^6}{S^3T^3}$$

$$+4383\frac{S^4+T^4}{S^2T^2}+\frac{S^2+T^2}{ST}\left[-\left((ST)^4+\left(\frac{8}{ST}\right)^4\right)+7704\right]$$

$$-\left((ST)^4+\left(\frac{8}{ST}\right)^4\right)+9324 = 0.$$

Bern, 31. Juli 1870.

Ueber die *Steiner*schen Sätze von den Doppeltangenten der Curven vierten Grades.

(Von Herrn *Geiser* in Zürich.)

Obschon durch die analytischen Untersuchungen der Herren *Hesse* *), *Clebsch* **) und *Aronhold* ***) auch die synthetische Behandlung der Doppeltangenten einer ebenen Curve vierten Grades wesentlich gefördert worden ist, so hat man doch eine Ableitung der von *Steiner* †) ohne Beweis gegebenen Resultate auf geometrischem Wege noch nicht versucht. Der nachfolgende Aufsatz füllt wenigstens für die Hauptsätze die angegebene Lücke aus, indem er den von *Steiner* im 47. und 49. Bande dieses Journals gegebenen Andeutungen folgt, und sich namentlich auf die in der oben citirten Abhandlung des Herrn *Aronhold* enthaltenen Methoden stützt. — Dass in der That die Theorie der Kegelschnitte, welche eine Curve vierten Grades in vier Punkten berühren, den Ausgangspunkt der *Steiner*schen Betrachtungen gebildet haben, geht neben den unzweifelhaften innern Gründen auch aus einer gelegentlichen Mittheilung des Herrn Prof. *Schläfli* (der mit *Steiner* selbst den Gegenstand mehrfach besprochen) an den Verfasser hervor.

I.

Jeder Punkt in der Ebene einer Curve dritten Grades bestimmt mit derselben eine erste Polare (einen Kegelschnitt) und eine zweite Polare (eine Gerade); wenn die erste Polare des Punktes p in Bezug auf die Curve C_3 durch den Punkt Π geht, so geht die zweite Polare von Π durch p. Bewegt sich p auf einer Geraden G, so beschreibt die erste Polare ein Kegelschnittbüschel, während die zweite Polare sich als Tangente eines Kegelschnitts fortschiebt. In der That gehen durch einen beliebigen Punkt Π nur zwei der zweiten Polaren, die den Punkten auf G entsprechen, nämlich diejenigen, welche den Schnittpunkten von G mit der ersten Polaren von Π zugehören.

*) Bd. 49 dieses Journals.
**) Bd. 63 ebendaselbst.
***) Berliner Monatsberichte Juli 1864.
†) Bd. 49 dieses Journals.



Sei ausser der Curve C_3 noch ein beliebiger Kegelschnitt K gegeben, so erzeugt jeder Punkt p auf K eine erste Polare nach C_3. Von diesen Polaren gehen je zwei durch einen beliebigen Punkt Π, nämlich diejenigen, welche den Schnittpunkten der zweiten Polaren von Π mit K entsprechen. Wenn p sich continuirlich auf K bewegt, so verändert sich auch seine erste Polare continuirlich und umhüllt also eine gewisse Curve. Die Punkte derselben sind die Durchschnittspunkte von unendlich benachbarten ersten Polaren, die jeweilen unendlich nahe aufeinanderfolgenden Punkten auf K zugehören. Irgend eine dieser ersten Polaren berührt die Umhüllende in den vier Punkten, welche sie (die Polare) mit der nächstfolgenden gemein hat, so dass also zu der Umhüllenden unendlich viele Kegelschnitte gehören, welche sie in vier Punkten berühren.

Es ist gezeigt worden, dass von der ersten Polaren der Punkte auf K je zwei durch einen beliebigen Punkt Π gehen; wenn dieselben zusammenfallen, so ist Π ein Punkt der Umhüllenden. Dies tritt ein, wenn die zweite Polare von Π den Kegelschnitt K berührt. Daraus lässt sich die Anzahl der Punkte auf einer Geraden g bestimmen, welche der Umhüllenden angehören; denn wenn Π sich auf g bewegt, so beschreibt seine zweite Polare einen Kegelschnitt, welcher mit K vier gemeinschaftliche Tangenten hat; die Umhüllende ist also vom vierten Grade. Dieselbe Curve wird punktweise erzeugt, indem man bedenkt, dass es vier Punkte (Pole) giebt, welche als zweite Polaren nach C_3 eine gegebene Gerade erzeugen. Wenn sich nun eine Gerade als Tangente an K bewegt, so beschreiben ihre vier Pole die vorhin erwähnte Curve vierten Grades.

II.

Die abgeleiteten Resultate zeigen, dass man vermittelst eines Kegelschnittes und einer Curve dritten Grades zu einer einfachen Erzeugung von Curven vierten Grades gelangt. Es ist nun noch zu beweisen, dass jede Curve vierten Grades C_4 auf die angegebene Weise dargestellt werden kann.

Aus der Existenz von 28 Doppeltangenten, welche zu je zweien einen speciellen Kegelschnitt bilden, folgt zunächst für die allgemeine Curve vierten Grades, dass es wirklich Kegelschnitte giebt, welche sie in vier Punkten berühren. Sei k ein solcher Kegelschnitt, dessen Berührungspunkte mit C_4 resp. b_1, b_2, b_3, b_4 heissen mögen, ferner sei k_1 ein Kegelschnitt, welcher b_1, b_2, b_3, b_4 enthält und ausserdem C_4 noch in β_1, β_2, β_3, β_4 schneidet, so existirt immer

ein Kegelschnit k_2, welcher C_4 in den letztgenannten vier Punkten berührt. Zum Beweise benutzt man den Satz, dass jede Curve vierten Grades, welche durch 13 von den 16 Schnittpunkten zweier anderer Curven vierten Grades geht, auch die drei übrigen enthält, oder, was für den vorliegenden Fall genügt, den Specialsatz: Wenn von den 16 Schnittpunkten zweier Curven vierten Grades acht auf einem Kegelschnitt liegen, so sind die acht andern auf einem zweiten Kegelschnitt gelegen. Die beiden Curven vierten Grades C_4 und der doppelt gedachte Kegelschnitt k_1 schneiden sich in 16 Punkten, die aus den doppelt gelegten Punkten b_1, b_2, b_3, b_4, β_1, β_2, β_3, β_4 bestehen. Von diesen liegen die acht ersten, die b, auf dem Kegelschnitt k, welcher C_4 in ihnen berührt, also liegen die acht andern auf einem neuen Kegelschnitte k_2, welcher C_4 in den Punkten β berührt.

Da der Kegelschnitt k_1 durch die Punkte b beliebig gelegt werden kann, so folgt, dass es unendlich viele Kegelschnitte giebt, welche mit k und k_2 die Eigenschaft theilen, die C_4 in vier Punkten zu berühren, und da man statt von k auch von jedem der andern analogen Kegelschnitte ausgehen kann, so ergiebt sich, dass man in den mannigfachsten Weisen diese Kegelschnitte erzeugt, sobald ein einziges Doppeltangentenpaar als existirend vorausgesetzt wird.

Um in dieses Chaos Ordnung zu bringen, sollen zwei Kegelschnitte k_1 und k'_1 betrachtet werden, welche beide durch $b_1 b_2 b_3 b_4$ gehen und die C_4 ausserdem noch resp. in $\beta_1 \beta_2 \beta_3 \beta_4$, $\beta'_1 \beta'_2 \beta'_3 \beta'_4$ treffen, so dass nun neben k_2 ein neuer Kegelschnitt k'_2 auftritt, welcher C_4 in den Punkten β' berührt. Es bilden ferner k_2 und k'_2 zusammengenommen eine Curve vierten Grades, welche mit C_4 ein Büschel erzeugt, dessen Grundpunkte aus den β und β', sowie den doppeltgelegten b besteht; es müssen sich deshalb die sämmtlichen Curven desselben in den b berühren. Da aber die acht Punkte, welche durch die b repräsentirt sind, in dem Kegelschnitt k liegen, so müssen die Punkte β und β' in einem andern Kegelschnitte k''_2 liegen. Gestützt auf diese Eigenschaft kann man zeigen, dass alle Kegelschnitte, welche in die Betrachtung eintreten, seien sie nun von der Art der k, k_2, k'_2 oder von der Art der k_1, k'_1, k''_1, einem und demselben Kegelschnittnetze angehören. Das Netz ist durch die drei Kegelschnitte k, k_1, k_2, welche nicht demselben Büschel angehören, vollkommen bestimmt; k'_1 als dem Büschel $(k k_1)$ entnommen ist jedenfalls im Netze $(k k_1 k_2)$ enthalten, ebenso der Kegelschnitt k''_1, weil er dem Büschel $(k_1 k_2)$ angehört, durch dessen Grundpunkte β er geht. Da nun k'_2 durch die Schnittpunkte β' von k'_1 und k''_1 geht, so ist er im Büschel $(k'_1 k''_1)$ enthalten und demzufolge

ebenfalls ein Kegelschnitt des Netzes $(k k_1 k_2)$. Man kommt also, durch welcherlei Combination man auch von k ausgehe, niemals aus dem Netze heraus, das durch irgend drei nicht demselben Büschel angehörende, in die Betrachtung eintretende Kegelschnitte bestimmt ist.

III.

An den gefundenen Satz anschliessend kann man von einer Entwicklung über Kegelschnittnetze Gebrauch machen, welche Herr *Cremona* der deutschen Ausgabe seiner „Introduzione“ (pag. 274) beigefügt hat. Es wird dort nämlich gezeigt, dass die Kegelschnitte eines Netzes stets als die ersten Polaren sämmtlicher Punkte der Ebene in Bezug auf eine vollkommen eindeutig bestimmte Curve dritten Grades angesehen werden können. Sei C_3 diese Curve für das Netz $(k k_1 k_2)$, so ist leicht einzusehen, dass die in vier Punkten berührenden Kegelschnitte der C_4, von deren Betrachtung der §. II. ausgegangen ist, die ersten Polaren von Punkten einer gewissen noch zu bestimmenden Curve C_x in Bezug auf C_3 sind.

Um die gesuchte Curve zu erforschen, bemerke man, dass den Punkten einer Geraden, als Pole aufgefasst, solche erste Polaren nach C_3 entsprechen, die ein Büschel bilden; der Grad von C_x stimmt also überein mit der Anzahl der die C_4 in vier Punkten berührenden Kegelschnitte, die in einem Büschel des Netzes $(k k_1 k_2)$ enthalten sind. Wenn nun b_1, b_2, b_3, b_4 die Berührungspunkte eines solchen Kegelschnittes k sind, so bilden sie gleichzeitig die Grundpunkte eines dem Netze angehörigen Büschels, der kein analoges Glied mehr enthält, d. h. auf der Geraden g, welche die Pole der Kegelschnitte des Büschels enthält, liegt nur ein einziger Punkt von C_x. Dieser kann freilich aus mehreren zusammengefallenen bestehen, so dass nicht nothwendiger Weise $x = 1$ sein muss; es ist dann die Gerade g, wenn sie nicht zufälliger Weise einen vielfachen Punkt von C_x enthält, eine Tangente derselben *).

Da aber durch successives Verschieben der Punkte b immer neue ebenfalls continuirlich sich an einander schliessende Geraden g als Tangenten von C_x entstehen, und jede derselben ausser dem Berührungspunkte keinen weitern Punkt mit der genannten Curve gemein hat, so ist $x = 2$.

Damit ist man auf die Sätze in §. I. zurückgeführt und weiss nun, dass die allgemeinste Curve vierten Grades C_4 erzeugt werden kann als Umhüllende

*) In der That kann x nicht $= 1$ sein, weil sonst alle in vier Punkten die C_4 berührenden Kegelschnitte ein Büschel bilden würden, was unmöglich ist.

der ersten Polaren aller Punkte (d. h. nach der *Steiner*schen Bezeichnungsweise als Polarenveloppe) eines Kegelschnittes C_2 in Bezug auf eine Curve dritten Grades C_3; jede der ersten Polaren, welche sämmtlich Kegelschnitte sind, berührt die C_4 in vier Punkten. Durch alle möglichen Combinationen dieser Kegelschnitte zu zweien können Büschel erzeugt werden, welche das ganze Netz der ersten Polaren erschöpfen. Sei k_1 irgend ein Kegelschnitt des Netzes, so hat derselbe mit C_4 acht Punkte gemein, von denen einer mit b_1 bezeichnet werde. Vom Netze geht ein ganzes Büschel durch b_1, in diesem ist ein Kegelschnitt k enthalten, welcher C_4 ausser in b_1 noch in drei andern Punkten b_2, b_3, b_4 berührt. Die Punkte b sind die Grundpunkte des Büschels, so dass sie auch auf k_1 liegen. Wenn k_1 der C_4 ausser in den b noch in β_1, β_2, β_3, β_4 begegnet, so wird in diesen Punkten ein Kegelschnitt k_2 die C_4 berühren: Es ist also das Netz so beschaffen, dass jeder seiner Kegelschnitte die C_4 in acht Punkten schneidet, welche in zwei Gruppen von vieren zerfallen, in deren jeder ein Kegelschnitt die C_4 berührt.

[Ueber mehrere in diesem § vorausgesetzte Sätze von den Kegelschnittbüscheln und -netzen vergleiche man den von Herrn *Schröter* herausgegebenen II. Band der *Steiner*schen Vorlesungen.]

IV.

Von dem jetzt gewonnenen Standpunkte aus, welcher die Sätze über die Doppeltangenten der Curven vierten Grades auf die Theorie der Curven dritten Grades zurückführen lehrt, geht die synthetische Betrachtung wesentlich denselben Weg, wie die bereits citirten analytischen Entwickelungen der Herren *Aronhold*, *Clebsch* und *Hesse*. Es genügt also, nur die Hauptresultate hervorzuheben, deren nähere Ausführung an der Hand der „Introduzione“ des Herrn *Cremona* keine weitern Schwierigkeiten bietet.

Sei C_4 die Polarenveloppe von C_2 in Bezug auf C_3, bezeichnet man ferner mit G_3 die *Hesse-Steiner*sche und mit K_3 die *Cayley*sche Curve der C_3, so findet man zunächst, dass den sechs Schnittpunkten $S_1 \dots S_6$ von C_2 und G_3 solche erste Polaren nach C_3 entsprechen, welche je aus einem Doppeltangentenpaar der C_4 bestehen. Einer der sechs Punkte S bildet mit dem Mittel- oder Schnittpunkte p des ihm zugehörigen Doppeltangentenpaares ein Paar conjugirter Pole der C_3. Da nun die conjugirten Pole von sechs Punkten der C_3, welche gleichzeitig einem Kegelschnitte angehören, wieder auf einem Kegelschnitte liegen, so gilt diese geometrische Eigenschaft namentlich auch

von den sechs Punkten p. Seien m und n, m' und n' die Berührungspunkte eines der sechs Doppeltangentenpaare (t, t'), so kann man annehmen, wie leicht aus Früherem zu folgern ist, es gehöre (t, t') einem Büschel von ersten Polaren nach C_3 an, dessen Grundpunkte m und n, m' und n' seien. Die Pole dieser ersten Polaren liegen dann auf der Tangente, welche in dem zugehörigen Punkte S an C_2 gelegt werden kann*). Dem Büschel gehören als specielle erste Polaren die Linienpaare $\{mm', nn'\}$ und $\{mn', nm'\}$ an, deren Mittelpunkte q und r ebenfalls auf G_3 liegen, so dass von dieser Curve $6p+6q+6r=18$ Punkte bekannt sind. Die Doppeltangentenpaare (t, t') so wie die Linienpaare $\{mm', nn'\}$, $\{mn', nm'\}$ berühren K_3, man kann demnach von K_3 sofort 36 Tangenten angeben.

Da man nach §. II. und III. durch die Wahl eines bestimmten Doppeltangentenpaares der Curve vierten Grades auch zu einer vollkommen bestimmten Erzeugung der C_4 als Polarenveloppe eines Kegelschnitts in Bezug auf eine Curve dritten Grades geführt wird, welche im Ganzen nur sechs der 378 Paare liefert, so ergiebt sich, dass 63 verschiedene Arten der Erzeugung einer und derselben Curve vierten Grades möglich sind. Die hierhin gehörigen combinatorischen Sätze sind bei Herrn *Hesse* sehr ausführlich erörtert, so dass ein näheres Eintreten überflüssig ist.

Es mag noch bemerkt werden, dass zu einer festen Curve dritten Grades C_3 unendlich viele Curven vierten Grades als Polarenveloppen von Kegelschnitten gefunden werden können, nämlich eine zu jedem Kegelschnitte der Ebene. Alle so bestimmten C_4 haben die Eigenschaft, dass in jeder eine Gruppe von sechs Doppeltangenten existirt, welche die *Cayleysche* Curve K_3 von C_3 berühren; die übrigen Doppeltangenten können aber die ganze Ebene bedecken. Es giebt unter den C_4 solche von besonderer Art, z. B. diejenigen, welche Kegelschnitten entsprechen, die mit der *Hesseschen* Curve G_3 von C_3 eine einfache Berührung in drei von einander verschiedenen Punkten eingehen, oder diejenigen, die aus Kegelschnitten hervorgehen, welche G_3 in sechs zusammenfallenden Punkten schneiden.

Man kann ferner alle Curven C_4 untersuchen, die den Kegelschnitten eines Büschels entsprechen; dieselben berühren die vier ersten Polaren nach C_3, welche den Grundpunkten entsprechen, je in 4 Punkten. Es kommen zu-

*) Der Schnittpunkt irgend zweier der bezeichneten Tangenten an C_2 erzeugt eine erste Polare, welche die acht Berührungspunkte von zweien der Doppeltangentenpaare enthält.

der ersten Polaren aller Punkte (d. h. nach der *Steiner*schen Bezeichnungsweise als Polarenveloppe) eines Kegelschnittes C_2 in Bezug auf eine Curve dritten Grades C_3; jede der ersten Polaren, welche sämmtlich Kegelschnitte sind, berührt die C_4 in vier Punkten. Durch alle möglichen Combinationen dieser Kegelschnitte zu zweien können Büschel erzeugt werden, welche das ganze Netz der ersten Polaren erschöpfen. Sei k_1 irgend ein Kegelschnitt des Netzes, so hat derselbe mit C_4 acht Punkte gemein, von denen einer mit b_1 bezeichnet werde. Vom Netze geht ein ganzes Büschel durch b_1, in diesem ist ein Kegelschnitt k enthalten, welcher C_4 ausser in b_1 noch in drei andern Punkten b_2, b_3, b_4 berührt. Die Punkte b sind die Grundpunkte des Büschels, so dass sie auch auf k_1 liegen. Wenn k_1 der C_4 ausser in den b noch in β_1, β_2, β_3, β_4 begegnet, so wird in diesen Punkten ein Kegelschnitt k_2 die C_4 berühren: Es ist also das Netz so beschaffen, dass jeder seiner Kegelschnitte die C_4 in acht Punkten schneidet, welche in zwei Gruppen von vieren zerfallen, in deren jeder ein Kegelschnitt die C_4 berührt.

[Ueber mehrere in diesem § vorausgesetzte Sätze von den Kegelschnittbüscheln und -netzen vergleiche man den von Herrn *Schröter* herausgegebenen II. Band der *Steiner*schen Vorlesungen.]

IV.

Von dem jetzt gewonnenen Standpunkte aus, welcher die Sätze über die Doppeltangenten der Curven vierten Grades auf die Theorie der Curven dritten Grades zurückführen lehrt, geht die synthetische Betrachtung wesentlich denselben Weg, wie die bereits citirten analytischen Entwickelungen der Herren *Aronhold*, *Clebsch* und *Hesse*. Es genügt also, nur die Hauptresultate hervorzuheben, deren nähere Ausführung an der Hand der „Introduzione“ des Herrn *Cremona* keine weitern Schwierigkeiten bietet.

Sei C_4 die Polarenveloppe von C_2 in Bezug auf C_3, bezeichnet man ferner mit G_3 die *Hesse-Steiner*sche und mit K_3 die *Cayley*sche Curve der C_3, so findet man zunächst, dass den sechs Schnittpunkten $S_1 \ldots S_6$ von C_2 und G_3 solche erste Polaren nach C_3 entsprechen, welche je aus einem Doppeltangentenpaar der C_4 bestehen. Einer der sechs Punkte S bildet mit dem Mittel- oder Schnittpunkte p des ihm zugehörigen Doppeltangentenpaares ein Paar conjugirter Pole der C_3. Da nun die conjugirten Pole von sechs Punkten der C_3, welche gleichzeitig einem Kegelschnitte angehören, wieder auf einem Kegelschnitte liegen, so gilt diese geometrische Eigenschaft namentlich auch

von den sechs Punkten p. Seien m und n, m' und n' die Berührungspunkte eines der sechs Doppeltangentenpaare (t, t'), so kann man annehmen, wie leicht aus Früherem zu folgern ist, es gehöre (t, t') einem Büschel von ersten Polaren nach C_3 an, dessen Grundpunkte m und n, m' und n' seien. Die Pole dieser ersten Polaren liegen dann auf der Tangente, welche in dem zugehörigen Punkte S an C_2 gelegt werden kann*). Dem Büschel gehören als specielle erste Polaren die Linienpaare $\{mm', nn'\}$ und $\{mn', nm'\}$ an, deren Mittelpunkte q und r ebenfalls auf G_3 liegen, so dass von dieser Curve $6p+6q+6r = 18$ Punkte bekannt sind. Die Doppeltangentenpaare (t, t') so wie die Linienpaare $\{mm', nn'\}$, $\{mn', nm'\}$ berühren K_3, man kann demnach von K_3 sofort 36 Tangenten angeben.

Da man nach §. II. und III. durch die Wahl eines bestimmten Doppeltangentenpaares der Curve vierten Grades auch zu einer vollkommen bestimmten Erzeugung der C_4 als Polarenveloppe eines Kegelschnitts in Bezug auf eine Curve dritten Grades geführt wird, welche im Ganzen nur sechs der 378 Paare liefert, so ergiebt sich, dass 63 verschiedene Arten der Erzeugung einer und derselben Curve vierten Grades möglich sind. Die hierhin gehörigen combinatorischen Sätze sind bei Herrn *Hesse* sehr ausführlich erörtert, so dass ein näheres Eintreten überflüssig ist.

Es mag noch bemerkt werden, dass zu einer festen Curve dritten Grades C_3 unendlich viele Curven vierten Grades als Polarenveloppen von Kegelschnitten gefunden werden können, nämlich eine zu jedem Kegelschnitte der Ebene. Alle so bestimmten C_4 haben die Eigenschaft, dass in jeder eine Gruppe von sechs Doppeltangenten existirt, welche die *Cayley*sche Curve K_3 von C_3 berühren; die übrigen Doppeltangenten können aber die ganze Ebene bedecken. Es giebt unter den C_4 solche von besonderer Art, z. B. diejenigen, welche Kegelschnitten entsprechen, die mit der *Hesse*schen Curve G_3 von C_3 eine einfache Berührung in drei von einander verschiedenen Punkten eingehen, oder diejenigen, die aus Kegelschnitten hervorgehen, welche G_3 in sechs zusammenfallenden Punkten schneiden.

Man kann ferner alle Curven C_4 untersuchen, die den Kegelschnitten eines Büschels entsprechen; dieselben berühren die vier ersten Polaren nach C_3, welche den Grundpunkten entsprechen, je in 4 Punkten. Es kommen zu-

*) Der Schnittpunkt irgend zweier der bezeichneten Tangenten an C_2 erzeugt eine erste Polare, welche die acht Berührungspunkte von zweien der Doppeltangentenpaare enthält.

ten Grades ist, die sich eindeutig und reciprok auf eine ebene Curve vierten Grades beziehen lässt, d. h. so, dass jedem Punkt der einen Curve stets ein und nur ein Punkt der andern zugeordnet ist. Seien F_2, F_2', F_2'' drei nicht demselben Büschel angehörige Flächen des Bündels, so kann man einem Verfahren, das dem von Herrn *Cremona* bei der schon in §. III. erwähnten Untersuchung über Kegelschnittnetze angewandten nachgebildet ist, entnehmen, dass dieselben stets als erste Polaren einer Fläche F_3 angesehen werden dürfen. [Dies ist sogar auf unendlich viele Weisen möglich, deren jede eine andere Fläche dritten Grades bestimmt; im Nachfolgenden benutzen wir aber nur eine einzige der Flächen F_3]. Werden nun mit p, p', p'' die Pole bezeichnet, deren erste Polaren nach F_3 resp. $F_2 F_2' F_2''$ sind, so kann man die sämmtlichen Punkte π der Ebene $pp'p''$ projectivisch auf die sämmtlichen Flächen des Flächenbündels zweiten Grades beziehen und zwar so, dass einem Punkte π seine erste Polare nach F_3 zugeordnet ist. Diejenigen Punkte π, deren erste Polaren in Kegelflächen ausarten, bilden eine Curve vierten Grades C_4, welche, wie aus den Sätzen des Herrn *Hesse* hervorgeht, nicht specieller Natur ist, sondern bei gehöriger Wahl von $F_2 F_2' F_2''$ und durch allfällige projectivische Verwandlung jede beliebige Curve vierten Grades sein kann. Wie schon bemerkt, ist sie eindeutig und reciprok auf die Kegelmittelpunktcurve bezogen und entsprechende Punkte der beiden Curven sind reciproke Pole in Bezug auf F_3. Es muss also die C_4 auf der Kernfläche F_4 der Fläche F_3 liegen, d. h.: Jede Curve vierten Grades kann als ebener Schnitt einer *Steiner*schen Kernfläche in Bezug auf eine Fläche dritten Grades dargestellt werden. Das Pentaeder der F_4 schneidet auf der Ebene der C_4 ein Fünfseit aus, das dieser Curve eingeschrieben ist, es ergiebt sich also, in Folge der oben gemachten Bemerkung über die unendlich vielen F_3 die zu einer C_4 gehören, und welche demnach auch unendlich viele F_4 nach sich ziehen, dass der allgemeinen Curve vierten Grades unendlich viele Fünfseite eingeschrieben werden können.

Zürich, den 15. Juli 1870.

STORAGI

